Приближенное аналитическое решение внутренней задачи кондуктивно-ламинарной свободной конвекции

Михаил И. Попов¹ mihail_semilov@mail.ru
Елена А. Соболева¹ sobol5661@mail.ru

¹ кафедра высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, Россия

Реферат. Представлено приближенное аналитическое решение задачи о нестационарной свободной конвекции в кондуктивно-ламинарном режиме ньютоновской жидкости в квадратной области при мгновенном изменении температуры боковой стенки и отсутствии тепловых потоков на верхнем и нижнем основаниях. Уравнения естественной конвекции в приближении Обербека-Буссинеска линеаризованы за счет пренебрежения конвективными слагаемыми. Для сокращения числа гидротермических параметров система приводится к безразмерному виду введением масштабов для зависимых и независимых переменных. Переход от классических переменных к переменным «вихрь-функция тока» позволил свести систему к нестационарному уравнению теплопроводности и нестационарному неоднородному бигармоническому уравнению, причем первое не зависит от второго. Решение в виде функции тока получено применением интегрального синус-преобразования Фурье с конечными пределами к бигармоническому уравнению сначала по переменной x , а затем по переменной y . Функция тока имеет вид двойного ряда Фурье по синусам с коэффициентами в интегральной форме. Коэффициенты ряда представляют собой интегралы от неизвестных функций. На основании гипотезы о специальном виде интегралов коэффициенты вычисляются из системы линейных уравнений, полученной из граничных условий на частные производные функции. Исследована зависимость структуры течения от числа Прандтля. Получены карты линий тока и изолиний компонентов скорости, описывающие развитие течения с момента возникновения до перехода в стационарное состояние. Приведены графики векторного поля скоростей в различное время, иллюстрирующие динамику течения. Достоверность гипотезы о специальном виде интегральных коэффициентов подтверждается адекватностью физическому смыслу и согласованностью полученных результатов с численным решением задачи.

Ключевые слова: уравнение Обербека-Буссинеска, бигармоническое уравнение, кондуктивно-ламинарная свободная конвекция, конечное интегральное синус-преобразование Фурье

The approximate analytical solution of the internal problem of conductive and laminar free convection

Mikhail I. Popov¹ mihail_semilov@mail.ru
Elena A. Soboleva¹ sobol5661@mail.ru

¹ higher mathematics department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, Russia

Summary. The approximate analytical solution of a problem about nonstationary free convection in the conductive and laminar mode of the Newtonian liquid in square area at the instantaneous change of temperature of a sidewall and lack of heat fluxes is submitted on top and bottom the bases. The equations of free convection in an approximation of Oberbeck-Bussinesk are linearized due to neglect by convective items. For reduction of number of hydrothermal parameters the system is given to the dimensionless look by introduction of scales for effect and explanatory variables. Transition from classical variables to the variables "whirlwind-a flow function" allowed to reduce system to a nonstationary heat conduction equation and a nonstationary nonuniform biharmonic equation, and the first is not dependent on the second. The decision in the form of a flow function is received by application integral a sine - Fourier transforms with terminating limits to a biharmonic equation at first on a variable x , and then on a variable y . The flow function has an appearance of a double series of Fourier on sine with coefficients in an integral form. Coefficients of a row represent integrals from unknown functions. On the basis of a hypothesis of an express type of integrals coefficients are calculated from the linear equation system received from boundary conditions on partial derivatives of function. Dependence of structure of a current on Prandtl's number is investigated. The cards of streamlines and isolines of components of speed describing development of a current from the moment of emergence before transition to a stationary state are received. The schedules of a field of vectors of speeds in various time illustrating dynamics of a current are provided. Reliability of a hypothesis of an express type of integral coefficients is confirmed by adequacy to physical sense and coherence of the received results with the numerical solution of a problem.

Keywords: Oberbeck-Boussinesq equation, biharmonic equation, conductive and laminar free convection, sine integral Fourier transform with finite limits

Для цитирования

Попов М. И., Соболева Е.А. Приближенное аналитическое решение внутренней задачи кондуктивно-ламинарной свободной конвекции // Вестник ВГУИТ. 2016. № 4. С 78–84. doi:10.20914/2310-1202-2016-4-78-84

For citation

Popov M. I., Soboleva E. A. The approximate analytical solution of the internal problem of conductive and laminar free convection. *Vestnik VSUET* [Proceedings of VSUET]. 2016. no 4 pp. 78–84 (in Russ.). doi:10.20914/2310-1202-2016-4-78-84

Введение

Математическое моделирование свободной конвекции в большинстве случаев базируется на уравнениях Навье-Стокса в приближении Обербека-Буссинеска. Изучению внутренних задач свободной конвекции посвящено много работ, поскольку они имеют важные практические приложения, такие как хранение криогенных жидкостей, охлаждение электроники, моделирование двигателей внутреннего сгорания и др. Исследованию течения и теплообмена при ламинарной свободной конвекции между вертикальными параллельными изотермическими пластинами с различными температурами методом конечных объемов посвящена работа [1]. В работе [2] модификацией метода конечных разностей решается краевая сопряженная задача нестационарного конвективного теплопереноса в замкнутой квадратной полости. Ламинарная свободная конвекция внутри параллелепипеда с нагревом боковых стенок численно исследована в работе [3]. Изучению свободной конвекции в квадратной области с внутренней перегородкой методом конечного объема посвящена работа [4]. В работе [5] конечно-разностным методом исследуется течение наножидкости в пористой квадратной камере. В подавляющем большинстве работ применяется численное моделирование. В связи с этим возникает необходимость получения аналитических и приближенно аналитических решений подобного класса задач.

Постановка задачи и вывод основных уравнений

Рассматривается плоская квадратная область (рисунок 1), заполненная полностью вязкой несжимаемой жидкостью. В начальный момент времени жидкость находится в состоянии покоя с температурой t_0 . Затем температура левой стенки мгновенно принимает значение t_h , причем тепловой поток через верхнюю и нижнюю стенку отсутствует $q=0$. Температура правой стенки поддерживается постоянной, равной температуре жидкости в начальный момент времени ($t_h > t_0$).

В выбранной системе координат уравнения Обербека-Буссинеска принимают следующий вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right),$$

Рисунок 1. Расчетная схема

Figure 2. Design diagram

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_y}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \\ &+ \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) + \beta g t, \\ \frac{\partial t}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial t}{\partial x} + v_y \frac{\partial t}{\partial y} &= a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь v_x, v_y — компоненты скорости по осям x и y ; p, τ, t — давление, время и температура; ρ, ν, a, β — плотность, коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и объемного расширения среды. Поскольку рассматриваются очень медленные течения, то без потери физического смысла предположим, что $v_x \approx 0, v_y \approx 0$. При такой линеаризации получим

$$\frac{\partial v_x}{\partial \tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial \tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) + \beta g t, \quad (2)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

Для сокращения числа гидротермических параметров система (1)–(4) приводится к безразмерному виду введением масштабов для зависимых и независимых переменных: $\theta = \frac{\tau}{\bar{\tau}}, X = \frac{x}{h}$,

$$Y = \frac{y}{h}, \quad V_x = \frac{v_x}{\bar{v}}, \quad V_y = \frac{v_y}{\bar{v}}, \quad P = \frac{p}{\bar{p}}, \quad T = \frac{t - t_0}{t_h - t_0}.$$

Здесь h — длина стороны квадратной области, $\bar{\tau}, \bar{v}, \bar{p}$ — характерные время, скорость и давление, $t_h - t_0$ — характерная разность температур.

Характерное время вязкого затухания давление, время и скорость вычислим из уравнений $\nu \frac{\bar{\tau}}{h^2} = 1$, $\frac{1}{\rho} \frac{\bar{p}}{h} \frac{\bar{\tau}}{\bar{v}} = 1$, $\frac{\bar{v}\bar{\tau}}{h} = 1$. Имеем

$\bar{\tau} = \frac{h^2}{\nu}$, $\bar{v} = \frac{\nu}{h}$, $\bar{p} = \rho \frac{\nu^2}{h^2}$. Перепишем уравнение (1) в безразмерных переменных:

$$\frac{\partial V_x}{\partial \theta} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial Y^2}. \quad (5)$$

Уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial V_y}{\partial \theta} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial Y^2} + GrT, \quad (6)$$

где $Gr = \frac{h^3}{\nu^2} \beta g(t_h - t_0)$ – число Грасгофа. Ис-

ключим давление из уравнений (5) и (6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial V_y}{\partial X} - \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial X} - \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right) + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial X} - \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right) + Gr \frac{\partial T}{\partial X} \end{aligned}$$

Безразмерный вихрь обозначим

$$\Omega = \frac{\partial V_y}{\partial X} - \frac{\partial V_x}{\partial Y}, \text{ тогда}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} + Gr \frac{\partial T}{\partial X}, \quad (7)$$

Уравнение неразрывности (4) примет вид

$$\frac{\partial V_x}{\partial X} + \frac{\partial V_y}{\partial Y} = 0.$$

Чтобы оно удовлетворялось автоматически, введем функцию тока Ψ следующим образом: $V_x = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}$, $V_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial X}$. Получим

$$\Omega = \frac{\partial V_y}{\partial X} - \frac{\partial V_x}{\partial Y} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2}.$$

Перепишем уравнение (7) через функцию тока:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right) &= \frac{\partial^4 \Psi}{\partial X^4} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial X^2 \partial Y^2} + \\ &+ \frac{\partial^4 \Psi}{\partial Y^4} - Gr \frac{\partial T}{\partial X}. \end{aligned}$$

Введем переменную $\Phi = \frac{\Psi}{Gr}$ и получим

уравнение уже без числа Грасгофа

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} \right) &= \frac{\partial^4 \Phi}{\partial X^4} + \\ &+ \frac{\partial^4 \Phi}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial Y^4} - \frac{\partial T}{\partial X}. \end{aligned} \quad (8)$$

Обезразмеренное уравнение (3) примет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right), \quad (9)$$

где Pr – число Прандтля.

В начальный момент времени жидкость находилась в состоянии покоя и имела всюду одинаковую температуру t_0 , поэтому начальные условия для функции тока и температуры имеют вид:

$$\Phi(X, Y, 0) = 0, \quad (10)$$

$t(x, y, 0) = t_0$, следовательно

$$T(X, Y, 0) = \frac{t_0 - t_0}{t_h - t_0} = 0. \quad (11)$$

Поскольку температура левой стенки скачком изменяется до температуры t_h , а температура правой t_0 не изменяется, граничные условия на температуру имеют вид $t(0, y, \tau) = t_h$, $t(1, y, \tau) = t_0$, или

$$T(0, Y, \theta) = \frac{t_h - t_0}{t_h - t_0} = 1, T(1, Y, \theta) = \frac{t_0 - t_0}{t_h - t_0} = 0 \quad (12)$$

Условия непротекания и прилипания жидкости выражаются уравнениями

$$\begin{aligned} \Phi(0, Y, \theta) &= \Phi(1, Y, \theta) = \\ &= \Phi(X, 0, \theta) = \Phi(X, 1, \theta) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(0, Y, \theta)}{\partial X} &= \frac{\partial \Phi(1, Y, \theta)}{\partial X} = \\ &= \frac{\partial \Phi(X, 0, \theta)}{\partial Y} = \frac{\partial \Phi(X, 1, \theta)}{\partial Y} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

В переменных «вихрь-функция тока» исходная система (1)–(4) сводится к нестационарному уравнению теплопроводности (9) и нестационарному неоднородному бигармоническому уравнению (8) с начальными (10)–(11) и краевыми условиями (12)–(14).

Решение задачи

Несопряженный характер системы (8)–(14) позволяет последовательно решать тепловую – (9), (11), (12), и гидродинамическую – (8), (10), (13), (14) задачи.

Решение тепловой задачи известно

$$\begin{aligned} T(X, Y, \theta) &= 1 - X + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} \times \\ &\times \sin \left[(1 - X) \pi p \right] \exp \left(-\frac{\pi^2 p^2}{Pr} \theta \right). \end{aligned} \quad (15)$$

К системе (10), (12), (15), (16) применим интегральное синус-преобразование Фурье с конечными пределами [8] по переменной X :

$$\Phi_X = \mathcal{F}_X [\Phi(X, Y, \theta)] = \int_0^1 \Phi(X, Y, \theta) \sin(\lambda X) dX = \Phi_X(\lambda, Y, \theta) \quad (16)$$

где λ находится из характеристического уравнения $\sin(\lambda) = 0$.

Вычислим вначале $\frac{\partial T(X, \theta)}{\partial X}$:

$$\frac{\partial T(X, \theta)}{\partial X} = -1 - 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \cos[(1-X)\pi p] \times \exp(-\theta \frac{\pi^2 p^2}{Pr}).$$

Запишем уравнение (8) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \mathcal{F}_X \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \right] + \mathcal{F}_X \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} \right] \right\} = \mathcal{F}_X \left[\frac{\partial^4 \Phi}{\partial X^4} \right] + \mathcal{F}_X \left[2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial X^2 \partial Y^2} \right] + \mathcal{F}_X \left[\frac{\partial^4 \Phi}{\partial Y^4} \right] - \mathcal{F}_X \left[\frac{\partial T}{\partial X} \right]. \quad (17)$$

Идентифицируем преобразования в (17):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_X \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \right] &= \int_0^1 \frac{\partial^2 \Phi(X, Y, \theta)}{\partial X^2} \sin(\lambda X) dX = \\ &= -\lambda^2 \Phi_X; \\ \mathcal{F}_X \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} \right] &= \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \mathcal{F}_X [\Phi(X, Y, \theta)] = \frac{\partial^2 \Phi_X}{\partial Y^2}; \\ \mathcal{F}_X \left[\frac{\partial^4 \Phi}{\partial X^4} \right] &= \int_0^1 \frac{\partial^4 \Phi(X, Y, \theta)}{\partial X^4} \sin(\lambda X) dX = \\ &= -\lambda \cos \lambda \frac{\partial^2 \Phi(1, Y, \theta)}{\partial X^2} + \lambda \frac{\partial^2 \Phi(0, Y, \theta)}{\partial X^2} + \lambda^4 \Phi_X; \\ \mathcal{F}_X \left[2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial X^2 \partial Y^2} \right] &= 2 \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \mathcal{F}_X \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \right] = \\ &= -2\lambda^2 \frac{\partial^2 \Phi_X}{\partial Y^2}; \\ \mathcal{F}_X \left[\frac{\partial^4 \Phi}{\partial Y^4} \right] &= \frac{\partial^4}{\partial Y^4} \mathcal{F}_X [\Phi] = \frac{\partial^4 \Phi_X(\lambda, Y, \theta)}{\partial Y^4}; \\ T_X &= \mathcal{F}_X \left[\frac{\partial T}{\partial X} \right] = \\ &= \int_0^1 \left\{ -1 - 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \cos[(1-X)\pi p] \exp(-\theta \frac{\pi^2 p^2}{Pr}) \right\} \cdot \\ &\quad \cdot \sin(\lambda X) dX = \frac{1}{\lambda} (\cos \lambda - 1) - \\ &\quad - 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{\lambda [\cos \lambda - \cos(\pi p)]}{\pi^2 p^2 - \lambda^2} \exp(-\theta \frac{\pi^2 p^2}{Pr}). \end{aligned}$$

Обозначим через

$$A = \frac{\partial^2 \Phi(1, Y, \theta)}{\partial X^2}, \quad B(Y, \theta) = \frac{\partial^2 \Phi(0, Y, \theta)}{\partial X^2} \quad (18)$$

неизвестные функции, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[-\lambda^2 \Phi_X + \frac{\partial^2 \Phi_X}{\partial Y^2} \right] &= \\ &= \lambda \cos \lambda + A + \lambda B + \lambda^4 \Phi_X - \\ &\quad - 2\lambda^2 \frac{\partial^2 \Phi_X}{\partial Y^2} + \frac{\partial^4 \Phi_X}{\partial Y^4} - \frac{1}{\lambda} (\cos \lambda - 1) + \\ &\quad + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{\lambda [\cos \lambda - \cos(\pi p)]}{\pi^2 p^2 - \lambda^2} \exp[-\theta \frac{\pi^2 p^2}{Pr}], \\ \Phi_X(\lambda, Y, 0) &= 0, \\ \Phi_X(\lambda, 0, \theta) &= \Phi_X(\lambda, 1, \theta) = 0, \\ \frac{\partial \Phi_X(\lambda, 0, \theta)}{\partial Y} &= \frac{\partial \Phi_X(\lambda, 1, \theta)}{\partial Y} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Вычислим синус трансформанту по переменной Y

$$\Phi_{XY} = \mathcal{F}_Y [\Phi_X(\lambda, Y, \theta)] = \int_0^1 \Phi_X(\lambda, Y, \theta) \sin(\mu Y) dY = \Phi_{XY}(\lambda, \mu, \theta), \quad (20)$$

где μ находится из характеристического уравнения $\sin(\mu) = 0$. Тогда (19) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ -\lambda^2 \mathcal{F}_Y [\Phi_X] + \mathcal{F}_Y \left[\frac{\partial^2 \Phi_X}{\partial Y^2} \right] \right\} &= \\ &= -\lambda \cos \lambda \mathcal{F}_Y [A] + \lambda \mathcal{F}_Y [B] + \lambda^4 \mathcal{F}_Y [\Phi_X] - \\ &\quad - 2\lambda^2 \mathcal{F}_Y \left[\frac{\partial^2 \Phi_X}{\partial Y^2} \right] + \mathcal{F}_Y \left[\frac{\partial^4 \Phi_X}{\partial Y^4} \right] - \mathcal{F}_Y [T_X]. \end{aligned} \quad (21)$$

Идентифицируем преобразования в (21):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_Y \left[\frac{\partial^2 \Phi_X}{\partial Y^2} \right] &= \int_0^1 \frac{\partial^2 \Phi_X}{\partial Y^2} \sin(\mu Y) dY = -\mu^2 \Phi_{XY}; \\ \mathcal{F}_Y [A] &= A_Y(\mu, \theta); \quad \mathcal{F}_Y [B] = B_Y(\mu, \theta); \\ \mathcal{F}_Y \left[\frac{\partial^4 \Phi_X}{\partial Y^4} \right] &= \int_0^1 \frac{\partial^4 \Phi_X}{\partial Y^4} \sin(\mu Y) dY = \\ &= -\mu \cos \mu \frac{\partial^2 \Phi_X(\lambda, 1, \theta)}{\partial X^2} + \mu \frac{\partial^2 \Phi_X(\lambda, 0, \theta)}{\partial X^2} + \\ &\quad + \mu^4 \Phi_{XY}; \\ T_{XY} &= \mathcal{F}_Y \left\{ \mathcal{F}_X \left[\frac{\partial T}{\partial X} \right] \right\} = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\lambda} (\cos \lambda - 1) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{\lambda [\cos \lambda - \cos(\pi p)]}{\pi^2 p^2 - \lambda^2} \exp(-\theta \frac{\pi^2 p^2}{Pr}) \right\} \times \\ &\quad \times \sin(\mu Y) dY = \\ &= -2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{\lambda [\cos \lambda - \cos(\pi p)]}{\pi^2 p^2 - \lambda^2} \exp(-\theta \frac{\pi^2 p^2}{Pr}) \}. \end{aligned}$$

Обозначим через

$$C = \frac{\partial^2 \Phi_X(\lambda, 1, \theta)}{\partial Y^2}, D = \frac{\partial^2 \Phi_X(\lambda, 0, \theta)}{\partial Y^2} \quad (22)$$

неизвестные функции, тогда:

$$\frac{\partial \Phi_{XY}}{\partial \theta} + (\lambda^2 + \mu^2) \Phi_{XY} = \frac{1}{\lambda^2 + \mu^2} [\lambda \cos \lambda A_Y - \lambda B_Y + \mu \cos \mu C - \mu D] - T_{XY}, \quad (23)$$

$$\Phi_{XY}(\lambda, \mu, 0) = 0. \quad (24)$$

Решив уравнение (23) с начальным условием (24), получим для изображения:

$$\Phi_{XY} = \exp[-\theta(\lambda^2 + \mu^2)] \int_0^\theta \frac{1}{\lambda^2 + \mu^2} [\lambda \cos \lambda A_Y - \lambda B_Y + \mu \cos \mu C - \mu D - T_{XY} \exp[-z(\lambda^2 + \mu^2)]] dz. \quad (25)$$

Выражение для функции тока получим последовательным применением обратных преобразований Фурье:

$$\Phi(X, Y, \theta) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{XY}(\lambda_n, \mu_m, \theta) \times \sin(\lambda_n X) \sin(\mu_m Y), \quad (26)$$

где $\lambda_n = \pi n$ и $\mu_m = \pi m$.

В решение (26) входят интегралы от неизвестных функций (18) и (22), для вычисления которых предположим, что справедливо:

$$\begin{aligned} \int_0^\theta A_Y(\mu, z) \exp[z(\lambda^2 + \mu^2)] dz &= \\ &= \tilde{A}(\mu, \theta) \int_0^\theta \exp[z(\lambda^2 + \mu^2)] dz, \end{aligned} \quad (27)$$

При данном допущении, выражение для изображения примет вид

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda, \mu, \theta) &= \frac{\cos \mu - 1}{\mu(\lambda^2 + \mu^2)} \times \\ &\times \left[\frac{(\cos \lambda - 1) \{1 - \exp[-\theta(\lambda^2 + \mu^2)]\}}{\lambda(\lambda^2 + \mu^2)} + \right. \\ &+ 2 \operatorname{Pr} \lambda \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p [\cos \lambda - \cos(\pi p)] \times \\ &\times \left. \frac{\left\{ \exp(-\theta \frac{\pi^2 p^2}{\operatorname{Pr}}) - \exp[-\theta(\lambda^2 + \mu^2)] \right\}}{(\pi^2 p^2 - \lambda^2) [\pi^2 p^2 - \operatorname{Pr}(\lambda^2 + \mu^2)]} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

Интегралы типа (27) в каждый момент времени θ представляют собой постоянные и находятся путем решения системы линейных уравнений, полученной из граничного условия на частные производные функции (14):

Анализ результатов

На рисунках 2–5 изображены карты функции тока, компоненты скорости v_x и v_y , и поля скоростей для числа Прандтля $\operatorname{Pr}=1$ в разное время: а) $\theta=0.001$, б) $\theta=0.01$, в) $\theta=0.1$, г) $\theta=1$.

Рисунок 2. Карты функции тока

Figure 2. Flow function map

Рисунок 3. Карты компоненты скорости v_x

Figure 3. Velocity component v_x maps

Рисунок 4. Карты компоненты скорости v_y Figure 4. Velocity component v_y maps

Течение начинается возле нагретой стенки (рисунок 5 а) и распространяется к холодной (рисунок 5 б и в).

При переходе в стационарное состояние (рисунок 5 г) образуется единственный вихрь, закрученный по часовой стрелке с неподвижной точкой в центре области.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Терехов В.И., Экаид А.Л. Ламинарная свободная конвекция между вертикальными параллельными с различными температурами // Теплофизика и аэромеханика. 2012. Т. 19. № 4. С. 415–429.
- 2 Шеремет М.А. Ламинарные и турбулентные режимы сопряженной естественной конвекции в квадратной области // Вычислительная механика сплошных сред. 2012. Т. 5. № 3. С. 327–338.
- 3 Терехов В.И., Экаид А.Л. Трехмерная ламинарная конвекция внутри параллелепипеда с нагревом боковых стенок // Теплофизика высоких температур. 2011. Т. 49. № 6. С. 905–911.
- 4 Jani S., Mahmoodi M., Amini M., Jam J. Numerical investigation of natural convection heat transfer in a symmetrically cooled square cavity with a thin fin on its bottom wall // Thermal science. 2014. V. 18. № 4. P. 1119–1132.
- 5 Gros T., Revnic C., Pop I., Ingham D.B. Free convection heat transfer in a square cavity filled with a porous medium saturated by a nanofluid // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2015. V. 58. P. 36–41.
- 6 Рязских В.И., Попов М.И. О численном интегрировании нестационарного неоднородного бигармонического уравнения в задачах кондуктивной свободной конвекции // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2014. Т. 10. № 1. С. 56–62.
- 7 Устинов А.С., Савин И.К. Конвективный теплообмен при совместном действии вынужденной и свободной конвекции и изменяющихся во времени граничных условий на стенке // Вестник Международной академии холода. 2009. № 3. С. 8–10.

Рисунок 5. Поле скоростей

Figure 5. Field of velocities

Достоверность гипотезы о специальном виде интегральных коэффициентов подтверждается адекватностью физическому смыслу и согласованностью полученных результатов с представленным решением задачи [9].

REFERENCES

- 1 Terehov V.I., Ekaid A.L. Laminar free convection between vertical parallel plates with various temperatures. *Teplofizika i aeromehanika* [Thermal physics and air mechanics] 2012, vol. 19, no. 4, pp. 415–429. (in Russian).
- 2 Sheremet M.A. The laminar and turbulent modes of the conjugate free convection in square area. *Vysishlennaya mehanika sploshnykh sred* [Computing mechanics of continua] 2012, vol. 5, no. 3, pp. 327–338. (in Russian).
- 3 Terehov V.I., Ekaid A.L. Three-dimensional laminar convection in a parallelepiped with heating of sidewalls. *Teplofizika vysokih temperatur* [Thermal physics of high temperatures] 2011, vol. 49, no. 6, pp. 905–911. (in Russian).
- 4 Jani S., Mahmoodi M., Amini M., Jam J. Numerical investigation of natural convection heat transfer in a symmetrically cooled square cavity with thin fin on its bottom wall. *Thermal science*, 2014, vol. 18, no. 4, pp. 1119–1132.
- 5 Gros T., Revnic C., Pop I., Ingham D.B. Free convection heat transfer in a square cavity filled with a porous medium saturated by a nanofluid. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2015, vol. 58, pp. 36–41.
- 6 Ryzhskii V.I., Popov M.I. About a numerical integration of a nonstationary nonhomogeneous biharmonic equation in problems of conductive free convection. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo gosuniversiteta* [Bulletin of the Voronezh state technical university] 2014, vol. 10, no. 1, pp. 56–62. (in Russian).
- 7 Ustinov A. S., Savin I. K. Convective Heat Transfer in a joint dei tion forced and free convection and measurable sculpt in time the boundary conditions on the wall. *Vestnik Mezhdunarodnoj akademii holoda*. [Journal of the International Academy of Refrigeration]. 2009, no. 3, pp. 8–10. (in Russian).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Михаил И. Попов к.ф.-м.н., старший преподаватель, кафедра высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия, mihail_semilov@mail.ru

Елена А. Соболева к.ф.-м.н., доцент, кафедра высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия, sobol5661@mail.ru

КРИТЕРИЙ АВТОРСТВА

Михаил И. Попов постановка задачи, вывод уравнений, решение уравнений, анализ полученных результатов

Елена А. Соболева разработка алгоритма и проведение вычислительного эксперимента

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ПОСТУПИЛА 13.10.2016

ПРИНЯТА В ПЕЧАТЬ 18.11.2016

INFORMATION ABOUT AUTHORS

Mikhail I. Popov candidate of physics and mathematics science, senior lecturer, higher mathematics department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, Russia, mihail_semilov@mail.ru

Elena A. Soboleva candidate of physics and mathematics science, associate professor, higher mathematics department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, Russia, sobol5661@mail.ru

CONTRIBUTION

Mikhail I. Popov problem definition, derivation of the equations, solution of the equations, analysis of the received results

Elena A. Soboleva algorithm design and carrying out computing experiment

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare no conflict of interest.

RECEIVED 10.13.2016

ACCEPTED 11.18.2016