Оригинальная статья/Original article

УДК 532.516

DOI: http://doi.org/10.20914/2310-1202-2017-1-81-89

Об особенностях применения метода быстрых разложений при решении уравнений Навье–Стокса

Александр Д. Чернышов [1] chernyshovad@mail.ru
Сергей Ф. Кузнецов [1] sfs134@mail.ru
Марина В. Половинкина [1] polovinkina-marina@yandex.ru
Елена А. Соболева [1] sobol5661@yandex.ru
Ольга Ю. Никифорова [1] niki22@mail.ru

[1] кафедра высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, Россия, 394036

Реферат. Дано краткое изложение метода быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений. Установлены правила применения оператора быстрых разложений к решению дифференциальных уравнений. По методу быстрых разложений неизвестную функцию можно представить суммой граничной функции и ряда Фурье по синусам и косинусам. Специальная конструкция граничной функции обусловливает достаточно быструю сходимость рядов Фурье так, что для инженерных расчетов достаточно учитывать всего три первых члена. Метод применим как к линейным, так и нелинейным интегро-дифференциальным системам. При применении метода быстрых разложений к нелинейным уравнениям Навье–Стокса задача сводится к замкнутой системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой не представляет особых затруднений. К полученной системе дифференциальных уравнений можно повторно применить метод быстрых разложений и свести первоначальную задачу к системе алгебраических уравнений. Если задача *n*-мерная, то после *n*-кратного применения метода быстрых разложений получаем замкнутую алгебраическую систему. Это приводит к решению сложной краевой задачи в частных производных в аналитическом виде. Рассмотрено течение несжимаемой вязкой жидкости Навье–Стокса в криволинейной трубе. Задача сводится к решению замкнутой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями методом быстрых разложений. Рассмотрены особенности нахождения коэффициентов граничной функции и коэффициентов Фурье операторов быстрых разложений нулевого и первого порядков. Получение решения в аналитическом виде представляет большой интерес, так как позволяет проводить анализ и исследовать влияние различных факторов на свойства течения вязкой жидкости в конкретных случаях.

Ключевые слова: течение, уравнения Навье–Стокса, вязкая жидкость, граничные условия, быстрые разложения

About peculiarities of application of the method of fast expansions in the solution of the Navier-Stokes equations

Aleksandr D. Chernyshov [1] chernyshovad@mail.ru
Sergei F. Kuznetsov [1] sfs134@mail.ru
Marina V. Polovinkina [1] polovinkina-marina@yandex.ru
Elena A. Soboleva [1] sobol5661@yandex.ru
Ol’ga Yu. Nikiforova [1] niki22@mail.ru

[1] high mathematics department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, Russia, 394036

Summary. The brief presentation of the method of fast expansions is given to solve nonlinear differential equations. Application rules of the operator of fast expansions are specified for solving differential equations. According to the method of fast expansions, an unknown function can be represented as the sum of the boundary function and Fourier series sines and cosines. The special construction of the boundary functions leads to reasonably fast convergence of the Fourier series, so that for engineering calculations, it is sufficient to consider only the first three members. The method is applicable both to linear and nonlinear integro-differential systems. By means of applying the method of fast expansions to nonlinear Navier-Stokes equations the problem is reduced to a closed system of ordinary differential equations, which solution doesn't represent special difficulties. We can reapply the method of fast expansions to the resulting system of differential equations and reduce the original problem to a system of algebraic equations. If the problem is *n*-dimensional, then after *n*-fold application of the method of fast expansions we will derive a closed algebraic system. Finally, we obtain an analytic-form solution of complicated boundary value problem in partial derivatives. The flow of an incompressible viscous fluid of Navier–Stokes is considered in a curvilinear pipe. The problem is reduced to solving a closed system of ordinary differential equations with boundary conditions by the method of fast expansions. The article considers peculiarities of finding the coefficients of boundary functions and Fourier coefficients for the zero-order and first-order operators of fast expansions. Obtaining the analytic-form solution is of great interest, because it allows to analyze and to investigate the influence of various factors on the properties of the viscous fluid in specific cases.

Keywords: flow, Navier-Stokes equations, viscous fluid, boundary conditions, fast expantions

Для цитирования

Чернышов А. А., Кузнецов С. Ф., Половинкина М. В., Соболева Е. А., Никифорова О. Ю. Об особенностях применения метода быстрых разложений при решении уравнений Навье-Стокса // Вестник ВГУИТ. 2017. Т. 79. № 1. С 81–89. doi:10.20914/2310-1202-2017-1-81-89

For citation

Chernyshov A. D., Kuznetsov S. F., Polovinkina M. V., Soboleva E. A., Nikiforova O. Yu. About peculiarities of application of the method of fast expansions. *Vestnik VSUET* [Proceedings of VSUET]. 2017. Vol. 79. no 1 pp. 81–89 (in Russ.). doi:10.20914/2310-1202-2017-1-81-89

Введение

Математическая модель вязкой жидкости Навье–Стокса является нелинейной и поэтому одной из сложных. Получить решение подобных уравнений в аналитическом виде удается только в некоторых частных случаях. В данной работе такое решение получено при помощи нового метода – метода быстрых разложений.

Материалы и методы исследований

1. *Метод быстрых разложений.* Математическое обоснование метода изложено в [1]. Его необходимо дополнить следующими положениями.

Пусть $f(x) \in C^{(2)}(0 \le x \le a)$. Представим $f(x)$ равенством

$$f(x) = Ch_2(f(x)) = M_2(x) + \sum_{m=1}^{N} f_m \sin m\pi \frac{x}{a},$$
$$M_2 = A_1\left(1 - \frac{x}{a}\right) + A_2\frac{x}{a} + A_3\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) + \quad (1)$$
$$+A_4\left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right),$$

где N – число учитываемых членов в ряде Фурье. Величины $A_1 \div A_4$, f_m - коэффициенты быстрого разложения, вычисляемые по правилу:

$$A_1 = f(0), A_2 = f(a), A_3 = f''(0), A_4 = f''(a),$$
$$f_m = \frac{2}{a}\int_0^a \left(f(x) - M_2(x)\right)\sin m\pi \frac{x}{a}dx. \quad (2)$$

Правая часть в (1) для $f(x)$ называется оператором быстрых синус-разложений второго порядка Ch_2, состоящим из операций, указанных в (2). Оператор быстрых косинус-разложений третьего порядка Ch_3 при выполнении условия $f(x) \in C^{(3)}(0 \le x \le a)$ определяется выражениями:

$$f(x) = Ch_3(f(x)) = M_3(x) + f_0 +$$
$$+\sum_{m=1}^{N} f_m \cos m\pi \frac{x}{a},$$
$$M_3 = B_1\left(x - \frac{x^2}{2a}\right) + B_2\frac{x^2}{2a} + \quad (3)$$
$$+B_3\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24a} - \frac{ax^2}{6}\right) + B_4\left(\frac{x^4}{24a} - \frac{ax^2}{12}\right).$$

Коэффициенты косинус-разложения $B_1 \div B_4, f_0, f_m$ вычисляются по формулам:

$$B_1 = f'(0), B_2 = f'(a), B_3 = f'''(0),$$
$$B_4 = f'''(a),\ f_0 = \frac{1}{a}\int_0^a \left(f(x) - M_3(x)\right)dx, \quad (4)$$
$$f_m = \frac{2}{a}\int_0^a \left(f(x) - M_3(x)\right)\cos m\pi \frac{x}{a}dx.$$

Метод допускает использование операторов Ch_p с различными порядками $p \ge 0$, что зависит от порядка рассматриваемой дифференциальной системы. Операторы Ch_0 и Ch_1 нулевого и первого порядков также будут использоваться в данной работе. Они имеют вид:

$$f(x) = Ch_0(f(x)) = M_0(x) + \sum_{m=1}^{N} f_m \sin m\pi \frac{x}{a},$$
$$M_0 = A_1\left(1 - \frac{x}{a}\right) + A_2\frac{x}{a}, A_1 = f(0),\ A_2 = f(a), \quad (5)$$
$$f_m = \frac{2}{a}\int_0^a \left(f(x) - M_0(x)\right)\sin m\pi \frac{x}{a}dx.$$

$$f(x) = Ch_1(f(x)) = M_1(x) + f_0 +$$
$$+\sum_{m=1}^{N} f_m \cos m\pi \frac{x}{a},$$
$$M_1 = B_1\left(x - \frac{x^2}{2a}\right) + B_2\frac{x^2}{2a},\ B_1 = f'(0), \quad (6)$$
$$B_2 = f'(a),\ f_0 = \frac{1}{a}\int_0^a \left(f(x) - M_1(x)\right)dx,$$
$$f_m = \frac{2}{a}\int_0^a \left(f(x) - M_1(x)\right)\cos m\pi \frac{x}{a}dx.$$

Функции $M_p(x), p = 0,1,2....$ называются граничными, так как определяются значениями $f(x)$ и ее производными на границах отрезка $[0,a]$. Граничные функции имеют специальную конструкцию, которая и обеспечивает быструю сходимость используемых рядов Фурье. В работе [1] доказано, что в быстрых разложениях ряды Фурье по синусам и косинусам быстро сходятся во всей области, включая границу, вследствие чего число учитываемых членов N весьма незначительное и объем вычислительной работы на ЭВМ при построении решения будет небольшим. Кроме того, полученное приближенное решение будет справедливо не только внутри области Ω, но и на ее границе, что является существенным положительным качеством.

Если $f(x)$ неизвестная функция, то задача сводится к нахождению неизвестных коэффициентов $A_1 \div A_4$, f_m или $B_1 \div B_4, f_0, f_m$, $m = 1 \div N$ из некоторой алгебраической системы небольшого объема. При использовании быстрых разложений для решения дифференциальных систем надо учитывать следующие свойства оператора Ch_p:

$$\partial Ch_2 f / \partial x = Ch_1 f,\ \partial^2 Ch_2 f / \partial x^2 = Ch_0 f,$$
$$\partial Ch_3 f / \partial x = Ch_2 f,\ \partial^2 Ch_3 f / \partial x^2 = Ch_1 f,$$
$$\partial^3 Ch_3 f / \partial x^3 = Ch_0 f.$$

То есть, порядок производной понижает порядок p оператора Ch_p на такую же величину, интегрирование повышает этот порядок. Данное свойство оператора Ch_p надо учитывать при подстановке быстрого разложения в дифференциальное уравнение. Отсюда вытекают следующие два правила, используемые при рассмотрении некоторой дифференциальной задачи.

Правило 1. Если $f(x)$ представлена быстрым разложением оператором $Ch_m f(x)$ порядка m, то после подстановки данного разложения в дифференциальное уравнение n-го порядка к полученному уравнению после указанной подстановки следует применять оператор Ch_{m-n} порядка $(m-n)\ge 0$.

Правило 2. Пусть в дифференциальном уравнении некоторые два члена с неизвестными функциями представлены быстрыми разложениями порядков m_1 и m_2 и от них в данном дифференциальном уравнении вычисляются производные порядков n_1, n_2 соответственно и пусть $0\le m_1-n_1<m_2-n_2$. Тогда для нахождения неизвестных функций к данному дифференциальному уравнению следует применить оператор $Ch_{m_1-n_1}$, соответственный меньшей разности порядков m_1-n_1. Если в дифференциальном уравнении присутствуют более двух членов с неизвестными функциями в форме быстрых разложений, то поступают аналогично, определяя наименьшую разность порядков $0\le m_j-n_j$.

2. *Постановка задачи*. Границу области Ω криволинейной трубы зададим неравенствами:

$$\Omega=\{0\le x\le a, y_1(x)\le y\le y_2(x)\},$$
$$y_1(x)=b(1-\cos 2n_0\pi x/a), \tag{7}$$
$$y_2(x)=h+b(1-\cos 2n_0\pi x/a).$$

Параметры h,a,b,n_0 считаем заданными, n_0 - целое число. Параметры и уравнения нижней и верхней границ y_1, y_2 могут быть заданы и другими гладкими функциями, все последующие рассмотрения при этом останутся справедливыми. Слева и справа труба ограничена плоскостями $x=0,\ x=a$. Проекции скорости частиц вязкой жидкости обозначим через $(\nu U,\nu V)$. Сомножитель ν – кинематическая вязкость здесь добавлен для удобства дальнейших вычислений.

Граничные условия запишем в виде прилипания жидкости на верхней и нижней стенках плоской трубы

$$U\big|_{y=y_1(x)}=V\big|_{y=y_1(x)}=U\big|_{y=y_2(x)}=V\big|_{y=y_2(x)}=0. \tag{8}$$

На входе и выходе из трубы профили скоростей зададим по закону Пуазейля

$$V\big|_{x=0}=V\big|_{x=a}=0,\ U\big|_{x=0}=U\big|_{x=a}=q_0y(h-y). \tag{9}$$

Граничные условия (8) и (9) согласованы между собой в углах области Ω, что является важным обстоятельством при построении гладкого решения без разрывов. Для давления зададим условие только в одной точке из Ω, например, в левом нижнем углу плоской трубы

$$P(0,0)=P_0. \tag{10}$$

Запишем уравнения движени несжимаемой жидкости Навье-Стокса:

$$\begin{aligned} &U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{1}{\rho\nu^2}\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2},\\ &U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{1}{\rho\nu^2}\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.\end{aligned} \tag{11}$$

Перекрестным дифференцированием из (11) исключим давление P:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}\right)=\\ &=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right).\end{aligned} \tag{12}$$

К уравнению (12) добавим уравнение несжимаемости

$$\partial U/\partial x+\partial V/\partial y=0. \tag{13}$$

Получили систему двух уравнений (12), (13) с двумя неизвестными U, V.

Математически задачу поставим так: в классе непрерывных и гладких функций $(U,V)\in C^{(3)}(\Omega)$ найти решение системы дифференциальных уравнений (12), (13) с граничными условиями (8), (9). После нахождения U, V давление P определим из системы (11) с граничным условием (10).

3. *Построение решения методом быстрых разложений.* Анализируя уравнение (12), можно заметить, что здесь от U по переменной x берется старшая частная производная второго порядка, а от V третьего порядка. Поэтому компоненты скорости U,V представим быстрыми разложениями по переменной x на отрезке $0\le x\le a$ в виде

$$\begin{aligned} &U=Ch_2U=M_2+\sum_{m=1}^{N}u_m(y)\sin m\pi\frac{x}{a},\\ &V=Ch_3V=M_3+\upsilon_0(y)+\sum_{n=1}^{N}\upsilon_n(y)\cos n\pi\frac{x}{a}.\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &M_2=A_1\left(1-\frac{x}{a}\right)+A_2\frac{x}{a}+A_3\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3}\right)+\\ &\qquad+A_4\left(\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}\right),\\ &M_3=B_1\left(x-\frac{x^2}{2a}\right)+B_2\frac{x^2}{2a}+\\ &+B_3\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24a}-\frac{ax^2}{6}\right)+B_4\left(\frac{x^4}{24a}-\frac{ax^2}{12}\right).\end{aligned} \tag{15}$$

В дальнейшем будут использоваться следующие выражения для частных производных от U, V, представленных разложениями (14), (15):

$$U = A_1\left(1-\frac{x}{a}\right)+A_2\frac{x}{a}+A_3\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3}\right)+ +A_4\left(\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}\right)+\sum_{m=1}^{N}u_m\sin m\pi\frac{x}{a}\ ,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{A_2-A_1}{a}+A_3\left(x-\frac{x^2}{2a}-\frac{a}{3}\right)+ +A_4\left(\frac{x^2}{2a}-\frac{a}{6}\right)+\sum_{m=1}^{N}\frac{m\pi}{a}u_m\cos m\pi\frac{x}{a},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=A_1'\left(1-\frac{x}{a}\right)+A_2'\frac{x}{a}+A_3'\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3}\right)+ +A_4'\left(\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}\right)+\sum_{m=1}^{N}u_m'\sin m\pi\frac{x}{a}\ ,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{A_2'-A_1'}{a}+A_3'\left(x-\frac{x^2}{2a}-\frac{a}{3}\right)+A_4'\left(\frac{x^2}{2a}-\frac{a}{6}\right)+ +\sum_{m=1}^{N}\frac{m\pi}{a}u_m'\cos m\pi\frac{x}{a},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=A_3\left(1-\frac{x}{a}\right)+A_4\frac{x}{a}-\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2u_m\sin m\pi\frac{x}{a},$$

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^2\partial y}=A_3'\left(1-\frac{x}{a}\right)+A_4'\frac{x}{a}-\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2u_m'\sin m\pi\frac{x}{a},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=A_1''\left(1-\frac{x}{a}\right)+A_2''\frac{x}{a}+A_3''\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3}\right)+ +A_4''\left(\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}\right)+\sum_{m=1}^{N}u_m''\sin m\pi\frac{x}{a},$$

$$\frac{\partial^3 U}{\partial y^3}=A_1'''\left(1-\frac{x}{a}\right)+A_2'''\frac{x}{a}+A_3'''\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3}\right)+ +A_4'''\left(\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}\right)+\sum_{m=1}^{N}u_m'''\sin m\pi\frac{x}{a}.$$

$$V=B_1\left(x-\frac{x^2}{2a}\right)+B_2\frac{x^2}{2a}+B_3\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24a}-\frac{ax^2}{6}\right)+ +B_4\left(\frac{x^4}{24a}-\frac{ax^2}{12}\right)+\upsilon_0(y)+\sum_{n=1}^{N}\upsilon_n(y)\cos n\pi\frac{x}{a}\ ,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=B_1\left(1-\frac{x}{a}\right)+B_2\frac{x}{a}+B_3\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3}\right)+ +B_4\left(\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}\right)-\sum_{n=1}^{N}\frac{n\pi}{a}\upsilon_n\sin n\pi\frac{x}{a}\ ,$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=B_1'\left(x-\frac{x^2}{2a}\right)+B_2'\frac{x^2}{2a}+B_3'\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24a}-\frac{ax^2}{6}\right)+ +B_4'\left(\frac{x^4}{24a}-\frac{ax^2}{12}\right)+\upsilon_0'(y)+\sum_{n=1}^{N}\upsilon_n'(y)\cos n\pi\frac{x}{a}\ ,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{B_2-B_1}{a}+B_3\left(x-\frac{x^2}{2a}-\frac{a}{3}\right)+B_4\left(\frac{x^2}{2a}-\frac{a}{6}\right)- -\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2\pi^2}{a^2}\upsilon_n\cos n\pi\frac{x}{a}\ ,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}=B_1'\left(1-\frac{x}{a}\right)+B_2'\frac{x}{a}+B_3'\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3}\right)+ +B_4'\left(\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}\right)-\sum_{n=1}^{N}\frac{n\pi}{a}\upsilon_n'\sin n\pi\frac{x}{a}\ ,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y^2}=B_1''\left(1-\frac{x}{a}\right)+B_2''\frac{x}{a}+B_3''\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3}\right)+ +B_4''\left(\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}\right)-\sum_{n=1}^{N}\frac{n\pi}{a}\upsilon_n''\sin n\pi\frac{x}{a}\ ,$$

$$\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}=B_3\left(1-\frac{x}{a}\right)+B_4\frac{x}{a}+\sum_{n=1}^{N}\frac{n^3\pi^3}{a^3}\upsilon_n\sin n\pi\frac{x}{a}\ .$$

Задача сводится к нахождению $9+2N$ неизвестных функций, зависящих только от одной переменной y.

$$A_1(y)\div A_4(y)\,,\ B_1(y)\div B_4(y)\,, \quad u_m(y)\,,\ \upsilon_m(y)\,,\ \upsilon_0(y)\,,\ m=1\div N. \tag{16}$$

Для нахождения этих неизвестных подставим U, V из (14) в уравнения (12) и (13):

$$\left(\begin{array}{l} A_1'\left(1-\frac{x}{a}\right)+A_2'\frac{x}{a}+A_3'\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3}\right)+ \\ +A_4'\left(\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}\right)+\sum_{m=1}^{N}u_m'\sin m\pi\frac{x}{a} \end{array}\right)\times\left(\begin{array}{l} \frac{A_2-A_1}{a}+A_3\left(x-\frac{x^2}{2a}-\frac{a}{3}\right)+A_4\left(\frac{x^2}{2a}-\frac{a}{6}\right)+ \\ +\sum_{n=1}^{N}\frac{n\pi}{a}u_n\cos n\pi\frac{x}{a} \end{array}\right)+$$

$$+\left(\begin{array}{l} A_1\left(1-\frac{x}{a}\right)+A_2\frac{x}{a}+A_3\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3}\right)+ \\ +A_4\left(\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}\right)+\sum_{m=1}^{N}u_m\sin m\pi\frac{x}{a} \end{array}\right)\times\left(\begin{array}{l} \frac{A_2'-A_1'}{a}+A_3'\left(x-\frac{x^2}{2a}-\frac{a}{3}\right)+A_4'\left(\frac{x^2}{2a}-\frac{a}{6}\right)+ \\ +\sum_{n=1}^{N}\frac{n\pi}{a}u_n'\cos n\pi\frac{x}{a} \end{array}\right)+$$

$$+\left(\begin{array}{l} A_1'\left(1-\frac{x}{a}\right)+A_2'\frac{x}{a}+A_3'\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3}\right)+ \\ +A_4'\left(\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}\right)+\sum_{m=1}^{N}u_m'\sin m\pi\frac{x}{a} \end{array}\right)\times\left(\begin{array}{l} B_1'\left(x-\frac{x^2}{2a}\right)+B_2'\frac{x^2}{2a}+B_3'\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24a}-\frac{ax^2}{6}\right)+ \\ +B_4'\left(\frac{x^4}{24a}-\frac{ax^2}{12}\right)+\upsilon_0'+\sum_{n=1}^{N}\upsilon_n'\cos n\pi\frac{x}{a} \end{array}\right)+$$

$$+\left(\begin{array}{l}A_1''\left(1-\frac{x}{a}\right)+A_2''\frac{x}{a}+A_3''\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3}\right)+\\+A_4''\left(\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}\right)+\sum_{m=1}^{N}u_m''\sin m\pi\frac{x}{a}\end{array}\right)\times\left(\begin{array}{l}B_1\left(x-\frac{x^2}{2a}\right)+B_2\frac{x^2}{2a}+B_3\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24a}-\frac{ax^2}{6}\right)+\\+B_4\left(\frac{x^4}{24a}-\frac{ax^2}{12}\right)+\upsilon_0+\sum_{n=1}^{N}\upsilon_n\cos n\pi\frac{x}{a}\end{array}\right)-$$

$$-\left(\begin{array}{l}\frac{A_2-A_1}{a}+A_3\left(x-\frac{x^2}{2a}-\frac{a}{3}\right)+A_4\left(\frac{x^2}{2a}-\frac{a}{6}\right)+\\+\sum_{m=1}^{N}\frac{m\pi}{a}u_m\cos m\pi\frac{x}{a}\end{array}\right)\times\left(\begin{array}{l}B_1\left(1-\frac{x}{a}\right)+B_2\frac{x}{a}+B_3\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3}\right)+\\+B_4\left(\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}\right)-\sum_{n=1}^{N}\frac{n\pi}{a}\upsilon_n\sin n\pi\frac{x}{a}\end{array}\right)- \tag{17}$$

$$-\left(\begin{array}{l}A_1\left(1-\frac{x}{a}\right)+A_2\frac{x}{a}+A_3\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3}\right)+\\+A_4\left(\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}\right)+\sum_{m=1}^{N}u_m\sin m\pi\frac{x}{a}\end{array}\right)\times\left(\begin{array}{l}\frac{B_2-B_1}{a}+B_3\left(x-\frac{x^2}{2a}-\frac{a}{3}\right)+B_4\left(\frac{x^2}{2a}-\frac{a}{6}\right)-\\-\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2\pi^2}{a^2}\upsilon_n\cos n\pi\frac{x}{a}\end{array}\right)-$$

$$-\left(\begin{array}{l}B_1\left(1-\frac{x}{a}\right)+B_2\frac{x}{a}+B_3\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3}\right)+\\+B_4\left(\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}\right)-\sum_{n=1}^{N}\frac{n\pi}{a}\upsilon_n\sin n\pi\frac{x}{a}\end{array}\right)\times\left(\begin{array}{l}B_1'\left(x-\frac{x^2}{2a}\right)+B_2'\frac{x^2}{2a}+B_3'\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24a}-\frac{ax^2}{6}\right)+\\+B_4'\left(\frac{x^4}{24a}-\frac{ax^2}{12}\right)+\upsilon_0'+\sum_{n=1}^{N}\upsilon_n'\cos n\pi\frac{x}{a}\end{array}\right)-$$

$$-\left(\begin{array}{l}B_1\left(x-\frac{x^2}{2a}\right)+B_2\frac{x^2}{2a}+B_3\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24a}-\frac{ax^2}{6}\right)+\\+B_4\left(\frac{x^4}{24a}-\frac{ax^2}{12}\right)+\upsilon_0+\sum_{n=1}^{N}\upsilon_n\cos n\pi\frac{x}{a}\end{array}\right)\times\left(\begin{array}{l}B_1'\left(1-\frac{x}{a}\right)+B_2'\frac{x}{a}+B_3'\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3}\right)+\\+B_4'\left(\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}\right)-\sum_{n=1}^{N}\frac{n\pi}{a}\upsilon_n'\sin n\pi\frac{x}{a}\end{array}\right)=$$

$$=\left(A_3'\left(1-\frac{x}{a}\right)+A_4'\frac{x}{a}-\sum_{m=1}^{N}\frac{m^2\pi^2}{a^2}u_m'\sin m\pi\frac{x}{a}\right)+\left(\begin{array}{l}A_1'''\left(1-\frac{x}{a}\right)+A_2'''\frac{x}{a}+A_3'''\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3}\right)+\\+A_4'''\left(\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}\right)+\sum_{m=1}^{N}u_m'''\sin m\pi\frac{x}{a}\end{array}\right)-$$

$$-\left(B_3\left(1-\frac{x}{a}\right)+B_4\frac{x}{a}+\sum_{n=1}^{N}\frac{n^3\pi^3}{a^3}\upsilon_n\sin n\pi\frac{x}{a}\right)-\left(\begin{array}{l}B_1''\left(1-\frac{x}{a}\right)+B_2''\frac{x}{a}+B_3''\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3}\right)+\\+B_4''\left(\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}\right)-\sum_{n=1}^{N}\frac{n\pi}{a}\upsilon_n''\sin n\pi\frac{x}{a}\end{array}\right).$$

Зависимости U,V из (14) также подставим в уравнение (13):

$$\begin{gathered}\frac{A_2-A_1}{a}+A_3\left(x-\frac{x^2}{2a}-\frac{a}{3}\right)+A_4\left(\frac{x^2}{2a}-\frac{a}{6}\right)+\sum_{m=1}^{N}\frac{m\pi}{a}u_m\cos m\pi\frac{x}{a}+B_1'\left(x-\frac{x^2}{2a}\right)+B_2'\frac{x^2}{2a}+\\+B_3'\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24a}-\frac{ax^2}{6}\right)+B_4'\left(\frac{x^4}{24a}-\frac{ax^2}{12}\right)+\upsilon_0'+\sum_{n=1}^{N}\upsilon_n'\cos n\pi\frac{x}{a}=0.\end{gathered} \tag{18}$$

Теперь U,V из (14) подставим в граничные условия (9) и затем в (8):

$$A_1(y)=q_0y(h-y)\ ,\ A_2(y)=q_0y(h-y). \tag{19}$$

$$\begin{gathered}\upsilon_0(y)+\sum_{m=1}^{N}\upsilon_m(y)=0\ ,\\\frac{a}{2}\left(B_1(y)+B_2(y)\right)-\frac{a^3}{24}\left(B_3(y)+B_4(y)\right)+\upsilon_0(y)+\sum_{m=1}^{N}(-1)^m\upsilon_m(y)=0.\end{gathered} \tag{20}$$

$$
\begin{aligned}
&U\big|_{y=y_1(x)} = A_1(y_1)\left(1-\frac{x}{a}\right)+A_2(y_1)\frac{x}{a}+A_3(y_1)\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3}\right)+A_4(y_1)\left(\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}\right)+\\
&\qquad+\sum_{m=1}^{N}u_m(y_1)\sin m\pi\frac{x}{a}=0,\\
&V\big|_{y=y_1(x)} = B_1(y_1)\left(x-\frac{x^2}{2a}\right)+B_2(y_1)\frac{x^2}{2a}+B_3(y_1)\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24a}-\frac{ax^2}{6}\right)+B_4(y_1)\left(\frac{x^4}{24a}-\frac{ax^2}{12}\right)+\\
&\qquad+\upsilon_0(y_1)+\sum_{n=1}^{N}\upsilon_n(y_1)\cos n\pi\frac{x}{a}=0,\\
&U\big|_{y=y_2(x)} = A_1(y_2)\left(1-\frac{x}{a}\right)+A_2(y_2)\frac{x}{a}+A_3(y_2)\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{3}\right)+A_4(y_2)\left(\frac{x^3}{6a}-\frac{ax}{6}\right)+\\
&\qquad+\sum_{m=1}^{N}u_m(y_2)\sin m\pi\frac{x}{a}=0,\\
&V\big|_{y=y_2(x)} = B_1(y_2)\left(x-\frac{x^2}{2a}\right)+B_2(y_2)\frac{x^2}{2a}+B_3(y_2)\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24a}-\frac{ax^2}{6}\right)+B_4(y_2)\left(\frac{x^4}{24a}-\frac{ax^2}{12}\right)+\\
&\qquad+\upsilon_0(y_2)+\sum_{n=1}^{N}\upsilon_n(y_2)\cos n\pi\frac{x}{a}=0.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Неизвестная U определяется через оператор Ch_2 второго порядка, в уравнении (12) старшая производная по x тоже второго порядка, разность порядков $2-2=0$ равна нулю. Составляющая V выражается через оператор Ch_3 третьего порядка, в уравнении (12) старшая производная по x тоже третьего порядка, разность порядков $3-3=0$ равна нулю. Из правил 1 и 2 следует, что к уравнению (17) надо применить оператор Ch_0 нулевого порядка, который состоит из следующих операций:

1. Для нахождения первого коэффициента граничной функции оператора Ch_0 следует положить в (17) $x=0$:

$$
\begin{aligned}
&A_1'\left(\frac{A_2-A_1}{a}-\frac{a}{3}A_3-\frac{a}{6}A_4+\sum_{m=1}^{N}\frac{m\pi}{a}u_m\right)+\\
&+A_1\left(\frac{A_2'-A_1'}{a}-\frac{a}{3}A_3'-\frac{a}{6}A_4'+\sum_{m=1}^{N}\frac{m\pi}{a}u_m'\right)+\\
&+A_1'\left(\upsilon_0'+\sum_{n=1}^{N}\upsilon_n'\right)+A_1''\left(\upsilon_0+\sum_{m=1}^{N}\upsilon_m\right)-\\
&-B_1\left(\frac{A_2-A_1}{a}-\frac{a}{3}A_3-\frac{a}{6}A_4+\sum_{m=1}^{N}\frac{m\pi}{a}u_m\right)-\\
&-A_1\left(\frac{B_2-B_1}{a}-\frac{a}{3}B_3-\frac{a}{6}B_4-\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2\pi^2}{a^2}\upsilon_n\right)-\\
&-B_1\left(\upsilon_0'+\sum_{n=1}^{N}\upsilon_n'\right)-B_1'\left(\upsilon_0+\sum_{n=1}^{N}\upsilon_n\right)=\\
&=A_3'+A_1'''-B_3-B_1''.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

2. Для нахождения второго коэффициента граничной функции оператора Ch_0 положим в (17) $x=a$:

$$
\begin{aligned}
&(A_2'-B_2)\left(\begin{aligned}&\frac{A_2-A_1}{a}+\frac{a}{6}A_3+\frac{a}{3}A_4+\\&+\sum_{m=1}^{N}\frac{m\pi}{a}(-1)^m u_m\end{aligned}\right)+\\
&+A_2\left(\begin{aligned}&\frac{A_2'-A_1'}{a}+\frac{a}{6}A_3'+\frac{a}{3}A_4'+\\&+\sum_{m=1}^{N}\frac{m\pi}{a}(-1)^m u_m'\end{aligned}\right)+\\
&+(A_2'-B_2)\left(\begin{aligned}&\frac{a}{2}(B_1'+B_2')-\frac{a^3}{24}(B_3'+B_4')+\\&+\upsilon_0'+\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\upsilon_n'\end{aligned}\right)+\\
&+(A_2''-B_2')\left(\begin{aligned}&\frac{a}{2}(B_1+B_2)-\frac{a^3}{24}(B_3+B_4)+\\&+\upsilon_0+\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\upsilon_n\end{aligned}\right)-\\
&-A_2\left(\begin{aligned}&\frac{B_2-B_1}{a}+\frac{a}{6}B_3+\frac{a}{3}B_4-\\&-\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2\pi^2}{a^2}(-1)^n\upsilon_n\end{aligned}\right)=\\
&=A_4'+A_2'''-B_4-B_2''.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

3. Для нахождения коэффициентов Фурье оператора Ch_0 умножим левую и правую части уравнения (17) на $\sin p\pi x/a$ при $p=1\div N$ и проинтегрируем по $x\in[0,a]$.

Эта операция весьма трудоемкая, так как связана с вычислением около двухсот определенных интегралов с особенностями при $m = n,\ m + n = p,\ m - n = p,\ m - n = -p$. Поэтому для нахождения коэффициентов Фурье для уравнения (17) заменим процедуру, которая заключается в умножении (17) на $\sin p\pi x/a$ и интегрировании, на поточечный метод нахождения этих коэффициентов [2]. Для этого отрезок $[0, a]$ равномерно разбиваем на $N+1$ частей и получаем N внутренних точек с координатами

$$x = x_j = j\,a/(N+1),\ \ j = 1 \div N. \tag{24}$$

Крайние точки $x = 0$, $x = a$ не входят в число расчетных точек, так как они уже использованы при получении уравнений (21), (22). Теперь в левой части уравнения (17) последовательно положим $x = x_j$ из (23) и получим систему, которую формально запишем в виде

$$\{(17),\ x = x_j = j\,a/(N+1),\ \ j = 1 \div N\}. \tag{25}$$

Можно доказать, что в пределе при $N \to \infty$ коэффициенты Фурье, определенные интегральным и поточечным способами совпадают. Вычислительная трудоемкость при использовании поточечного метода существенно снижается, так как устраняется проблема вычисления сложных определенных интегралов. Полученная система (21) – (24) состоит из $2+N$ уравнений

Перейдем к рассмотрению уравнения (18). В (13), следствием которого является (18), первое слагаемое $\partial U/\partial x$ определяется оператором Ch_1 первого порядка, второе слагаемое $\partial V/\partial y$ – оператором Ch_3 третьего порядка. Из правил 1 и 2 следует, что к уравнению (18) надо применить оператор меньшего порядка из двух названных, т. е. Ch_1 первого порядка, который состоит из следующих операций:

1. Для нахождения первого и второго коэффициентов граничной функции оператора Ch_1 следует продифференцировать (18) по переменной x и положить в нем $x = 0$ и затем $x = a$:

$$A_3 + B_1' = 0\ \ ,\ \ A_4 + B_2' = 0. \tag{26}$$

2. Первое слагаемое в ряде Фурье перед тригонометрической суммой оператора Ch_1 определяется интегралом по $x \in [0, a]$

$$\begin{gathered}\frac{A_2 - A_1}{a}a + B_1'\frac{a^2}{3} + B_2'\frac{a^2}{6} - B_3'\frac{a^4}{45} - \\ -B_4'\frac{7x^4}{360} + \upsilon_0' a = 0.\end{gathered} \tag{27}$$

3. После подстановки разложений (14) в граничные условия (9) получим еще четыре уравнения

$$\begin{gathered}A_1 = A_2 = q_0 y(h-y),\ \ \upsilon_0(y) + \sum_{n=1}^{N}\upsilon_n(y) = 0,\\ B_1\frac{a}{2} + B_2\frac{a}{2} - B_3\frac{a^3}{24} - B_4\frac{a^3}{24} + \upsilon_0(y) + \\ + \sum_{n=1}^{N}\upsilon_n(y)(-1)^n = 0.\end{gathered} \tag{28}$$

4. Для нахождения коэффициентов Фурье оператора Ch_1 следует умножить левую и правую части уравнения (18) на $\cos p\pi x/a$ при $p = 1 \div N$ и проинтегрировать по $x \in [0, a]$

$$\begin{gathered}\frac{a^2}{p^2\pi^2}\left(A_4(-1)^p - A_3 - B_1' + B_2'(-1)^p\right) + \\ + \frac{p\pi}{2}u_p + \frac{a^4}{p^4\pi^4}\left(B_3' - B_4'(-1)^p\right) + \frac{1}{2}\upsilon_p' = 0.\end{gathered} \tag{29}$$

Дифференциальная система (19), (20), (22), (23), (25)–(29) замкнутая, состоит из $9 + 2N$ уравнений относительно такого же количества неизвестных, указанных в (16). Граничные условия для нее получим при помощи (21). К первому и третьему уравнению из (21) следует применить оператор второго порядка Ch_2, ко второму и четвертому – оператор третьего порядка Ch_3:

$$\begin{gathered}U\big|_{y=y_1(x),\,x=0} \Rightarrow A_1(0) = 0,\\ U\big|_{y=y_2(x),\,x=0} \Rightarrow A_1(h) = 0,\\ U\big|_{y=y_1(x),\,x=a} \Rightarrow A_1(0) = 0,\\ U\big|_{y=y_2(x),\,x=a} \Rightarrow A_1(h) = 0.\end{gathered}$$

Для нахождения решения задачи надо неизвестные коэффициенты $A_1 - A_4$, $B_1 - B_4$ представить быстрыми разложениями.

Результаты исследований

Задача о течении вязкой жидкости сводится к решению замкнутой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая может быть решена известными математическими программами. Получение решения в аналитическом виде представляет большой интерес, так как позволяет проводить анализ и исследовать влияние различных факторов на свойства течения вязкой жидкости в конкретных случаях.

Обсуждение результатов

Уравнения Навье–Стокса, описывающие движение вязкой жидкости, широко применяются для создания математических моделей при решении технических задач. Нахождение аналитического решения системы уравнений Навье–Стокса затруднительно из-за их нелинейности. Аналитические решения этих уравнений найдены лишь в некоторых частных случаях с простой геометрией или при существенных упрощениях. В других случаях применяется численное решение. В работе [3] получено аналитическое (в виде ряда Фурье) решение уравнения Навье–Стокса методом разделения переменных. В [4] приведен пример расчета ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в канале постоянной ширины численно-аналитический методом, основанном на неявной разностной схеме по времени для уравнений Навье–Стокса, который приводит к итерационному процессу. В [5] предложена процедура аналитического построения решений на основе первого интеграла уравнений и уравнения Риккати в частных производных применительно к двумерному случаю установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости. В работе [6] представлены некоторые точные решения для двух уравнений Навье–Стокса с нелинейными членами.

Предложенный метод быстрых разложений дает возможность расширить перечень известных решения уравнений Навье–Стокса и помочь в изучении связанных с ними вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1 Чернышов А.Д. Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 1. С. 13–24.

2 Чернышов А.Д., Горяйнов В.В. О способе нанесения расчетных точек на отрезок при реализации поточечного метода вычисления коэффициентов быстрых разложений для решения краевой задачи с условиями Дирихле // Вестник ВГУ. Серия: системный анализ и информационные технологии. 2012. № 2. С. 56–61.

3 Гермидер О.В., Попов В.Н. Течение вязкой жидкости или газа в канале прямоугольного сечения // Научные труды SWorld. 2015. Т. 21. № 1. С. 7–13.

4 Сумбатян М.А., Абрамов В.В. Полуаналитический метод расчета течения вязкой несжимаемой жидкости в канале постоянной ширины // Известия вузов. Сев. – Кавк. регион. Естественные науки. 2014. № 1. С. 42–46.

5 Коптев А.В. Метод построения решений уравнений Навье–Стокса // Известия РГПУ им. А.И. Герцена. 2013. № 154. С. 16–23.

6 Singh Raj K. Exact Solutions of Three-Dimensional Transient Navier –Stokes Equations // International Journal of Fluid Mechanics Research. 2013. V. 40. № 4. P. 281–311. DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.v40.i4.10

7 Rabinowitch A.S. On a particular analytical solution to the 3D Navier-Stokes equations and its peculiarity for high Reynolds numbers // The Journal of Mathematical Physics. 2015. V. 56. № 9. DOI: http://dx.doi.org/10.1063/1.4929845

REFERENCES

1 Chernyshov A.D. Method of fast expansions for solving nonlinear differential equations. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2014, vol.54, no. 1, pp. 13–24. (in Russian).

2 Chernyshov A.D., Goryainov V.V. On the method of application of design points in the segment at realization point-by-point method of computation of ratios of fast expansions for solving the boundary value problem with Dirichlet condition. *Vestnik VGU, Seriya: Sistemnyi analiz I informatsionnye tehnologii*. [Bulletin of VSU, Series: System analysis and information technologies], no. 2, pp. 56–61. (in Russian).

3 Germider O.V., Popov V.N. The flow of viscous fluid or gas in a channel of rectangular cross-section. *Nauchnye trudy SWorld* [Scientific proceeding SWorld], 2015, vol. 21, no. 1, pp. 7–13. (in Russian).

4 Sumbatyan M.A., Abramov V.V. Semi-analytical computing method of the flow of viscous incompressible fluid in a channel of constant width. *Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskii Region. Estestvennye nauki*. [University news North-Caucasian region. Natural sciences], 2014. no.1, pp. 42–46. (in Russian).

5 Koptev A.V. Method of building solution for Navier-Stokes equations. *Izvestia RGPU im. A.I. Herzena.* [Izvestia: Herzen University Journal of Humanities & Science], 2013, no. 154, pp.16–23. (in Russian).

6 Singh Raj K. Exact Solutions of Three-Dimensional Transient Navier – Stokes Equations. International Journal of Fluid Mechanics Research. 2013, vol. 40, issue 4, pp. 281–311. DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.v40.i4.10

7 Rabinowitch A.S. On a particular analytical solution to the 3D Navier-Stokes equations and its peculiarity for high Reynolds numbers. The Journal of Mathematical Physics. 2015, vol. 56, issue 9. DOI: http://dx.doi.org/10.1063/1.4929845.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Александр Д. Чернышов д.ф.-м.н., профессор, кафедра высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия, chernyshovad@mail.ru

Сергей Ф. Кузнецов к. ф.-м. н., доцент, кафедра высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия, sfs134@mail.ru

Марина В. Половинкина к. ф.-м. н., доцент, кафедра высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия, polovinkina-marina@yandex.ru

Елена А. Соболева к. ф.-м. н., доцент, кафедра высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия, sobol5661@yandex.ru

Ольга Ю. Никифорова старший преподаватель, кафедра высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия, niki22@mail.ru

INFORMATION ABOUT AUTHORS

Aleksandr D. Chernyshov doctor of physical-mathematical sciences, professor, high mathematics department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, Russia, chernyshovad@mail.ru

Sergei F. Kuznetsov candidate of physical-mathematical sciences, associate professor, high mathematics department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, Russia, sfs134@mail.ru

Marina V. Polovinkina physical-mathematical sciences, associate professor, high mathematics department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, Russia, polovinkina-marina@yandex.ru

Elena A. Soboleva physical-mathematical sciences, associate professor, high mathematics department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, Russia, sobol5661@yandex.ru

Ol'ga Yu. Nikiforova senior lecturer, high mathematics department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, Russia, niki22@mail.ru

КРИТЕРИЙ АВТОРСТВА

Александр Д. Чернышов предложил метод быстрых разложений для решения

Сергей Ф. Кузнецов написал рукопись, корректировал её до подачи в редакцию

Марина В. Половинкина обзор литературных источников по исследуемой проблеме

Елена А. Соболева консультации в ходе работы и несет ответственность за плагиат

Ольга Ю. Никифорова выполнение расчетов

CONTRIBUTION

Aleksandr D. Chernyshov proposed method of fast expansions for solving

Sergei F. Kuznetsov wrote the manuscript, correct it before filing in editing, conducted an experiment, performed computations

Marina V. Polovinkina review of the literature on an investigated problem

Elena A. Soboleva consultation during the study and is responsible for plagiarism

Ol'ga Yu. Nikiforova performed calculations

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ПОСТУПИЛА 02.09.2016

ПРИНЯТА В ПЕЧАТЬ 24.11.2016

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare no conflict of interest.

RECEIVED 9.2.2016

ACCEPTED 11.24.2016