

Информационные технологии, моделирование и управление

Оригинальная статья/Original article

УДК 637.072

DOI: <http://doi.org/10.20914/2310-1202-2016-4-61-66>

Математическая модель процесса гомогенизации молочных продуктов высокой жирности на основе цепи Маркова

Анатолий А. Хвостов	²	khvtol1974@yandex.ru
Виталий К. Битюков	¹	president@vsuet.ru
Мария А. Хвостова	³	marykhv.mk@gmail.com
Кирилл В. Полищук	¹	kirill.polishhuk@mail.ru

¹ кафедра информационных и управляющих систем, Воронеж. гос. ун-т. инж. техн., пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия

² кафедра математики, ВУНЦ ВВС ВВА, Старых Большевиков, 54 «А», г. Воронеж, 394064, Россия

³ лечебный факультет, Воронеж. гос. мед. ун-т им. Н.Н. Бурденко, Студенческая, 10, г. Воронеж, 394036, Россия

Реферат. В работе приводится способ синтеза математической модели процесса гомогенизации молочных продуктов. В основу математической модели положена цепь Маркова с дискретными состояниями и непрерывным параметром, за который принято давление гомогенизации. Для описания процессов слипания жировых шариков в ходе процесса гомогенизации при больших значениях процента жирности и давлениях гомогенизации предлагается использовать наряду с прямыми переходами обратные. Реализация модели осуществлена в среде структурного моделирования MathWorks Simulink™. Идентификация параметров модели осуществлялась путем минимизации среднеквадратичного отклонения расчетных данных от экспериментальных по каждой фракции жировой фазы молочных продуктов. В качестве набора экспериментальных данных были использованы результаты обработки микрофотоснимков распределения жировых шариков образцов цельного молока, которое подвергалось гомогенизации при разных давлениях. В качестве метода оптимизации был использован метод Pattern Search с алгоритмом поиска Latin Hypercube из библиотеки Global Optimization Toolbox. Погрешность расчетов по данным эксперимента составила в среднем по всем фракциям 3% (относительной доли фракции в объеме пробы). Дополнительное введение интенсивностей обратных переходов позволило снизить погрешность расчетов на 2-3%. Предложенная математическая модель позволяет рассчитать профиль объемного или массового распределения жировой фазы (жировых шариков) в продукте в зависимости от давления гомогенизации и может быть использована в лабораторных и научных исследованиях состава молочных продуктов, а также при расчетах, проектировании и моделировании технологического оборудования предприятий молочной промышленности.

Ключевые слова: гомогенизация, молоко, молочные продукты, контроль качества, сеть Маркова, Matlab

The mathematical model of the homogenization process of high-fat dairy products based on a Markov chain

Anatoly A. Khvostov	²	khvtol1974@yandex.ru
Vitaly K. Bityukov	¹	president@vsuet.ru
Mary A. Khvostova	³	marykhv.mk@gmail.com
Kirill V. Polyshyuk	¹	kirill.polishhuk@mail.ru

¹ Information & control system department, Voronezh State University of Engineering Technologies, Revolution Av., 19., Voronezh, 394036, Russia

² Department of Mathematics, MESCAF «N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy», Starykh Bolshevikov St., 54 A, Voronezh, 394064, Russia

³ Faculty of General Medicine, Voronezh State Medical University named after N.N. Burdenko, Studencheskaya St., 10, Voronezh, 394036, Russia

Summary. The paper presents a method for synthesizing of mathematical model of the process of dairy products homogenization. The basis of the mathematical model Markov's chain is with discrete and continuous states of the parameter for which the homogenisation pressure was taken. To describe the processes of adhesion of fat globules during homogenisation process for large percentage of fat and homogenization pressures it is proposed to use the reverse transitions along with the direct ones. Implementation of the model was performed in structural modeling environment MathWorks Simulink™. Identification of the model parameters was carried out by minimizing of the standard deviation of the calculated data from the experimental ones for each fraction of the fat phase of dairy products. As the set of experimental data the results of processing of microphotos of the fat globules distribution of whole milk samples were used. This milk was subjected to homogenization at different pressures. The method of optimization was Pattern Search method with the search algorithm Latin Hypercube from the Global Optimization Toolbox library. According to the experiment data the accuracy of calculations averaged over all fractions up to 3% (relative share of the fraction volume in the sample). The addition of the reverse transition intensities allowed to reduce the accuracy of calculations by 2-3%. The proposed mathematical model allows the calculation of the profile of the volume or mass distribution of the fat phase (fat globules) in the product, depending on the homogenization pressure and can be used in the laboratory and scientific researches of dairy products composition, as well as in the calculation, design and simulation of dairy industry technological equipment

Keywords: homogenization, milk, dairy products, quality control, Markov's chain, Matlab

Для цитирования

Хвостов А. А., Битюков В. К., Хвостова М. А., Полищук К. В. Математическая модель процесса гомогенизации молочных продуктов высокой жирности на основе цепи Маркова // Вестник ВГУИТ. 2016. № 4. С. 61–66. doi:10.20914/2310-1202-2016-4-61-66

For citation

Khvostov A. A., Bityukov V. K., Khvostova M. A., Polyshyuk K. V. The mathematical model of the homogenization process of high-fat dairy products, based on a Markov chain. *Vestnik VSUET* [Proceedings of VSUET]. 2016. no. 4. pp. 61–66. (in Russian). doi:10.20914/2310-1202-2016-4-61-66

Введение

Для замедления процессов отстаивания жира во время хранения молока и жидких молочных продуктов используются процессы гомогенизации. Под степенью гомогенизации обычно понимают средний размер жировых шариков, степень устойчивой во времени однородности (гомогенности) в смысле отсутствия микроконцентрационных неоднородностей, образующихся при смешивании взаимно-нерастворимых веществ [1]. Однако для более глубокого исследования дисперсности жировой фазы помимо интегральных характеристик используются распределения жировых шариков по их размерам, расстояния между шариками, площади поверхности и т. д. [2]. Особую актуальность исследования распределений жировых шариков по их размерам (массе) приобретают при анализе жидких молочных продуктов высокой жирности, в частности сливок. Так, размер жировых шариков в сливках оказывает существенное влияние на процесс маслообразования и степень использования жира [1]. При разработке нового технологического оборудования, а также режимов его работы возникает необходимость математического моделирования изменения функции распределения жировых шариков по размерам (массе) с изменением какого-либо технологического параметра [3].

В работах [4] предлагается подход к построению математической модели процесса гомогенизации молока как случайного процесса на основе аппарата цепей Маркова с дискретными состояниями и непрерывным параметром, за который принято давление гомогенизации. В основу модели положены следующие предположения. Под действием внешних факторов система может переходить из одного состояния в другое. Система принимает состояния, которые ассоциированы с количеством жировых шариков определенной массовой или объемной фракции. Множество состояний $X = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N\}, i = \overline{1, N}$, где x_i – числовой диапазон количества жировых шариков в i -ой фракции. При синтезе структуры модели, приняты следующие допущения: процесс гомогенизации носит последовательный характер; интенсивность перехода из одного состояния в другое отражает интенсивность процесса гомогенизации и характеризуется величиной $\lambda_{i,j}$, а скорость изменения вероятности обратного перехода равна нулю; процесс гомогенизации моделируется переходом из состояния X_i в x_j , где $j > i$, при этом интенсивностью переходов $\lambda_{j,i}$ пренебрегаем; состояние системы характеризуется вероятностью P_i , где $i = \overline{1, N}$, где N – количество фракций [4]. При принятых допущениях граф для шести состояний представлен на рисунке 1.

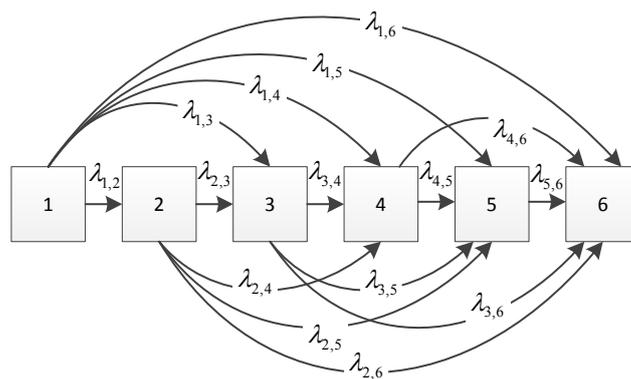


Рисунок 1. Граф состояний без учета обратных переходов

Figure 1. State graph without taking into account the reverse transitions

Однако по данным исследований, проводимых в ряде работ [2, 3], при увеличении жирности гомогенизируемого продукта возникают обратные гомогенизации эффекты коалесценции. В этом случае предлагаемая в [4] математическая модель процесса гомогенизации не будет учитывать обратные процессы слипания жировых шариков и не может применяться для описания гомогенизации молочных продуктов высокой жирности (например, сливок). При обработке экспериментальных данных по методике [5], построении соответствующих массовых распределений жировых шариков и использовании математической модели без учета процессов слипания жировых шариков, будет наблюдаться стремление к нулю интенсивностей переходов из фракций с высокой массой шариков во фракции с более низкой массой, начиная с некоторого значения давления и массы жировых шариков в объеме пробы. Это объясняется тем, что оцениваемая по модели без учета обратных переходов «кажущаяся» интенсивность перехода будет являться разницей интенсивностей прямого и обратного переходов. В ряде проведенных вычислительных экспериментов интенсивности прямых переходов принимали отрицательные значения, что обусловлено большей интенсивностью процессов слипания жировых шариков.

Теоретическая часть

Для учета возникающих в ходе гомогенизации механизмов коалесценции предлагается модифицировать предложенную в [4] модель учетом дополнительных переходов из фракций с меньшим размером жировых шариков во фракции с большим размером. Для этого необходимо ввести в математическую модель интенсивности обратных переходов, которые характеризуются величиной $\mu_{j,i}$. Соответствующий граф переходов для шести состояний и эффектом коалесценции, начиная с четвертого состояния, представлен на рисунке 2.

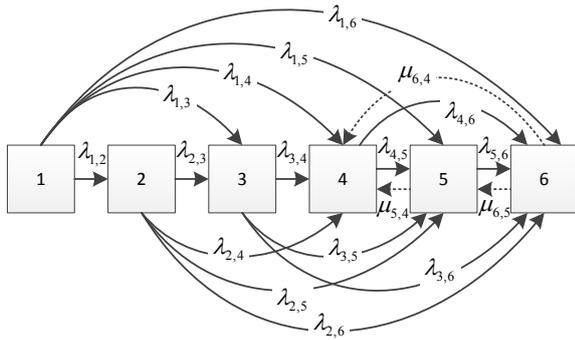


Рисунок 2. Граф состояний с учетом обратных переходов
Figure 2. State graph with taking into account the reverse transitions

В общем случае для N состояний система дифференциальных уравнений, описывающая вероятности P_n нахождения в каждом из состояний n (эквивалент количества жировых шариков во фракции) для графа состояний, представленного на рисунке 2, запишется как (2). В этой системе индекс M соответствует фракции, начиная с которой проявляются эффекты слипания жировых шариков. Начальные условия дифференциальных уравнений соответствуют массовому распределению жировых шариков негомогенизированного молочного продукта. На значения интенсивностей переходов накладываются ограничения, они не могут принимать отрицательные значения.

$$\begin{cases} \frac{dP_1(p)}{dp} = -(\lambda_{1,2} + \lambda_{1,3} + \dots + \lambda_{1,n} + \dots + \lambda_{1,N})P_1(p); \\ \frac{dP_2(p)}{dp} = \lambda_{1,2}P_1(p) - (\lambda_{2,3} + \lambda_{2,4} + \dots + \lambda_{2,n} + \dots + \lambda_{2,N})P_2(p); \\ \dots \\ \frac{dP_n(p)}{dp} = \lambda_{1,n}P_1(p) + \lambda_{2,n}P_2(p) + \dots + \lambda_{n-1,n}P_{n-1}(p) - (\lambda_{n,n+1} + \lambda_{n,n+2} + \dots + \lambda_{n,N})P_n(p); \\ \dots \\ \frac{dP_N(p)}{dp} = \lambda_{1,N}P_1(p) + \lambda_{2,N}P_2(p) + \dots + \lambda_{n,N}P_n(p) + \dots + \lambda_{N-1,N}P_{N-1}(p) - (\mu_{N,M} + \mu_{N,M+1} + \dots + \mu_{N,N-1})P_N(p); \\ P_1(0) = P_{1,0}, P_2(0) = P_{2,0}, \dots, P_n(0) = P_{n,0}, \dots, \\ P_N(0) = P_{N,0}; \\ \lambda_{i,j} \geq 0, \mu_{j,i} \geq 0, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (1)$$

Задаваясь матрицами интенсивностей прямых переходов λ элементами

$$[\lambda_{ij}] = \begin{bmatrix} -\sum_{k=2}^N \lambda_{1,k} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_{1,2} & -\sum_{k=3}^N \lambda_{2,k} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & \\ \lambda_{1,n} & \lambda_{2,n} & \dots & -\sum_{k=n}^N \lambda_{2,k} & \dots & 0 \\ & & \dots & & & \\ \lambda_{1,m} & \lambda_{2,m} & \dots & -\sum_{l=m}^N \lambda_{2,l} & \dots & 0 \\ & & \dots & & & \\ \lambda_{1,N} & \lambda_{2,N} & \dots & \lambda_{n,N} & & 0 \end{bmatrix},$$

обратных переходов μ и вектором вероятностей состояний \mathbf{P} с элементами

$$[\mu_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \mu_{m+1,m} & \dots & \mu_{N,m} \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$[P_i] = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_n \\ \dots \\ P_m \\ \dots \\ P_N \end{bmatrix}$$

в матричном виде система запишется в виде

$$\frac{d\mathbf{P}}{dp} = \lambda \cdot \mathbf{P} - \mu \cdot \mathbf{P}, \mathbf{P}|_{p=0} = \mathbf{P}_0. \quad (2)$$

Экспериментальная часть

В качестве экспериментальных данных использовались результаты, представленные в [2]. Цельное молоко 3,5% жирности гомогенизировалось на лабораторном гомогенизаторе фирмы APV в интервале изменения давления от 0 до 500 атмосфер через каждые 100 атмосфер. Температура гомогенизации 60 °С.

После гомогенизации молоко охлаждалось до 20 °С, после чего по известным методикам подготавливались образцы для оценки дисперсности жировых шариков с использованием микрофотографий [2]. Результаты исследований представлены на рисунке 3. Далее данные были нормированы для каждого значения давления гомогенизации из условия

$$\sum_{i=1}^N P(p_i) = 1, \quad (2)$$

где N – число фракций.

Для этого были введены дополнительно коэффициенты нормировки, на которые умножаются исходные значения долей фракции

для каждого распределения, полученного при заданном j -м давлении гомогенизации, что обеспечило выполнение равенства (3).

$$k_{норм,j} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N P(p_i)}, \quad j = \overline{1, J}, \quad (3)$$

где J – количество экспериментальных точек, соответствующих давлениям гомогенизации.

Результаты обработки и нормировки данных экспериментов представлены в таблице 1. Для дальнейших исследований для исходного образца цельного молока было принято значение давления гомогенизации, равное нулю.

Таблица 1.

Экспериментальные данные после нормировки

Table 1.

Experimental data after normalization

Давление, атм Pressure, atm	P1	P2	P3	P4	P5	P6
0	0,172	0,186	0,27	0,26	0,09	0,018
100	0	0,005	0,01	0,482	0,43	0,07
200	0	0,0039	0,009	0,145	0,57	0,27
300	0	0,0033	0,009	0,027	0,58	0,38
400	0	0	0	0,047	0,53	0,421
500	0	0	0	0	0,51	0,489

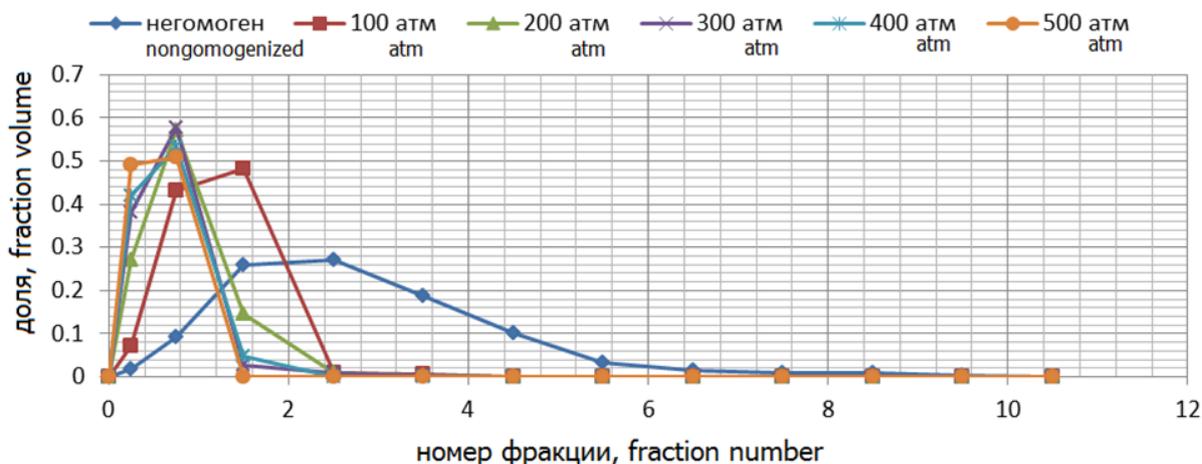


Рисунок 3. Массовые распределения жировых шариков в объеме пробы

Figure 3. Mass distribution of fat globules in probe

Математическое моделирование

Математическая модель процесса гомогенизации для случая 6-ти фракций описывается системой (5). При этом считается, что процесс слипания жировых шариков начинается с четвертой фракции. Выбор номера фракции, начиная с которой необходимо учитывать процесс слипания жировых шариков, можно осуществлять как из визуального анализа графиков экспериментальных

данных, так и при анализе результатов параметрической идентификации математической модели процесса гомогенизации без учета обратных переходов. Так, при оценке параметров модели (5) с интенсивностями переходов $\mu_{j,i}$, равными нулю, и при снятии ограничений $\lambda_{i,j} \geq 0$, были получены отрицательные интенсивности, начиная с четвертой фракции.

$$\begin{cases}
 \frac{dP_1(p)}{dp} = -\sum_{i=2}^6 \lambda_{1,i} P_i(p); \\
 \frac{dP_2(p)}{dp} = \lambda_{1,2} P_1(p) - \sum_{i=3}^6 \lambda_{2,i} P_i(p); \\
 \frac{dP_3(p)}{dp} = \sum_{i=1}^2 \lambda_{i,3} P_i(p) - \sum_{i=4}^6 \lambda_{3,i} P_i(p); \\
 \frac{dP_4(p)}{dp} = \sum_{i=1}^3 \lambda_{i,4} P_i(p) - \sum_{i=5}^6 \lambda_{4,i} P_i(p) + \\
 + \mu_{5,4} P_5(p) + \mu_{6,4} P_6(p); \\
 \frac{dP_5(p)}{dp} = \sum_{i=1}^4 \lambda_{i,5} P_i(p) - \lambda_{5,6} P_6(p) + \mu_{6,5} P_6(p); \\
 \frac{dP_6(p)}{dp} = \sum_{i=1}^5 \lambda_{i,6} P_i(p) - \mu_{6,5} P_6(p); \\
 P_1(0) = P_{1,0}, P_2(0) = P_{2,0}, P_3(0) = P_{3,0}, \\
 P_4(0) = P_{4,0}, P_5(0) = P_{5,0}, P_6(0) = P_{6,0}; \\
 \lambda_{i,j} \geq 0, \mu_{i,j} \geq 0.
 \end{cases} \quad (4)$$

Математическая модель реализована в интерактивной графической среде MathWorks Simulink™ [7].

Для численного поиска значений параметров минимизировалось среднеквадратичное отклонение расчетных данных от экспериментальных по каждой фракции:

$$S = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (P_j(p_i)^{эксн} - P_j(p_i)^{расч})^2 \xrightarrow{\lambda, \mu} \min, \quad (5)$$

где M, N – количество фракций и точек контроля при заданном давлении гомогенизации соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Dairy Processing Handbook. Lausanne: Tetrapak, 2015.
- 2 Казлаускайте Е., Вайткус В. Изучение дисперсности жировой фазы молока// Труды Литовского филиала всесоюзного научно-исследовательского института маслодельной и сыродельной промышленности. 1974. Т. IX. С. 117-122.
- 3 Нужин Е.В., Гладушняк А.К. Гомогенизация и гомогенизаторы. Одесса: Печатный дом, 2007.
- 4 Хвостов А.А., Журавлев А.А., Богер А.А., Шипилова Е.А. и др. Математическое моделирование процесса гомогенизации молочных продуктов с использованием цепей Маркова // Молочная промышленность. 2016. №8. С. 16-19.
- 5 Битюков В. К., Хвостов А. А., Ребриков Д.И., Мерзлякин В.Е. Автоматизация обработки микрофотографий молочных продуктов с использованием ImageJ и Statistica // Вестник ВГУИТ. 2014. № 4(62). С. 58-63.
- 6 Wendy L. Martinez A. R. Computational Statistics Handbook with MATLAB®. New York: Chapman & Hall/CRC, 2002.

Для минимизации критерия (6) использовался метод оптимизации Pattern Search с методом поиска Latin Hypercube из библиотеки Global Optimization Toolbox MathWorks™.

Результаты и выводы

Результаты математического моделирования распределений представлены на рисунке 4.

Анализ погрешностей расчета показал их снижение на 2–3% при введении в математическую модель учета обратных переходов. Это позволяет оценить режимы возникновения обратных эффектов и оценить эффективность дальнейшего увеличения давления на процесс гомогенизации.

Стоит отметить, что для молочных продуктов более высокой жирности учет обратных переходов приобретает большую актуальность.

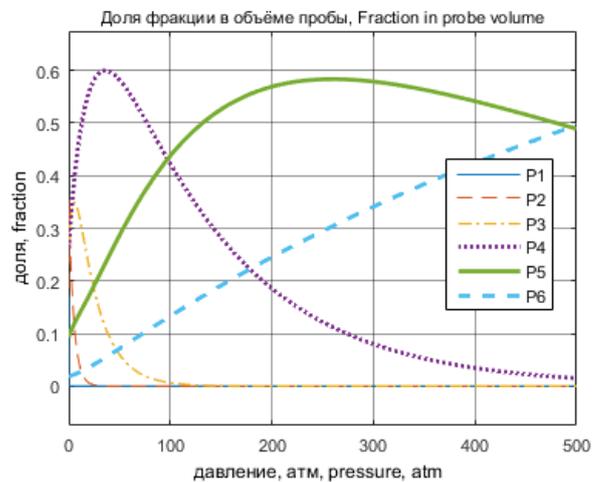


Рисунок 4. Результаты математического моделирования

Figure 4. Mathematical model results

REFERENCES

- 1 Dairy Processing Handbook. Lausanne, Switzerland, Tetrapak, 2015.
- 2 Kazlauskaitė E., Vaitkus V. Investigation of Milk Fat Dispersion. Trudy Litovskogo filiala vsesoyuznogo NII masloedel'noi promyshlennosti [Transactions of the Lithuanian branch of the All-Union Scientific Research Institute of the Butter and Cheese Industry] 1974, vol. IX, pp. 117-122. (in Russian)
- 3 Nuzhin E.V., Gladushnyak A.K. Gomogeni-zaciya i gomogenizatory [Homogenization and blenders] Odessa, Pechatnyj dom, 2007. (in Russian)
- 4 Khvostov A.A., Zhuravlev A.A., Boger A.A., Shipilova E.A. et al. Mathematical modeling of the dairy homogenization process using Markov's chain. *Molochnaya promyshlennost'* [Dairy Industry] 2016, no. 8, pp. 16-19. (in Russian)
- 5 Bityukov V. K., Khvostov A. A., Rebrikov D. I., Merzlykin V.E. Automation of processing of dairy products micrographs using ImageJ and Statistica. *Vestnik VGUIT* [Proceedings of VSUET] 2014, no. 4(62), pp. 58-63. (in Russian)
- 6 Wendy L., Martinez A. R. Computational Statistics Handbook with MATLAB®. New York, Chapman & Hall/CRC, 2002.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Анатолий А. Хвостов д.т.н., профессор, кафедра математики, ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», ул. Старых Большевиков, 54 «А», г. Воронеж, Россия, khvtol1974@yandex.ru

Виталий К. Битюков д.т.н., профессор, президент, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, Россия, president@vsuet.ru

Мария А. Хвостова студент, лечебный факультет, Воронежский государственный медицинский университет им. Н.Н. Бурденко, Студенческая, 10, г. Воронеж, 394036, Россия, marykhv.mk@gmail.com

Кирилл В. Полищук магистр, кафедра информационных и управляющих систем, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, Россия, kirill.polishhuk@mail.ru

КРИТЕРИЙ АВТОРСТВА

Анатолий А. Хвостов предложил методику проведения эксперимента и организовал производственные испытания

Виталий К. Битюков консультация в ходе исследования

Мария А. Хвостова обзор литературных источников по исследуемой проблеме, провёл эксперимент, выполнил расчёты

Кирилл В. Полищук написал рукопись, корректировал её до подачи в редакцию и несёт ответственность за плагиат

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ПОСТУПИЛА 10.10.2016

ПРИНЯТА В ПЕЧАТЬ 29.11.2016

INFORMATION ABOUT AUTHORS

Anatolii A. Khvostov doctor of technical sciences, professor, mathematic department, N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin air force academy, Starykh Bolshevikov St., 54 A, Voronezh, 394064, Russia, khvtol1974@yandex.ru

Vitalii K. Bitjukov doctor of technical sciences, professor, information and control system department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19, Voronezh, 394036, Russia, president@vsuet.ru

Mariya A. Khvostova student, faculty of general medicine, Voronezh state medical university named after N.N. Burdenko, Studencheskaya St., 10, Voronezh, 394036, Russia, marykhv.mk@gmail.com

Kirill V. Polishchuk master student, information and control system department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19, Voronezh, 394066, Russia, kirill.polishhuk@mail.ru

CONTRIBUTION

Anatolii A. Khvostov proposed a scheme of the experiment and organized production trials

Vitalii K. Bitjukov consultation during the study

Mariya A. Khvostova review of the literature on an investigated problem, conducted an experiment, performed computations

Kirill V. Polishchuk wrote the manuscript, correct it before filing in editing and is responsible for plagiarism

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare no conflict of interest.

RECEIVED 10.10.2016

ACCEPTED 11.29.2016