

Информационные технологии, моделирование и управление

Оригинальная статья/Original article

УДК 621.01

DOI: <http://doi.org/10.20914/2310-1202-2017-2-73-79>

Математическая модель кинематического расчета плоских рычажных механизмов

Максим А. Васечкин	¹	vmax77@mail.ru
Екатерина В. Матвеева	¹	katrin_vgta@mail.ru
Александр С. Сидоренко	²	sas1.vrn@mail.ru
Евгений Д. Чертов	¹	ched@vsuet.ru

¹ Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия

² Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военная воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», ул. Старых Большевиков, 54а, г. Воронеж, 394064, Россия

Реферат. На этапе проектирования плоских рычажных механизмов обязательно проводится кинематический расчет. Это операция очень трудоемка и содержит много вычислений. Поэтому является актуальным разработка математической модели в форме расчета кинематических характеристик любых плоских рычажных механизмов, имеющих в своем составе кроме начального звена хотя бы одну двухповодковую группу Ассур. В работе рассмотрены задачи построения математических процедур для групп Ассур пяти видов. В качестве исходных данных используются начальные координаты положения шарниров и кинематические характеристики ведущего звена. В ходе математического моделирования для исследуемой группы Ассур были записаны уравнения движения шарниров в проекциях на глобальные оси координат плоскости. Дважды продифференцировав уравнения движения были получены уравнения для определения скорости и ускорения шарниров в проекциях на глобальные оси координат. После ряда преобразований полученных уравнений в матричной форме записаны выражения для определения кинематических характеристик ведомых звеньев рассматриваемой группы Ассур. Получены математические процедуры для определения кинематических характеристик для каждой двухповодковой группы Ассур. При структурном анализе более сложного плоского механизма, состоящего из ведущего звена и нескольких двухповодковых групп Ассур, последовательно обращаясь к соответствующей процедуре можно определить кинематические характеристики всех звеньев исследуемого механизма. Для полученных математических процедур может быть легко разработано программное обеспечение в виде подключаемой библиотеки, что позволит ускорить выполнение расчетных работ при проектировании сложных плоских механизмов.

Ключевые слова: математическая модель, кинематический расчет, группы Ассур, аналог скорости, аналог ускорения

Mathematical model of kinematic calculation of flat lever mechanisms

Maxim A. Vasechkin	¹	vmax77@mail.ru
Ekaterina V. Matveyeva	¹	katrin_vgta@mail.ru
Alexandr S. Sidorenko	²	sas1.vrn@mail.ru
Yevgeny D. Chertov	¹	ched@vsuet.ru

¹ Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, 394036, Russia

² Russian Air Force Military Educational and Scientific Center "Air Force Academy named after Professor N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin", Starykh Bolshevikov St., 54a, Voronezh, Russia

Summary. Kinematic calculation is a mandatory part of the design of the flat lever mechanisms. This operation is very time-consuming and always need many calculations. Therefore, it is important to develop mathematical models for calculating the kinematic characteristics of the flat lever mechanisms, containing at least one double-leash Assur group. The article is devoted to mathematical modeling of five types of the Assur groups. The initial pin joint position and the driving ring kinematic characteristics used as an input for the further calculations. For the selected Assur group created the equation of motion in plane coordinates axis for the pin joints. With double differentiating the equations of motion were derived equations for determining velocity and acceleration of the pin joints in the global axes projections. The result of several transformations in matrix forms is the equations for the kinematic characteristics of the slave units in the selected Assur group. Finally, mathematical procedures for the kinematic characteristics of each double-leash Assur group were calculated. In a structural analysis of the complex planar mechanisms with a leading link and several double-leash Assur groups it is possible to determine the kinematic characteristics of all parts by consistently addressing the appropriate procedure. All suggested algorithms implemented as a software library that will speed up the designing of the complex planar mechanisms.

Keywords: mathematical model, kinematic calculation, Assur groups, analog of speed, analog of acceleration

Введение

На этапе проектирования плоских рычажных механизмов обязательно проводится кинематический расчет. Это операция очень трудоемка и содержит много вычислений. Поэтому является актуальным разработка математической модели

в форме процедур расчета кинематических характеристик любых плоских рычажных механизмов, имеющих в своем составе кроме начального звена хотя бы одну двухповодковую группу Ассур [1–3].

Для цитирования

Васечкин М.А., Матвеева Е.В., Сидоренко А.С., Чертов Е.Д. Математическая модель кинематического расчета плоских рычажных механизмов // Вестник ВГУИТ. 2017. Т. 79. № 2. С. 73–79. doi:10.20914/2310-1202-2017-2-73-79

For citation

Vasechkin M.A., Matveyeva E.V., Sidorenko A.S., Chertov Ye.D. Mathematical model of kinematic calculation of flat lever mechanisms. *Vestnik VGUIT* [Proceedings of VSUET]. 2017. vol. 79. no. 2. pp. 73–79. (in Russian). doi:10.20914/2310-1202-2017-2-73-79

Разработка математической модели

Рассмотрим группу Ассура первого вида.

Положения звеньев данной группы Ассура определим с помощью рисунка 1, в котором представлена схема группы в соответствующей системе координат; обозначения звеньев и кинематических пар [4, 5]. Назовем конфигурацию групп сборкой № 1 когда координата точки В в локальной системе координат $x_1O_1y_1$ $B_{y1} > 0$, в противном случае мы имеем сборку № 2. Известны координаты точек А, С в абсолютной системе координат, длины звеньев l_2 и l_3 и необходимо определить абсолютные координаты точки В, углы φ_2 и φ_3 . Расстояние АС определим по теореме Пифагора

$$AC = \sqrt{(C_x - A_x)^2 + (C_y - A_y)^2}.$$

Угол α определим по формуле

$$\alpha = \arctan\left(\frac{C_y - A_y}{C_x - A_x}\right),$$

а для определения локальных координат B_{x1} и B_{y1} , воспользуемся теоремой косинусов и теоремой Пифагора. Учитывая, что

$B_{x1} = l_2 \cos \angle BAC$, получаем

$$B_{x1} = \frac{l_2^2 + AC^2 - l_3^2}{2AC}; \quad B_{y1} = \sqrt{l_2^2 - B_{x1}^2}.$$

Здесь необходимо отметить, что если конфигурация группы Ассура соответствует сборке № 2, то $B_{y1} = -B_{y1}$. Теперь можно определить абсолютные координаты точки В, используя метод преобразования координат:

$$B_x = A_x + B_{x1} \cos \alpha - B_{y1} \sin \alpha;$$

$$B_y = A_y + B_{x1} \sin \alpha + B_{y1} \cos \alpha.$$

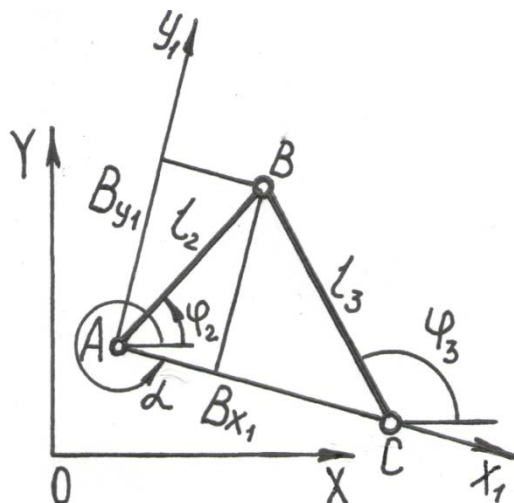


Рисунок 1. Расчетная схема группы Ассура первого вида
Figure 1. Settlement schemes of two flood groups of Assur first look

Затем определяем углы наклона звеньев $l_2, l_3 - \varphi_2$ и φ_3

$$\varphi_2 = \arctan\left(\frac{B_y - A_y}{B_x - A_x}\right);$$

$$\varphi_3 = \arctan\left(\frac{B_y - C_y}{B_x - C_x}\right).$$

Для определения аналогов скоростей воспользуемся методом замкнутых векторных контуров и напишем проекции векторного уравнения на координатные оси

$$\begin{aligned} A_x + l_2 \cos \varphi_2 &= C_x + l_3 \cos \varphi_3; \\ A_y + l_2 \sin \varphi_2 &= C_y + l_3 \sin \varphi_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Продифференцируем полученные уравнения по обобщенной координате φ_1 . Учитывая, что нам известны значения аналогов скоростей точек А и С ($V_{ax}, V_{ay}, V_{cx}, V_{cy}$), а также значения углов φ_2, φ_3 получим линейную систему двух уравнений

$$\begin{aligned} \omega_2 l_2 \sin \varphi_2 - \omega_3 l_3 \sin \varphi_3 &= V_{ax} - V_{cx}; \\ \omega_2 l_2 \cos \varphi_2 - \omega_3 l_3 \cos \varphi_3 &= V_{cy} - V_{ay}, \end{aligned} \quad (2)$$

где неизвестными являются аналоги скоростей ω_2, ω_3 . Решение данной системы линейных уравнений проведем методом Крамера. В этом случае представляем уравнения в виде

$$a_{11} \omega_2 + a_{12} \omega_3 = b_1, \quad a_{21} \omega_2 + a_{22} \omega_3 = b_2, \quad (3)$$

где коэффициентами $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ представлены следующие постоянные, известные нам по значениям, выражения:

$$a_{11} = -l_2 \sin \varphi_2; \quad a_{12} = l_3 \sin \varphi_3;$$

$$b_1 = V_{cx} - V_{ax}; \quad a_{21} = l_2 \cos \varphi_2;$$

$$a_{22} = -l_3 \cos \varphi_3; \quad b_2 = V_{cy} - V_{ay}.$$

Тогда

$$\omega_2 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \quad \omega_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \quad (4)$$

Для получения аналогов ускорений дважды продифференцируем уравнения (1) по φ_1 :

$$\begin{aligned} Aa_x - \omega_2^2 l_2 \cos \varphi_2 - \varepsilon_2 l_2 \sin \varphi_2 &= Ac_x \\ -\omega_3^2 l_3 \cos \varphi_3 - \varepsilon_3 l_3 \sin \varphi_3 &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Aa_y - \omega_2^2 l_2 \sin \varphi_2 - \varepsilon_2 l_2 \cos \varphi_2 &= Ac_y \\ -\omega_3^2 l_3 \sin \varphi_3 - \varepsilon_3 l_3 \cos \varphi_3 &= \end{aligned}$$

Преобразуем полученные выражения к виду (3)

$$a_{11}\varepsilon_2 + a_{12}\varepsilon_3 = b_1; \quad a_{21}\varepsilon_2 + a_{22}\varepsilon_3 = b_2,$$

где коэффициенты a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} сохраняют свои старые значения, а b_1 и b_2 определяются по следующим зависимостям:

$$b_1 = Ac_x - Aa_x + a_{21}\omega_2^2 + a_{22}\omega_3^2;$$

$$b_2 = Ac_y - Aa_y + a_{11}\omega_2^2 + a_{12}\omega_3^2.$$

В этом случае, аналоги ускорений ε_2 и ε_3 будут равны:

$$\varepsilon_2 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \quad \varepsilon_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \quad (5)$$

Рассмотрим группу Ассура второго вида.

Схема данной группы Ассура, координатная система и обозначения кинематических пар и звеньев представлены на рисунке 2 [5]. Вычислим координаты точки А в локальной системе координат X_1CY_1

$$\begin{aligned} C_x + A_{x1}\cos\varphi_3 - A_{y1}\sin\varphi_3 &= A_x; \\ C_y + A_{x1}\sin\varphi_3 - A_{y1}\cos\varphi_3 &= A_y. \end{aligned} \quad (6)$$

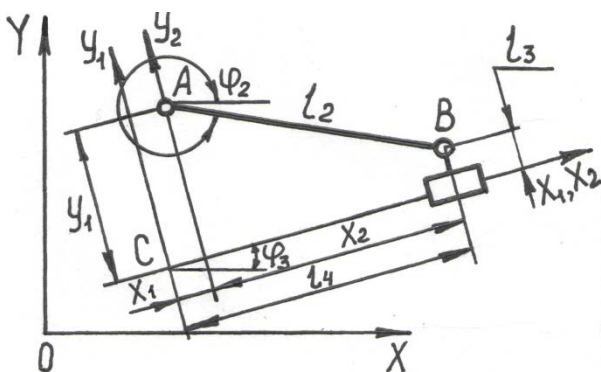


Рисунок 2. Расчетная схема группы Ассура второго вида
Figure 2. Settlement schemes of two flood groups of Assur second look

В выражении (6) нам известны абсолютные координаты точек А и С, а также угол наклона направляющей для поступательной пары группы – φ_3 . К числу неизвестных, подлежащих определению, относятся координаты точки А в локальной системе координат X_1CY_1 . Перенеся C_x и C_y в правую часть, получим линейную систему двух уравнений, решение которой представим в виде:

$$\begin{aligned} A_{x1} &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & -\sin\varphi_3 \\ b_2 & \cos\varphi_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3 \\ \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 \end{vmatrix}}; \\ A_{y1} &= \frac{\begin{vmatrix} \cos\varphi_3 & b_1 \\ \sin\varphi_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3 \\ \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 \end{vmatrix}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $b_1 = A_x - C_x$ и $b_2 = A_y - C_y$. Так как определители знаменателей в (7) равны 1, то значения неизвестных равны значениям определителей, расположенных в числителях

$$A_{x1} = b_1\cos\varphi_3 - b_2\sin\varphi_3;$$

$$A_{y1} = b_2\cos\varphi_3 - b_1\sin\varphi_3.$$

Далее определяем x_2 – проекцию звена 2 на направляющую

$$x_2 = \sqrt{l_2^2 - (A_{y1} - l_3)^2},$$

а затем и длину направляющей СВ

$$l_4 = A_{x1} + x_2.$$

Абсолютные координаты точки В и угол наклона звена l_2 определяем по следующим выражениям:

$$B_x = C_x + l_4\cos\varphi_3 - l_3\sin\varphi_3;$$

$$B_y = C_y + l_4\sin\varphi_3 - l_3\cos\varphi_3;$$

$$\varphi_2 = \arctan\left(\frac{B_y - A_y}{B_x - A_x}\right). \quad (8)$$

Для определения аналогов скоростей напомним проекции замкнутых векторных контуров на координатные оси X и Y

$$\begin{aligned} l_2\cos\varphi_2 - l_4\cos\varphi_2 &= C_x - A_x + l_3\sin\varphi_3; \\ l_2\sin\varphi_3 - l_4\sin\varphi_3 &= C_y - A_y + l_3\cos\varphi_3. \end{aligned} \quad (9)$$

Произведя дифференцирование данной системы уравнений по φ_1 и простейшие преобразования, получим линейную систем уравнений, в которой неизвестными являются ω_1 и V_4

$$\begin{aligned} -\omega_2 l_2 \sin\varphi_2 - V_4 \cos\varphi_3 &= V_{cx} \\ -V_{ax} - \omega_3 (l_3 \cos\varphi_3 + l_4 \sin\varphi_3); \\ \omega_2 l_2 \cos\varphi_2 - V_4 \sin\varphi_3 &= V_{cy} \\ -V_{ay} - \omega_3 (l_3 \sin\varphi_3 + l_4 \cos\varphi_3). \end{aligned} \quad (10)$$

Решение данной системы уравнений
получим в виде

$$\omega_2 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \quad V_4 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= -l_2 \sin \varphi_2; & a_{12} &= l_3 \sin \varphi_3; \\ b_1 &= V_{C_x} - V_{A_x} + \omega_3 (l_4 a_{22} + l_3 a_{12}); \end{aligned} \quad (12)$$

$$a_{21} = l_2 \cos \varphi_2; \quad a_{22} = -l_3 \cos \varphi_3;$$

$$b_2 = Vc_v - Va_v - \omega_3(l_4a_{22} - l_3a_{12}).$$

Дважды продифференцировав (9) и проводя небольшие преобразования, получим значения аналогов ускорений ε_2 и A_4

$$\varepsilon_2 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; A_4 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad (13)$$

где a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} определяются из (12), b_1 и b_2 вычислим следующим образом:

$$\begin{aligned} b_1 = & A c_x - A a_x - \omega_3^2 (l_4 \cos \varphi_3 - l_3 \sin \varphi_3) \\ & + \omega_2^2 l_2 \cos \varphi_2 - 2 V_4 \omega_3 \sin \varphi_3 \\ & - \varepsilon_3 (l_4 \sin \varphi_3 + l_3 \cos \varphi_3), \\ b_2 = & A c_y - A a_y - \omega_3^2 (l_4 \sin \varphi_3 - l_3 \cos \varphi_3) \\ & + \omega_2^2 l_2 \sin \varphi_2 - 2 V_4 \omega_3 \cos \varphi_3 \\ & - \varepsilon_3 (l_4 \cos \varphi_3 + l_3 \sin \varphi_3) \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим группу Ассура третьего вида.

Положения звеньев данной группы можно определить, воспользовавшись данными рисунка 3 [3, 5]. Длину активной части кулисы l_3 определим из выражения

$$l_3 = \sqrt{(A_x - C_x)^2 + (A_y - C_y)^2 - l_2^2}, \quad (15)$$

где координаты точек А и С и длина второго звена l_2 известны. Угол наклона кулисы φ_3 определим из выражения

$$\varphi_3 = \arctan\left(\frac{A_y - C_y}{A_v - C_v}\right) - \arctan\left(\frac{l_2}{l_3}\right). \quad (16)$$

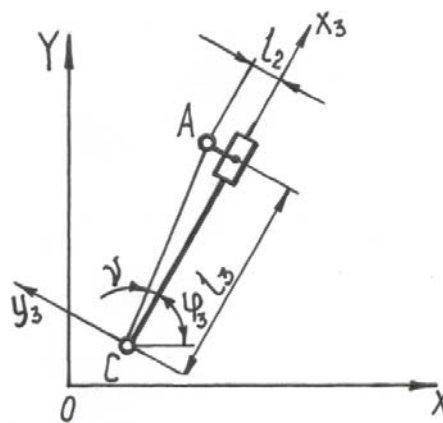


Рисунок 3. Расчетная схема группы Ассура третьего вида
Figure 3. Settlement schemes of two flood groups of Assur third look

Запишем проекции векторных уравнений замкнутых контуров на оси координат X , Y в следующем виде:

$$\begin{aligned} l_3 \cos \varphi_3 - l_2 \sin \varphi_3 &= A_x - C_x; \\ l_3 \sin \varphi_3 - l_2 \cos \varphi_3 &= A_y - C_y. \end{aligned} \quad (17)$$

Продифференцировав (17) по φ_1 , получим, после небольших преобразований, систему уравнений

$$a_{11}V_3 + a_{12}\omega_3 = b_1; a_{21}V_3 + a_{22}\omega_3 = b_2, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos\varphi_3; & b_1 &= Va_x - Vc_x; \\ a_{12} &= -(l_3 \sin\varphi_3 + l_2 \cos\varphi_3); \\ a_{21} &= \sin\varphi_3; & b_2 &= Va_y - Vc_y; \\ a_{22} &= l_3 \cos\varphi_3 - l_2 \sin\varphi_3. \end{aligned} \quad (19)$$

Следовательно, можно легко получить значения аналогов скоростей V_3 и ω_3 . После проведенных промежуточных преобразований, приходим к следующим выражениям для нахождения аналогов скоростей V_3 и ω_3 .

$$V_3 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \quad \omega_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \quad (20)$$

Продифференцировав дважды (17) по φ_1 и решив полученную систему уравнений, имеем:

$$A_3 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \varepsilon_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad (21)$$

где a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} определяются из (19), а b_1 и b_2 – по следующим выражениям:

$$\begin{aligned} b_1 &= Aa_x - Ac_x + 2V_3\omega_3a_{21} + a_{22}\omega_3^2; \\ b_2 &= Aa_y - Ac_y + 2V_3\omega_3a_{11} + a_{12}\omega_3^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Группа Ассура четвертого вида

Положения звеньев данной группы Ассура определим по рисунку 4, на котором приведены обозначения звеньев и кинематических пар [3, 5]. Запишем систему уравнений замкнутого контура в проекциях на координатные оси X, Y

$$\begin{aligned} A_x + l_1\cos\varphi_2 - l_2\sin\varphi_2 &= C_x + l_4\cos\varphi_3 - l_3\sin\varphi_3; \\ A_y + l_1\sin\varphi_2 + l_2\cos\varphi_2 &= C_y + l_4\sin\varphi_3 - l_3\cos\varphi_3. \end{aligned} \quad (23)$$

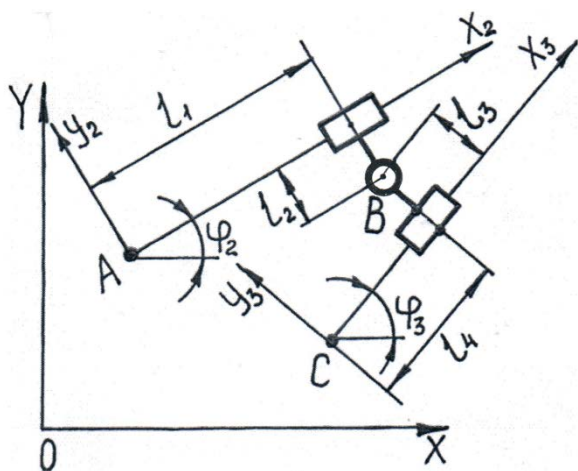


Рисунок 4. Расчетная схема группы Ассура четвертого вида

Figure 4. Settlement schemes of two flood groups of Assur fourth look

Неизвестными в данных выражениях являются l_1 и l_4 , а остальные данные передаются в процедуру и являются известными. Полученная система уравнений является линейной относительно неизвестных. Запишем решение этой системы в виде:

$$l_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \quad l_4 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad (24)$$

где коэффициенты a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} , b_1 , b_2 определяются по выражениям:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos\varphi_2; & a_{12} &= -\cos\varphi_3; \\ b_1 &= C_x - A_x + l_2a_{21} + l_3a_{22}; \\ a_{21} &= \sin\varphi_2; & a_{22} &= -\sin\varphi_3; \\ b_2 &= C_y - A_y - l_2a_{11} + l_3a_{12}. \end{aligned} \quad (25)$$

Продифференцировав систему уравнений (23) по φ_1 , получим после простых преобразований:

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \quad V_4 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad (26)$$

где a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} определяются из (25), а b_1 и b_2 – по выражениям:

$$\begin{aligned} b_1 &= Vc_x - Va_x + \omega_2(l_1a_{21} + l_2a_{11}) + \\ &\quad + \omega_3(l_4a_{22} + l_3a_{12}); \\ b_2 &= Vc_y - Va_y + \omega_2(l_1a_{11} + l_2a_{21}) + \\ &\quad + \omega_3(l_4a_{12} + l_3a_{22}). \end{aligned} \quad (27)$$

Дважды продифференцировав (23) по φ_1 , можно получить

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \quad A_4 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad (28)$$

где a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} определяются из (25), а b_1 и b_2 – по выражениям, которые после всех промежуточных преобразований имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} b_1 &= Ac_x - Aa_x + 2V_1\omega_2a_{21} + \\ &\quad + \omega_2^2(l_1a_{11} - l_1a_{21}) + \varepsilon_2(l_1a_{21} + l_2a_{11}) \\ b_1 &= b_1 + 2V_4\omega_3a_{22} + \\ &\quad + \omega_3^2(l_4a_{12} - l_3a_{22}) + \varepsilon_3(l_4a_{22} + l_3a_{12}) \\ b_2 &= Ac_y - Aa_y + 2V_1\omega_2a_{11} + \\ &\quad + \omega_2^2(l_1a_{21} - l_1a_{11}) + \varepsilon_2(l_1a_{11} + l_2a_{21}) \\ b_2 &= b_2 + 2V_4\omega_3a_{12} + \\ &\quad + \omega_3^2(l_4a_{22} - l_3a_{12}) + \varepsilon_3(l_4a_{12} + l_3a_{22}) \end{aligned} \quad (29)$$

Группа Ассура пятого вида

Положения звеньев определим с помощью рисунка 5, где приведена схема группы, обозначения звеньев и кинематических пар и система координат [3–10]. Напишем проекции замкнутого векторного контура на координатные оси X, Y

$$\begin{aligned} A_x &= C_x + Bx_3\cos\varphi_3 + Ax_2\cos(\varphi_3 + \alpha) - \\ &\quad - l_2\sin(\varphi_3 + \alpha); \\ A_y &= C_y + By_3\sin\varphi_3 + Ay_2\sin(\varphi_3 + \alpha) - \\ &\quad - l_2\cos(\varphi_3 + \alpha). \end{aligned} \quad (30)$$

Выражения (30) легко приводятся к линейной системе двух уравнений, решение которых мы проведем по правилу Крамера

$$Bx_3 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \quad Ax_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}, \quad (31)$$

где коэффициенты a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} , b_1 и b_2 определяются по следующим зависимостям:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos\varphi_3; & a_{12} &= \cos(\varphi_3 + \alpha); \\ a_{21} &= \sin\varphi_3; & a_{22} &= \sin(\varphi_3 + \alpha); \\ b_1 &= A_x - C_x + l_2 a_{22}; \\ b_2 &= A_y - C_y + l_2 a_{12}. \end{aligned} \quad (32)$$

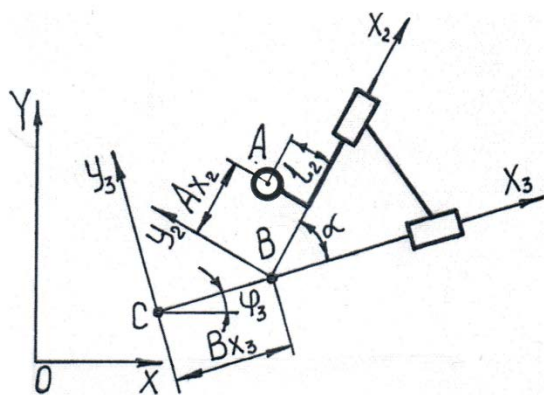


Рисунок 5. Расчетная схема группы Ассура пятого вида

Figure 5. Settlement schemes of two flood groups of Assur fifth look

Продифференцировав выражения (30) по φ_1 , получим выражения для определения аналогов скоростей Vb_{x3} и Va_{x2}

$$Vb_{x3} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \quad Va_{x2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}, \quad (33)$$

где a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} определяются из (30), а b_1 и b_2 – по выражениям:

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Ковалёв М.Д. О структурных группах Ассура // Теория механизмов и машин. 2006. Т. 4. № 1. С. 18–26.
- 2 Александров В.В., Александрова О.В., Буднинский М.А., Сидоренко Г.Ю. Об экстремальных кинематического управления движением // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2013. № 3. С. 38–46.
- 3 Кирсанов М.Н. Уравнения кинематики плоского механизма в координатной форме // Теория механизмов и машин. 2011. Т. 9. № 2. С. 85–89.
- 4 Верховод В.П. Изучение кинематической геометрии плоских механизмов в системе GeoGebra // Теория механизмов и машин. 2012. Т. 10. № 2. С. 54–65.

$$\begin{aligned} b_1 &= Va_x - Vc_x \\ &+ \omega_3 (B_{x3} a_{21} + A_{x2} a_{22} + l_2 a_{12}); \\ b_2 &= Va_y - Vc_y \\ &+ \omega_3 (B_{x3} a_{11} + A_{x2} a_{12} + l_2 a_{22}). \end{aligned} \quad (34)$$

Дважды продифференцировав выражения (30) по φ_1 получаем выражения для определения аналогов ускорений Ab_{x3} и Aa_{x2}

$$Ab_{x3} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \quad Aa_{x3} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}, \quad (35)$$

где a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} определяются из (32), а b_1 и b_2 – по выражениям:

$$\begin{aligned} b_1 &= Aa_x - Ac_x \\ &+ 2\omega_3 (Vb_{x3} a_{21} + Va_{x2} a_{22}) \\ &+ \omega_3^2 (B_{x3} a_{11} + A_{x2} a_{12} - l_2 a_{22}) \\ &- \varepsilon_3 (B_{x3} a_{21} + A_{x2} a_{22} + l_2 a_{12}); \\ b_2 &= Aa_y - Ac_y \\ &- 2\omega_3 (Vb_{x3} a_{11} + Va_{x2} a_{12}) \\ &+ \omega_3^2 (B_{x3} a_{21} + A_{x2} a_{22} - l_2 a_{12}) \\ &- \varepsilon_3 (B_{x3} a_{11} + A_{x2} a_{12} - l_2 a_{22}). \end{aligned} \quad (36)$$

Получена математическая модель в форме математических процедур расчета кинематических характеристик любых групп Ассура второго класса. Осуществлена программная реализация математической модели кинематического расчета.

Заключение

Полученная математическая модель может быть использована при изучении дисциплин: «Теория машин и механизмов», «Теория механизмов и основы робототехники», «Вычислительная механика» для подготовки бакалавров по направлениям 15.03.02 «Технологические машины и оборудование» и 15.03.03 «Прикладная механика».

5 Сидоренко А.С., Дубец С.В., Дубец А.В., памяти Ю.А. Компьютерное моделирование и анализ кинематики механизмов второго класса // Молодежные чтения памяти Ю.А. Гагарина: мат. Межвузовск. науч.-практ. конф.. 2014. С. 154–157.

6 Li S., Dai J. S. Structure synthesis of single-driven metamorphic mechanisms based on the augmented assur groups // Journal of Mechanisms and Robotics. 2012. Т. 4. №. 3. С. 031004.

7 Quintero H. и др. A novel graphical and analytical method for the kinematic analysis of fourth class Assur groups // Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia. 2011. №. 60. С. 81-91.

8 Rojas N., Thomas F. Distance-based position analysis of the three seven-link Assur kinematic chains // *Mechanism and Machine Theory*. 2011. Т. 46. № 2. С. 112-126.

9 Sun Y. и др. Solving the Kinematics of the Planar Mechanism Using Data Structures of Assur Groups // *Journal of Mechanisms and Robotics*. 2016. Т. 8. № 6. С. 061002.

10 Rojas N., Thomas F. Formulating Assur kinematic chains as projective extensions of Baranov trusses // *Mechanism and Machine Theory*. 2012. Т. 56. С. 16-27.

11 Пекарев В.И., Матвеев А.А. Математическая модель винтового маслозаполненного компрессора с впрыскиванием жидкого рабочего вещества // *Вестник Международной академии холода*. 2013. № 3. С. 11–13.

REFERENCES

1 Kovalev M.D. Structural Assur groups. *Teoriya mekhanizmov i mashin* [Theory of mechanisms and machines]. 2006. vol. 4. no. 1. pp. 18–26. (in Russian).

2 Aleksandrov V.V., Aleksandrova O.V., Budninskii M.A., Sidorenko G.Yu. On the extremals for the kinematic motion control. *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Proceedings of Moscow University. Mathematical Mechanics]. 2013. no. 3. pp. 38–46. (in Russian).

3 Kirsanov M.N. Equations of kinematics of a planar mechanism in a coordinate form. *Teoriya mekhanizmov i mashin* [Theory of mechanisms and machines]. 2011. vol. 9. no. 2. pp. 85–89. (in Russian).

4 Verkhovod V.P. Studying the kinematic geometry of planar mechanisms in the system GeoGebra. *Teoriya mekhanizmov i mashin* [Theory of mechanisms and machines]. 2012. vol. 10. no. 2. pp. 54–65. (in Russian).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Максим А. Васечкин к.т.н., доцент, кафедра технической механики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия, vmax77@mail.ru

Екатерина В. Матвеева к.т.н., доцент, кафедра технической механики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия, katin_vgta@mail.ru

Александр С. Сидоренко к.т.н., старший преподаватель, кафедра общепрофессиональных дисциплин, Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военная воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», ул. Старых Большевиков, 54а, г. Воронеж, 394064, Россия, sas1.vrn@mail.ru

Евгений Д. Чертов д.т.н., профессор, кафедра технической механики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия, ched@vsuet.ru

КРИТЕРИЙ АВТОРСТВА

Все авторы в равной степени принимали участие в написании рукописи и несут ответственность за плагиат

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ПОСТУПИЛА 07.04.2017

ПРИНЯТА В ПЕЧАТЬ 12.05.2017

5 Sidorenko A.S., Dubets S.V., Dubets A.V., pamyati Yu.A. Computer simulation and analysis of kinematic mechanisms of the second class. *Molodezhnye chteniya pamyati Yu.A. Gagarina: mat. Mezhvuzovsk. nauch.-prakt. konf. [Youth readings in memory of Yuri Gagarin: Mat. Mezhvuzovski. scientific.-pract. Conf.]*. 2014. pp. 154–157. (in Russian).

6 Li S., Dai J. S. Structure synthesis of single-driven metamorphic mechanisms based on the augmented assur groups. *Journal of Mechanisms and Robotics*. 2012. vol. 4. no. 3. pp. 031004.

7 Quintero H. et al. A novel graphical and analytical method for the kinematic analysis of fourth class Assur groups. *Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia*. 2011. no. 60. pp. 81–91.

8 Rojas N., Thomas F. Distance-based position analysis of the three seven-link Assur kinematic chains. *Mechanism and Machine Theory*. 2011. vol. 46. no. 2. pp. 112–126.

9 Sun Y. et al. Solving the Kinematics of the Planar Mechanism Using Data Structures of Assur Groups. *Journal of Mechanisms and Robotics*. 2016. vol. 8. no. 6. pp. 061002.

10 Rojas N., Thomas F. Formulating Assur kinematic chains as projective extensions of Baranov trusses. *Mechanism and Machine Theory*. 2012. vol. 56. pp. 16–27

11 Pekarev V.I., Matveev A.A. Mathematical model of oil flooded screw compressor with injection of liquid working substance. *Vestnik Mezhunarodnoi akademii kholoda* [Bulletin of the International Academy of refrigeration]. 2013. no. 3. pp. 11–13. (in Russian).

INFORMATION ABOUT AUTHORS

Maxim A. Vasechkin candidate of technical sciences, assistant professor, technical mechanics department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, 394036, Russia, vmax77@mail.ru

Ekaterina V. Matveyeva candidate of technical sciences, assistant professor, technical mechanics department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, 394036, Russia, katin_vgta@mail.ru

Alexandr S. Sidorenko candidate of technical sciences, senior lecturer, all-professional disciplines department, Russian Air Force Military Educational and Scientific Center “Air Force Academy named after Professor N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin”, Starykh Bolshevikov St., 54a, Voronezh, Russia, sas1.vrn@mail.ru

Yevgeny D. Chertov doctor of technical sciences, professor, technical mechanics department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, 394036, Russia, ched@vsuet.ru

CONTRIBUTION

All authors equally took part in writing the manuscript and are responsible for plagiarism

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare no conflict of interest.

RECEIVED 4.7.2017

ACCEPTED 5.12.2017