УДК 637.1/3.(045)

Аспирант А.С. Бредихин, д.т.н. В.В. Червецов
(ГНУ ВНИИ молочной промышленности Россельхозакадемии)

Теплообмен при охлаждении молочной сыворотки в потоке

Статья посвящена исследованию теплопередачи при охлаждении молочной сыворотки. Определено изменение температуры во взаимосвязи с реологическими свойствами молочной сыворотки. Получены результаты для практического использования.

Article is devoted to heat transfer research when cooling whey. Change of temperature in interrelation with rheological properties of whey is defined. Results for practical use are received.

Ключевые слова: молочная сыворотка, охлаждение, реологические свойства, кристаллизация лактозы, теплообменник непрерывного действия

Техническая реализация одного из способов кристаллизации лактозы в молочной сыворотке основана на использовании в качестве охладителя-кристаллизатора пластинчатого скребкового теплообменника. Кристаллизация лактозы развивается в сложных гидродинамических условиях и в широком температурном диапазоне и т.п. [1, 5, 6].

Авторами проведено исследование изменения температуры хладоносителя и молочной сыворотки при охлаждении её в пластинчатом скребковом теплообменнике непрерывного действия. Поскольку канал для течения молочной сыворотки имеет довольно сложную форму (рисунок 1), то для аналитического исследования был сделан ряд упрощений, не сильно искажающих реальную картину.

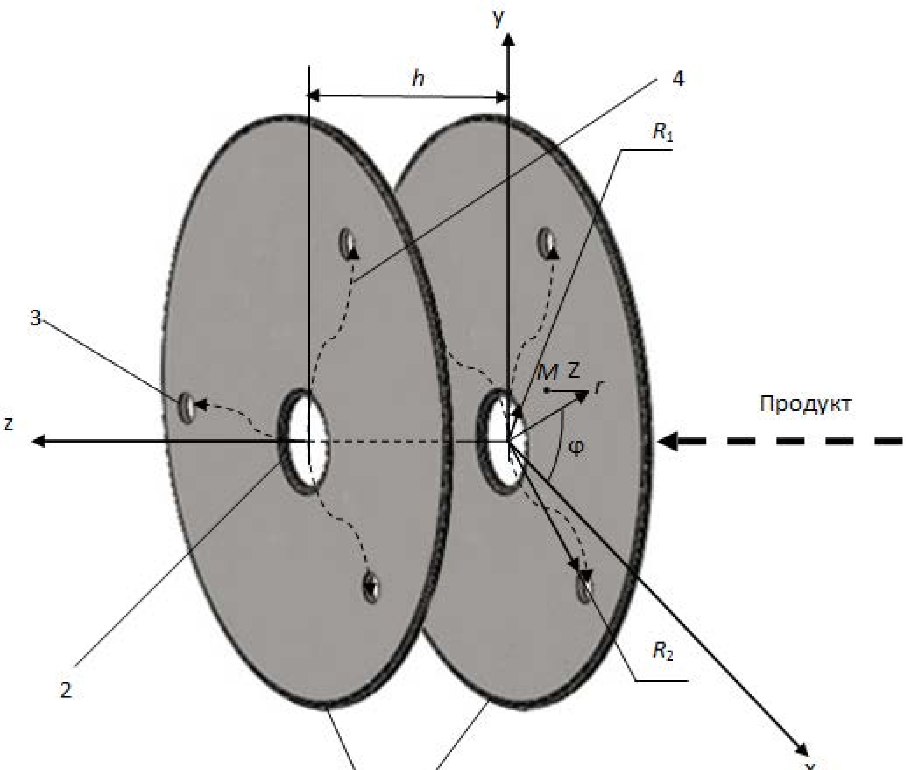

Рисунок 1 - Расчётная схема: 1 – продуктовые пластины; 2 – центральное отверстие; 3 – периферийные отверстия; 4 – линии тока продукта

Распределение температуры продукта в охлаждающем элементе будем изучать с помощью дифференциальных уравнений теплопереноса в движущихся жидких средах, записанных в цилиндрической системе координат при осесимметричном распределении температуры, без учета диссипации энергии:

$$v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \qquad (1)$$

где T – температура в точках продукта, ^{o}C ; r и z – цилиндрические координаты точки продукта; v_r и v_z – проекции скорости точек продукта на оси r и z; a – коэффициент температуропроводности.

Полагаем, что осевая скорость продукта v_z значительно меньше радиальной v_r и окружной v_φ скоростей, поэтому в уравнении (1) положим $v_z \dfrac{\partial T}{\partial z} \approx 0$. Для определения радиальной скорости v_r воспользуемся дифференциальным уравнением стационарного осесимметричного стационарного течения сплошной среды в напряжениях [2] в проекции на радиальное направление r, полагая в нем реологические константы и плотность продукта ρ не зависящими от температуры для данной пары продуктовых пластин.

Реологические исследования молочной сыворотки позволяют с большой точностью принять в качестве ее реологической модели степенную модель Оствальда-Де Виля [3]. Для такой модели компоненты тензора напряжений, входящие в уравнение (1), при сделанных ранее предположениях имеют вид [4]:

$$\tau_{rr} = -p + 2k\left|H\right|^{n-1}\frac{\partial v_r}{\partial r},$$

$$\tau_{\varphi\varphi} = -p + 2k\left|H\right|^{n-1}\frac{v_r}{r}, \quad , \qquad (2)$$

$$\tau_{rz} = k\left|H\right|^{n-1}\frac{\partial v_r}{\partial z}$$

где k и n – реологические константы молочной сыворотки: H – интенсивность скоростей деформации, равная:

$$H = \sqrt{\frac{1}{6}\left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{v_r}{r}\right)^2 + \left(-\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2\right] + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)^2}. \qquad (3)$$

Величина $k\left|H\right|^{n-1}$ может рассматриваться как некоторая кажущаяся (эффективная) вязкость:

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = F_r + \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\varphi\varphi}}{r}\right\}, \qquad (4)$$

где τ_{rr} , $\tau_{\varphi\varphi}$ – нормальные напряжения на площадках перпендикулярных соответственно радиальной r и окружной φ осям, τ_{rz} – касательное напряжение на площадках, перпендикулярных осям r и Z .

Уравнение неразрывности (несжимаемости), справедливое для любой жидкой среды при сделанных предположениях, имеет вид:

$$\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} = 0, \qquad (5)$$

Интегрируя уравнение (5), находим:

$$v_r = \frac{1}{r} f(z). \qquad (6)$$

Температуру в продукте определяем по уравнению (1) с учетом $v_z \dfrac{\partial T}{\partial z} \approx 0$. Для этого подставим в левую часть данного уравнения выражение радиальной скорости (6) и разделим его левую и правую части на коэффициент температуропроводности a. После этого получим:

$$\frac{f(z)}{r}\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \qquad (7)$$

Поскольку точного аналитического решения данного уравнения получить нельзя, воспользуемся приближенным решением, заключающемся в частичном осреднении его конвективной части (левая часть уравнения) по толщине зазора между дисками и использовании метода последовательных приближений. Для этого в левой части равенства (7) положим $f(z) \approx \overline{f(z)} = \frac{2}{h}\int_0^{h/2} f(z)dz$. Функция $f(z)$, учитывающая разность давления и вязкостные свойства молочной сыворотки, получена авторами ранее при исследовании гидродинамики пластинчатого скребкового теплообменника. Она имеет вид:

$$f(z)=-\left[-\frac{(p_1-p_2)(1-n)}{k\left(R_2^{1-n}-R_1^{1-n}\right)}\right]^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{n}{n+1}\left[\left(\frac{h}{2}-z\right)^{\frac{n+1}{n}}-\left(\frac{h}{2}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right] \qquad (8)$$

Проинтегрировав функцию $f(z)$ (8) в пределах от 0 до $\frac{h}{2}$, находим:

$$\overline{f(z)}=\frac{2n}{2n+1}\left(\frac{h}{2}\right)^{\frac{n+1}{n}}\left[\frac{(p_1-p_2)(1-n)}{k\left(R_2^{1-n}-R_1^{1-n}\right)}\right]^{\frac{1}{n}}. \qquad (9)$$

Таким образом, уравнение (7) заменится приближенным уравнением, приведенным к стандартной форме:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}(1-B)+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0, \qquad (10)$$

где через B обозначена величина $\overline{f(z)}$ из (9) деленная на a, т. е.:

$$B=\frac{\overline{f(z)}}{a}, \qquad (11)$$

Данное уравнение решаем при следующих граничных условиях:

$$r=R_1,\quad T=T_1,\quad z=0,\quad T=T_3,\quad z=h,\quad T=T_4 \qquad (12)$$

где T_3 и T_4 − температуры продукта на стенках дисков.

Решение линейного уравнения (10) найдем методом разделения переменных, добавив к его общему решению частное решение специального вида. Для этого положим:

$$T(r,z)=R(r)\cdot Z(z)+T_3+\frac{z}{h}(T_4-T_3), \qquad (13)$$

Подстановкой этого выражения T в (10) и разделением переменных, получим для функций $R(r)$ и $Z(z)$ обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$Z''+\lambda^2 Z=0, \qquad (14)$$

$$r R''+R'(1-B)-\lambda^2 r R=0, \qquad (15)$$

где λ^2 − константа разделения.

Решение уравнения (14) имеет вид:

$$Z(z)=C_1\cos\lambda z+C_2\sin\lambda z, \qquad (16)$$

В силу двух последних граничных условий (12) и выражения (13) функция $Z(z)$ должна обращаться в ноль при $z=0$ и $z=h$. Отсюда следует:

$$C_1=0,\quad \lambda=\frac{k\pi}{h},\quad k=1,2,\ldots\infty, \qquad (17)$$

То есть общее решение уравнения (10) будет представлено рядом Фурье по синусам.

Уравнение (15) является уравнением Бесселя произвольного порядка, зависящего от константы B. Поскольку такие функции не табулированы, то дальше будем решать уравнение (10) методом последовательных приближений. Для этого проведем оценку порядка слагаемых в этом уравнении, приведя его к безразмерному виду. Напишем соотношения между размерными и безразмерными величинами:

$$T=T_0\overline{T},\quad r=R_2\overline{r},\quad z=h\overline{z}, \qquad (18)$$

где T_0− характерная размерная величина искомой функции, $\overline{T}$ − безразмерная искомая функция, $\overline{r}$ − безразмерная радиальная координата, R_2− характерный радиальный размер, $\overline{z}$ − безразмерная осевая координата. В качестве характерной осевой координаты взято расстояние h между дисками.

Перейдя в уравнении (10) к безразмерным величинам получим:

$$\frac{h^2}{R_2^2}\frac{\partial^2\overline{T}}{\partial\overline{r}^2}+\frac{(1-B)h^2}{R_2^2}\times\frac{1}{\overline{r}}\frac{\partial\overline{T}}{\partial\overline{r}}+\frac{\partial^2\overline{T}}{\partial\overline{z}^2}=0 \qquad (19)$$

Таким образом, в безразмерном уравнении (19) порядки слагаемых будут определяться только порядками коэффициентов в этих слагаемых. Для оценки порядка этих коэффициентов примем следующие порядки конструктивных параметров охладителя и параметров обрабатываемого продукта: $h\sim 0{,}01$м, $R_1\sim 0{,}01$м, $R_2\sim 0{,}1$м, $q\sim 10^{-4}$ м^3/с, $a\sim 10^{-6}$ м^2/с, $k\sim 10$ Па·с,· $n\sim 1$

Коэффициент B во втором слагаемом согласно (9) и (11) будет иметь порядок 10^4, т. е. $B>>1$. Коэффициент в последнем слагаемом уравнения (19) имеет порядок 1. Принимая во внимание, что $\frac{h^2}{R_2^2} << \frac{Bh^2}{R_2^2} \sim 1$, оставим в уравнении (19), а значит и в уравнении (10), два последних слагаемых. На этом основании уравнение (10) для нулевого приближения при условии $B>>1$ примет вид:

$$-\frac{B}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \qquad (20)$$

Решим уравнение (20) методом разделения переменных, представив его решение в виде (13). После разделения переменных для функций $R(r)$ и $Z(z)$ получим обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\frac{R'}{R} = -\frac{\lambda^2}{B} r, \qquad (21)$$

И (14), решением которого будет функция (16) при значениях констант (17). Решение уравнения первого порядка с разделяющимися переменными (21) запишется в виде:

$$R(r) = C_3\, e^{-\frac{\lambda^2}{2B} r^2}, \qquad (22)$$

где C_3 − постоянная интегрирования. Таким образом, на основании (13), (16), (17) и (22) получим решение уравнения (20) в виде ряда:

$$T(r,z) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j\, e^{-\frac{j^2\pi^2}{2Bh^2} r^2} \sin\frac{j\pi}{h} z + T_3 + \frac{z}{h}(T_4 - T_3), \qquad (23)$$

где $C_к = C_2\, C_3$ и индекс j показывает, что эта константа будет зависеть от номера j собственных чисел λ из (17).

Найдем постоянные интегрирования C_j, используя первое граничное условие (12), т. е. $T(R_1, z) = T_1$. На основании этого условия и соотношения (23) получим уравнение для определения C_j:

$$T_1 - T_3 - \frac{z}{h}(T_4 - T_3) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j\, e^{-\frac{j^2\pi^2}{2Bh^2} R_1^2} \sin\frac{j\pi}{h} z \qquad (24)$$

k

Используя формулу для определения коэффициентов ряда Фурье на интервале $0 \le z \le h$, найдем:

$$C_j = \frac{2}{j\pi}\left[T_1 - T_3 - (T_1 - T_4)\cos j\pi\right] e^{\frac{j^2\pi^2}{2Bh^2} R_1^2} \qquad (25)$$

Таким образом, распределение температуры в пространстве между продуктовыми пластинами в нулевом приближении на основании (23) и (25) примет следующий вид:

$$T(r,z) = \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left[T_1 - T_3 - (T_1 - T_4)\cos j\pi\right] e^{\frac{j^2\pi^2}{2Bh^2}(R_1^2 - r^2)} \sin\frac{j\pi}{h} z + T_3 + \frac{z}{h}(T_4 - T_3) \qquad (26)$$

Для нахождения первого приближения решения уравнения (10) подставим найденное решение нулевого приближения в ранее отброшенное слагаемое $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$ этого уравнения. После этого придем к неоднородному линейному уравнению в частных производных:

$$-\frac{B}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{2\pi}{Bh^2}\sum_{j=1}^{\infty} j\left[T_1 - T_3 - (T_1 - T_4)\cos j\pi\right]\left(1 - \frac{j^2\pi^2}{Bh^2} r^2\right) e^{\frac{j^2\pi^2}{2Bh^2}(R_1^2 - r^2)} \sin\frac{j\pi}{h} z. \qquad (27)$$

Будем искать решение этого уравнения в таком же виде, как и решение уравнения (20) нулевого приближения, т. е.:

$$T(r,z) = \sum_{j=1}^{\infty} F_j(r) \sin\frac{j\pi}{h} z + T_3 - \frac{z}{h}(T_3 - T_4), \qquad (28)$$

где $F_j(r)$ - неизвестная пока функция, зависящая от координаты r и номера j собственных чисел λ из (17). Подстановкой выражения $T(r,z)$ из (28) в левую часть уравнения (27) и приравниванием коэффициентов при $\sin\frac{j\pi}{h} z$ в левой и правой частях уравнения (27), получим обыкновенное линейное уравнение первого порядка относительно функции $F(r)$:

$$\frac{B}{r}\frac{dF_k}{dr} + \frac{j^2\pi^2}{h^2} F_k = -\frac{2\pi j}{Bh^2}\left[T_1 - T_3 - (T_1 - T_4)\cos j\pi\right] \times \left(1 - \frac{j^2\pi^2}{Bh^2} r^2\right) e^{\frac{j^2\pi^2}{2Bh^2}(R_1^2 - r^2)} \qquad (29)$$

Решением этого уравнения является функция:

$$F_k(r) = -\frac{2\pi j}{B^2h^2}\left[T_1 - T_3 - (T_1 - T_4)\cos j\pi\right] \times \left(\frac{r^2}{2} - \frac{j^2\pi^2}{4Bh^2}r^4\right)e^{\frac{j^2\pi^2}{2Bh^2}(R_1^2 - r^2)} + C_k^* e^{-\frac{j^2\pi^2}{2Bh^2}r^2}, \quad (30)$$

где C_j^* – постоянная интегрирования.

На основании (28) и (30) имеем:

$$T(r,z) = -\frac{\pi}{B^2h^2}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{ j\left[T_1 - T_3 - (T_1 - T_4)\cos j\pi\right] \left(r^2 - \frac{j^2\pi^2}{2Bh^2}r^4\right)e^{\frac{j^2\pi^2}{2Bh^2}(R_1^2 - r^2)} + C_j^* e^{-\frac{j^2\pi^2}{2Bh^2}r^2}\right\} \times \sin\frac{j\pi}{h}z + T_3 - \frac{z}{h}(T_3 - T_4). \quad (31)$$

Постоянную интегрирования C_j^* находим так же, как и постоянную C_j для нулевого приближения, т. е. из условия $T(R_1, z) = T_1$. Точно так же, как и в равенстве (24), получим разложение функции, стоящей в левой части этого равенства в ряд Фурье по синусам. Из формулы для определения коэффициентов этого ряда находим:

$$C_j^* = -j\left[T_1 - T_3 - (T_1 - T_4)\cos j\pi\right] \times \left(\frac{2B^2h^2}{j^2\pi^2} + R_1^2 - \frac{j^2\pi^2}{2Bh^2}R_1^4\right)e^{\frac{j^2\pi^2}{2Bh^2}R_1^2} \quad (32)$$

Подставив данное выражение C_j^* в правую часть равенства (31), приведем его к виду:

$$T(r,z) = -\frac{\pi}{B^2h^2}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{ j\left[T_1 - T_3 - (T_1 - T_4)\cos j\pi\right] \left[r^2 - R_1^2 - \frac{j^2\pi^2}{2Bh^2}(r^4 - R_1^4) - \frac{2B^2h^2}{j^2\pi^2}\right] \times e^{\frac{j^2\pi^2}{2Bh^2}(R_1^2 - r^2)}\sin\frac{j\pi}{h}z\right\} + T_3 - \frac{z}{h}(T_3 - T_4). \quad (33)$$

Таким образом, формула (33) применена для расчета температуры продукта как при центральном способе его подачи, так и при периферийном способе подачи в пространство между дисками. Полученные формулы позволяют проводить расчёт процесса охлаждения при поточной кристаллизации лактозы в молочной сыворотке в потоке и определять основные параметры пластинчатых скребковых теплообменных аппаратов.

ЛИТЕРАТУРА

1 Бредихин, С. А. Технологическое оборудование предприятий молочной промышленности [Текст] / С.А. Бредихин. - М.: Колос, 2010. - 408 с.

2 Кулаков, А. В. Элементы механики пищевых сред [Текст] / А.В. Кулаков, В. М. Чесноков. - М.: МГУПБ, 2004. - 301 с.

3 Чеботарёв, Е. А. Вязкость молочной сыворотки и продуктов из неё [Текст] / Е. А. Чеботарев, П. Г. Нестеренко, Л. Е. Давыдянц и др. // Молочная промышленность. – 1983. - № 2. - С. 26-27

4 Шульман, З. П. Конвективный теплоперенос реологически сложных жидкостей [Текст] / З.П. Шульман. - М.: Энергия, 1975. - 352 с.

5 Broun, D. J. Crystal grouth measurement and modeling of fluid flow in a crystallizer [Text] // D. J. Broun, F. Bousan //Zuckerindustrie. - 1992. – V. 117. - № 1. - P. 35-39.

6 Spreer, E. Technologie der Milchverarbeitung [Text] / E. Spreer. - Hamburg: Behr's Verlag, 1995. -517 p.

REFERENCES

1 Bredikhin, S. A. Technological equipment of the dairy industry [Text] / S. A. Bredikhin. – M.: Kolos, 2010. - 408 p.

2 Kulakov, A. Elements of mechanics food media [Text] / A. V. Kulakov, V. M. Chesnokov. – M.: MSUAB, 2004. - 301 p.

3 Chebotarev, E. A. The viscosity of whey and products from it [Text] / E. A. Chebotarev, P. G. Nesterenko, L. E. Davydyants et al // Dairy industry. - 1983. - № 2. - P. 26-27

4 Shulman, Z. P. Convective heat transfer rheology of complex fluids [Text] / Z. P. Shulman. – M.: Energiya, 1975. – 352 p.

5 Broun, D. J. Crystal grouth measurement and modeling of fluid flow in a crystallizer [Text] // D. J. Broun, F. Bousan // Zuckerindustrie. - 1992. – V. 117. - № 1. - P. 35-39.

6 Spreer, E. Technologie der Milchverarbeitung [Text] / E. Spreer. - Hamburg: Behr's Verlag, 1995. -517 p.