Оригинальная статья/Original article
УДК 517.977
DOI: http://doi.org/10.20914/2310-1202-2018-3-56-62

Различные способы поиска матрицы обратной связи для линейной динамической системы

Дмитрий А. Литвинов [1] d77013378@yandex.ru

[1] Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия

Реферат. Использование обратной связи в линейных динамических системах является важной задачей, так как позволяет осуществлять корректировку функции управления на основании информации о состоянии системы. Особенно актуально использование матрицы обратной связи K, позволяющей сделать зависимость между состоянием и управлением статической и линейной. Сложность возникает, если на функцию состояние накладывается краевое условие не только в начальной, но и в конечной точке. Для поиска матрицы обратной связи Kнужно разложить в ряд матрицу замкнутой системы M, заданную параметрически, и решить необходимые уравнения. Предварительно нужно ответить на вопрос- какими свойствами должна обладать матрица *M* для того, чтобы данные уравнения были разрешимы. В рамках данной статьи рассматриваются такие типы матриц*M*, для которых ответ на поставленный вопрос не представляет сложности. Первый тип включает в себя матрицы, в которых все элементы, за исключением главной диагонали равны нулю, второй тип — такие матрицы в которых все элементы, за исключением некоторого столбца, равны нулю, третий тип — матрицы, где нули за пределами некоторой строки. Четвертый тип представляет из себя матрицы, где ненулевые элементы расположены по диагонали начиная с $k + 1$ элемента первой строки. Матрицы первых трех типов позволяют найти связь между компонентами краевых условий, необходимую для существования матрица обратной связи*K*. Для матриц четвертого типа получить аналитически такую связь сложно. Однако, для матриц такого типа будет не сложно подсчитать матричную экспоненту численными методами, что также облегчает решение поставленной задачи

Ключевые слова: линейная динамическая система, управление, обратная связь, матрица обратной связи, матричная экспонента, особые типы матриц

Different ways of finding the feedback matrix for a linear dynamical system

Dmitriy A. Litvinov [1] d77013378@yandex.ru

[1] Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, 394036, Russia

Summary.Using of feedback in linear dynamical systems is an important task, because it allows to correct the control function by using the information about the state of the system. Using of the feedback matrix K, which makes possible to make a relationship between the state and control static and linear is particularly relevant. The complexity arises if the boundary condition is imposed on a state function not only in the initial, but also at the final point. We need to expand the defined parametrically matrix M of the closed system into a series and solve the necessary equations to find the feedback matrix K .First we need to answer the question: what are the properties of the matrix M in order for these equations to be solvable. Within the framework of this article, we consider types of matrices M for which the answer to the posed question is not difficult. The first type includes matrices in which all elements except for the main diagonal are equal to zero, the second type includes those in which all elements except for some column are zero, the third type includes the matrices where the zeros are outside of some row. The fourth type is a matrix, where non-zero elements are arranged diagonally starting with k + 1 elements of the first row. The matrices of the first three types allow us to find the connection between the components of the boundary conditions necessary for the existence of the feedback matrix K. For matrices of the fourth type, it is difficult to obtain such connection analytically. However, it will not be difficult to calculate the matrix exponent by numerical methods for matrices of thistype, which also facilitates the solution of the problem.

Keywords:linear dynamic system, control, feedback, feedback matrix, matrix exponent, special types of matrices

Введение

Один из способов синтеза управления связан с идеей обратной связи, которая состоит в том, что управление корректируется в каждый момент времени на основании информации о состоянии системы. Одним из самых распространенных способов построения обратной связи для динамических систем является метод, основанный на использовании матрицы обратной связи. Построим постоянную матрицу K, необходимую для построения линейной статической обратной связи по состоянию $u = Kx$, обеспечивающей наилучшее значение критерия оптимальности в классе любых управлений [1, 2].

Над данной проблемой работали многие исследователи. В [1] строится стабилизирующая матрица обратной связи, придающая функции состояния системы асимптотическую устойчивость. Это также рассматривалось в [3–5], авторы которых ставят вопрос о построении разряженной обратной связи, что позволяет сделать нулевыми максимальное количество компонент функции управления.

В [6–7] рассматривалась возможность перехода из начальной точки в конечную с помощью метода, основанного на матричных рядах, проверяя конечную точку $x(T)$ на возможность перейти в нее из начальной точки $x(0)$.

Для цитирования
Литвинов Д.А. Различные способы поиска матрицы обратной связи для линейной динамической системы // Вестник ВГУИТ. 2018. Т. 80. № 3. С. 56–62. doi:10.20914/2310-1202-2018-3-56-62

For citation
Litvinov D.A. Different ways of finding the feedback matrix for a linear dynamical system. *Vestnik VGUIT* [Proceedings of VSUET]. 2018. vol. 80. no. 3. pp. 56–62. (in Russian). doi:10.20914/2310-1202-2018-3-56-62

Здесь показаны случаи, когда задачу из [6–7] можно существенно упростить.

Постановка задачи

Для полностью управляемой динамической системы

$$t) + Bu(t), \qquad (1)$$

где $x \in R^n, u \in R^n, A$ и B – постоянные матрицы, $t \in [0, T]$, где T – некоторая точка. Поставлена задача нахождения такой матрицы K, что существует функция управления $u(t)$ и функция состояния (траектория) системы $x(t)$, удовлетворяющие (1) и краевым условиям:

$$x(0) = x_0, x(T) = x_T, \qquad (2)$$

и

$$u(t) = Kx(t), \forall t \in [0, T]. \qquad (3)$$

Также требуется найти связь между краевыми значениями, необходимую и достаточную для решения поставленной задачи.

Подставив (3) в (1), сделаем замену

$$M = A + BK \ (M : n \times n). \qquad (4)$$

Предварительные сведения

Использованы следующие свойства линейных отображений [8].

Оператору B с матрицей $m \times n$ соответствуют следующие разложения пространств в прямые суммы:

$$R^n = KerB + CoimB, R^m = \\ = CokerB + ImB, \qquad (5)$$

где $KerB$ – ядро B, то есть множество решений уравнения $Bz = 0$; $CoimB$ – прямое дополнение к $KerB$ в R^n; ImB – образ B, то есть множество значений B; $CokerB$ - прямое дополнение к ImB в R^m, то есть подпространство для B. Сужение $\tilde{B}$ отображения B на $CoimB$ обратимо.

Вводятся проекторы на $KerB$ и $CokerB$, отвечающие разложению (5),которые будут обозначаться P и Q соответственно. Отображение $B^{-} = \tilde{B}(I - Q)$ называется полуобратным отображением. Здесь I – единичное отображение. Известен следующий результат [8].

Лемма.

Соотношение

$$Bz = w, \ w \in R^m, \ z \in R^n \qquad (6)$$

эквивалентно системе

$$Qw = 0, \qquad (7)$$

$$z = B^{-}w + Pz, \qquad (8)$$

где Pz – некоторый элемент из $KerB$.

Решение поставленной задачи

Переформулируем задачу.

Необходимо найти связь между x_0 и x_T, такую что решение $x(t)$ дифференциального уравнения

$$t), \qquad (9)$$

с условием

$$x(0) = x_0, \qquad (10)$$

удовлетворяет в точке Т условию

$$x(T) = x_T. \qquad (11)$$

Задача Коши (9), (10) имеет решение

$$x(t) = \exp(Mt) \cdot x_0, \qquad (12)$$

где

$$\exp(Mt) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M^i t^i}{i!}. \qquad (13)$$

Подставив $t = T$ в (12), получим эквивалентное (11) условие:

$$\exp(MT) \cdot x_0 = x_T. \qquad (14)$$

Рассмотрим уравнение для нахождения матрицы K:

$$BK = M - A, \qquad (15)$$

следующее из (4).

Рассмотрим случай, когда матрица B необратима, так как иначе решение задачи не представляет сложности. В этом случае для разрешимости (15) необходимо и достаточно

$$Q(B)(M - A) = 0. \qquad (16)$$

Для разрешимости (15) необходимо и выполнение следующего утверждения:

$$M - A \in ImB \Leftrightarrow M - A = (I - Q(B))L(\forall L : n \times n).$$

Это эквивалентно тому, что

$$M = A + (I - Q(B))L, \qquad (17)$$

тогда

$$K = B^{-}(M - A) + P_B L_1 \qquad (18)$$

с произвольной матрицей $L_1 : n \times n$.

В данной работе рассмотрены 4 таких типа матрицы M, для которых процесс нахождения K, а для первых трех — и проверки условия (14), не представляет трудности.

Особые структуры

1–я структура

$$M=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & \alpha_2 & ... & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & ... & \alpha_n\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$e^{MT}=\begin{pmatrix}e^{\alpha_1 T} & 0 & ... & 0\\ 0 & e^{\alpha_2 T} & ... & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & . & . & e^{\alpha_n T}\end{pmatrix}$$

Отсюда, пользуясь (14), получим необходимые и достаточные условия на связь между компонентами краевых значений в начальной и конечной точках.

$$\begin{cases}\alpha_1 T=\ln\dfrac{x_{T1}}{x_{01}}\\ \alpha_2 T=\ln\dfrac{x_{x_{T2}}}{x_{02}}\\ ...\\ \alpha_n T=\ln\dfrac{x_{x_{Tn}}}{x_{0n}}\end{cases} \qquad (19)$$

Более того, очевидно, необходимо чтобы

$\dfrac{x_{Ti}}{x_{0i}}>0 \;\; i:\overline{1..n}.$

Пример

Пусть дана следующая динамическая система.

$$\begin{pmatrix}\cdot & 2 & 0 & 0\\ \cdot & 3 & 0 & 0\\ \cdot & 4 & 0 & 0\\ \cdot & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}+ \qquad (20)$$
$$+\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\end{pmatrix}.$$

Следует выяснить, какая должна быть связь между компонентами краевых значений $x_0=x(0)$ и $x_T=x(1)$ для разрешимости задачи (1)–(3) на отрезке [0,1], а также в случае наличия такой связи найти матрицу K.

Для того чтобы получить M в виде (17), найдем матрицы $Q(B)$ и $I-Q(B)$.

$$Im(B)=\begin{Bmatrix}x_1+2x_2\\ 2x_1+4x_2\\ 3x_1+5x_3\\ x_4\end{Bmatrix}.$$

Или, введя замены,

$$x_1+2x_2=y_1,\, 3x_1+5x_3=y_3,\, x_4=y_4$$

получим $Im(B)=\begin{Bmatrix}y_1\\ 2y_1\\ y_3\\ y_4\end{Bmatrix}$,

тогда

$$CokerB=\begin{Bmatrix}0\\ y_2-2y_1\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}.$$

Следовательно, $Q(B)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

тогда $I-Q(B)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Используем произвольную матрицу

$$L=\begin{pmatrix}l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14}\\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24}\\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34}\\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44}\end{pmatrix}.$$

Тогда, пользуясь (17), легко найти M:

$$M=\begin{pmatrix}-1+l_{11} & 2+l_{12} & l_{13} & l_{14}\\ 2+2l_{11} & 3+2l_{12} & 2l_{13} & 2l_{14}\\ 3+l_{31} & 4+l_{32} & l_{33} & l_{34}\\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1+l_{44}\end{pmatrix}.$$

Возьмем $l_{11}=-1,\; l_{12}=-2,\; l_{13}=0,$ $l_{14}=0,\; l_{31}=-3,\; l_{34}=l_{41}=l_{42}=l_{43}=0$.

Получим

$$M=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & l_{33} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1+l_{44}\end{pmatrix}.$$

Тогда из (19) получим

$$\begin{cases} -2 = \ln\dfrac{x_{T1}}{x_{01}} \\ -1 = \ln\dfrac{x_{T2}}{x_{02}} \\ l_{33} = \ln\dfrac{x_{T3}}{x_{03}} \\ 1 + l_{44} = \ln\dfrac{x_{T4}}{x_{04}} \end{cases},$$

что эквивалентно следующему требованию на связь между краевыми условиями:

$$\begin{cases} x_{T1} = \dfrac{x_{01}}{e^2} \\ x_{T2} = \dfrac{x_{02}}{e} \\ \dfrac{x_{T3}}{x_{03}} > 0 \\ \dfrac{x_{T4}}{x_{04}} > 0 \end{cases}.$$

Матрица M будет иметь вид:

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ln\dfrac{x_{T3}}{x_{03}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ln\dfrac{x_{T4}}{x_{04}} \end{pmatrix}.$$

Так как $Im(B) = \begin{Bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 + 5x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}$ найдено выше, а $Ker(B) = \begin{Bmatrix} x_1 \\ -0.5x_1 \\ -0.6x_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$, то

$$Coim(B) = \begin{Bmatrix} 0 \\ x_2 + 0.5x_1 \\ x_3 + 0.6x_1 \\ \hline x_4 \end{Bmatrix}.$$

Отсюда

$$B^- = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле (18) найдем матрицу K. Здесь l_1, l_2, l_3, l_4 – произвольные числа:

$$K = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \\ -0.5 - 0.5l_1 & -1 - 0.5l_2 & -0.5l_3 & -0.5l_4 \\ -0.6 - 0.6l_1 & -0.8 - 0.6l_2 & 0.2\ln\dfrac{x_{T3}}{x_{03}} - 0.6l_3 & -0.6l_4 \\ 0 & 0 & 0 & \ln\dfrac{x_{T4}}{x_{04}} - 1 \end{pmatrix}.$$

2–я структура

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \alpha_1 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & \ldots & \alpha_n & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$e^{MT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \dfrac{\alpha_k T}{\alpha_k} & \ldots & \\ 0 & 1 & \ldots & \dfrac{\alpha_k T}{\alpha_k} & \ldots & \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & & \ldots & \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & \dfrac{\alpha_k T}{\alpha_k} & \ldots & \end{pmatrix}.$$

Тогда если $x_{Ti} \neq x_{0i}$ и $\dfrac{x_{Ti}}{x_{0i}} > 0$ $i : \overline{1..n}$, то

$$\begin{cases} \alpha_1 T = \dfrac{x_{T1} - x_{01}}{x_{Tk} - x_{0k}} \ln\dfrac{x_{Tk}}{x_{0k}} \\ \alpha_2 T = \dfrac{x_{T2} - x_{02}}{x_{Tk} - x_{0k}} \ln\dfrac{x_{Tk}}{x_{0k}} \\ \ldots \\ \alpha_k T = \ln\dfrac{x_{Tk}}{x_{0k}} \\ \alpha_n T = \dfrac{x_{Tn} - x_{0n}}{x_{Tk} - x_{0k}} \ln\dfrac{x_{Tk}}{x_{0k}} \end{cases}.$$

Пример

$$\begin{pmatrix} \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \qquad (21)$$

Следует выяснить, какая должна быть связь между компонентами краевых значений $x_0 = x(0)$ и $x_T = x(1)$ для разрешимости задачи (1)–(3) на отрезке [0,1], а также в случае наличия такой связи найти матрицу K.

Поскольку матрица B имеет такой же вид, пользуясь формулой (17) найдем матрицу M:

$$M = \begin{pmatrix} -1+l_{11} & l_{12} & l_{12} & l_{14} \\ -2+2l_{11} & 2l_{12} & 2l_{13} & 2l_{14} \\ 3+l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} \\ 5+l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix}.$$

Далее пусть $l_{12} = l_{13} = l_{14} = l_{32} = l_{33} = l_{34} = = l_{42} = l_{43} = l_{44} = 0.$

Тогда получим следующие уравнения:

$$\begin{cases} -1+l_{11} = \ln\dfrac{x_{T1}}{x_{01}} \\ -2+2l_{11} = \dfrac{x_{T2}-x_{02}}{x_{T1}-x_{01}}\ln\dfrac{x_{T1}}{x_{01}} \\ 3+l_{31} = \dfrac{x_{T3}-x_{03}}{x_{T1}-x_{01}}\ln\dfrac{x_{T1}}{x_{01}} \\ 5+l_{41} = \dfrac{x_{T4}-x_{04}}{x_{T1}-x_{01}}\ln\dfrac{x_{T1}}{x_{01}} \end{cases}.$$

Отсюда из первой и второй строчки получим следующую связь между компонентами краевых значений:

$$2\ln\frac{x_{T1}}{x_{01}} = \frac{x_{T2}-x_{02}}{x_{T1}-x_{01}}\ln\frac{x_{T1}}{x_{01}},$$

что, поскольку случай $x_{T1} = x_{01}$, очевидно, не подходит, эквивалентно следующему утверждению:

$$\frac{x_{T2}-x_{02}}{x_{T1}-x_{01}} = 2. \qquad (22)$$

В случае выполнения условия (22), а также условий $x_{Ti} \neq x_{0i}$ и $\dfrac{x_{Ti}}{x_{0i}} > 0 \;\; i:\overline{1..n}$ получим:

$$M = \begin{pmatrix} \ln\dfrac{x_{T1}}{x_{01}} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{x_{T2}-x_{02}}{x_{T1}-x_{01}}\ln\dfrac{x_{T1}}{x_{01}} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{x_{T3}-x_{03}}{x_{T1}-x_{01}}\ln\dfrac{x_{T1}}{x_{01}} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{x_{T4}-x_{04}}{x_{T1}-x_{01}}\ln\dfrac{x_{T1}}{x_{01}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда из формулы (14), зная матрицы B^- и $P(B)$, найдем матрицу K. Здесь l_1, l_2, l_3, l_4 – произвольные числа.

$$K = \begin{pmatrix} 2\ln\dfrac{x_{T1}}{x_{01}} - \dfrac{x_{T2}-x_{02}}{x_{T1}-x_{01}}\ln\dfrac{x_{T1}}{x_{01}} + l_1 & l_2 & l_3 & l4 \\ 0.5\ln\dfrac{x_{T1}}{x_{01}} + 0.5 - 0.5l_1 & -0.5l_2 & -0.5l_3 & -0.5l_4 \\ 0.2\dfrac{x_{T3}-x_{03}}{x_{T1}-x_{01}}\ln\dfrac{x_{T1}}{x_{01}} - 0.6 - 0.6l_1 & -0.6l_2 & -0.6l_3 & -0.6l_4 \\ \dfrac{x_{T4}-x_{04}}{x_{T1}-x_{01}}\ln\dfrac{x_{T1}}{x_{01}} - 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3–я структура

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_k & \ldots & \alpha_n \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$e^{MT} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ e^{\alpha_k T}\alpha_1 T & e^{\alpha_k T}\alpha_2 T & \ldots & e^{\alpha_k T}\alpha_k T & \ldots & e^{\alpha_k T}\alpha_n T \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда в случае если $x_{Ti} = 0$, $i = \overline{1..n}$, $i \neq k$, получим следующую связь между компонентами краевых значений:

$$\begin{cases} x_{Ti} = 0 \;\; i = \overline{1..n}, \;\; i \neq k \\ e^{\alpha_k T} T\sum\limits_{l=1}^{n}\alpha_i x_{0i} = x_{Ti} \end{cases}. \qquad (23)$$

Пример

Рассмотрим предыдущий пример.

В матрице M будем использовать следующие значения переменных $l_{11} = 1$, $l_{12} = l_{13} = l_{14} = l_{42} = l_{43} = l_{44} = 0, \quad l_{41} = -5.$

Тогда получим

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3+l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из этого получим:

$$\begin{cases} x_{Ti}=0 \;\; i:\overline{1..n},\; i\neq 3 \\ e^{l_{33}}((3+l_{31})x_{01}+l_{32}x_{02}+l_{33}x_{03}+l_{34}x_{04})=x_{T3} \end{cases}.$$

Существуют следующие варианты развития событий.

1) $x_{03}=0$, тогда получим:

$$((3+l_{31})x_{01}+l_{32}x_{02}+l_{34}x_{04})=\frac{x_{T3}}{e^{l_{33}}}.$$

Тогда если $x_{01}=x_{02}=x_{04}=0$, то задача разрешима только в случае, если $x_{T3}=0$. В качестве $l_{31},\ l_{32},\ l_{33},\ l_{34}$ можно тогда взять любые числа.

Если же, например, $x_{02}\neq 0$, то можно взять

$$l_{31}=-3,\ l_{34}=0,\ l_{33}=0,\ l_{32}=\frac{x_{T3}}{x_{02}}. \qquad (24)$$

Существуют и другие варианты решения, помимо (24), так как здесь требуется только выполнение условия (23).

2) $x_{03}\neq 0$.

2a) $x_{01}=x_{02}=x_{04}=0$. $\qquad (25)$

2b) $e^{l_{33}}l_{33}=\dfrac{x_{T3}}{x_{03}}$.

Поскольку минимальное значение функции $f(x)=e^{x}x$ равно $-\dfrac{1}{e}$, то в случае если выполняется

$$\frac{x_{T3}}{x_{03}}\geq -\frac{1}{e},$$

существует такое значение l_{33}, для которого выполняется (25). В качестве $l_{31},\ l_{32},\ l_{34}$ можно взять любые значения.

Пусть без ограничения общности $x_{02}\neq 0$. Тогда задача решается аналогично (24).

После нахождения $l_{31},l_{32},l_{33},l_{34}$ соответствующим способом найдем матрицу K. Здесь l_1, l_2, l_3 —произвольные числа:

$$K=\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \\ 0.5-0.5l_1 & -0.5l_2 & -0.5l_3 & -0.5l_4 \\ 0.2l_{31}-0.6l_1 & 0.2l_{32}-0.6l_2 & 0.2l_{33}-0.6l_3 & 0.2l_{34}-0.6l_4 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4–я структура

Рассмотрим те матрицы, в которых первые k элементов первой строки нулевые. А все элементы, которые могут быть ненулевыми, расположены по диагонали, начиная с $k+1$-го элемента первой строки.

$$M=\begin{pmatrix} 0 & \ldots & \alpha_1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \alpha_{n-k} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Экспериментальным путем можно получить

$$M^2=\begin{pmatrix} 0 & \ldots & \alpha_1\alpha_{k+1} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_2\alpha_{k+2} & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \alpha_{n-2k}\alpha_{n-k} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $2k$ первых элементов первой строки нулевые.

А в общем виде

$$M^s=\begin{pmatrix} 0 & \ldots & \prod\limits_{i=0}^{s-1}\alpha_{1+ik} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \prod\limits_{i=0}^{s-1}\alpha_{2+ik} & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \prod\limits_{i=0}^{s-1}\alpha_{n-sk+ik} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

для $s\leq\dfrac{n-1}{k}$. Здесь sk первых элементов первой строки нулевые.

А для $s>\dfrac{n-1}{k}$ $M^s=0$.

Тогда получим

$$e^M=\begin{pmatrix} 1 & \ldots & \alpha_1 & \ldots & \dfrac{\prod\limits_{i=0}^{s-1}\alpha_{1+ik}}{s!} & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_2 & \ldots & \dfrac{\prod\limits_{i=0}^{s-1}\alpha_{2+ik}}{s!} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \dfrac{\prod\limits_{i=0}^{s-1}\alpha_{n-sk+ik}}{s!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \alpha_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Как видно, при наличии у матрицы подобной структуры проверка нужной связи между компонентами краевых значений представляет из себя трудности, и придется в этом случае пользоваться технологиями из [6]. Однако нахождение матрицы численными методами в данном случае упрощается.

Вывод

В рамках данной статьи был продемонстрирован способ поиска матрицы обратной связи для особых случаев, а именно, когда поиск связи между компонентами краевых значений и нахождение матрицы обратной связи не представляет особых сложностей.

ЛИТЕРАТУРА

1 Хлебников М.В., Щербаков П.С. Ограниченное линейное управление оптимальное по квадратичному критерию специального вида // Труды ИСА РАН. 2013. Т.63. №2. С. 86-89.

2 Хлебников М.В. Управление линейными системами при внешних возмущениях: комбинированная обратная связь // Автоматика и Телемеханика. 2016. №7. С.20-32.

3 Blanchini F., Miani S., Set-Theoretic Methods in Control. Boston: Birkhäuser, 2008.

4 Lin F., Fardad M., Jovanovi´c M. Sparse feedback synthesis via the alternating direction method of multipliers // Proc. Amer. Control Conf. 2012. P. 4765–4770.

5 Kreventsov E. G. The concentration spectrum of the poles in a given region at the compensating approach to the synthesis of the feedback matrix // Applied Mathematical Sciences. 2014. V. 8. № 25. P. 1201 – 1211.

6 Литвинов Д.А. О построении обратной связи в задачах управления линейными динамическими системами. // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2017. №5. С. 164-170.

7 Литвинов Д.А. Построение линейной обратной связи для задач управления. // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика.2017. Т.5. №7-2. С.58-60.

8 Зубова С.П. О критериях полной управляемости дескрипторной системы. Полиномиальное решение задачи управления при наличии контрольных точек. // Автоматика и Телемеханика. 2011. №1. С. 27-41.

REFERENCES

1 Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Bounded linear controloptimal by a quadratic criterion of a special type. *Trudy IPU RAN* [Proceedings of the ISP RAS] 2013. vol. 63. no 2. pp. 86-89 (in Russian)

2 Khlebnikov M.V. Control oflinear systems subjected to exogenous disturbances: combined feedback. *Avtomatika i Telemekhanika* [Automation and Remote Control] 2016, vol. 77, no. 7, pp. 1141-1151. (in Russian)

3 Blanchini F., Miani S., Set-Theoretic Methods in Control. Boston, Birkhäuser, 2008.

4 Lin F., Fardad M., Jovanovi´c M. Sparse feedback synthesis via the alternating direction method of multipliers. Proc. Amer. Control Conf. 2012, pp. 4765–4770.

5 Kreventsov E. G. The concentration spectrum of the poles in a given region at the compensating approach to the synthesis of the feedback matrix. Applied Mathematical Sciences. 2014, vol. 8, no. 25, pp. 1201 - 1211

6 Litvinov D.A. On the construction of feedback in the problems of control of linear dynamical systems. *Vestnik BGTU imeni Shukhova* [Bulletin of the Belgorod state technological university of V.G. Shukhov] 2017. no. 5 pp. 164-170. (in Russian)

7 Litvinov D.A. Construction of linear feedback for control tasks. *Aktual'nye napravleniya nauchnyh issledovanij XXI veka: teoriya i praktika* .[Actual directions of scientific researches of the XXI century: theory and practice] 2017, vol. 5, no. 7-2, pp. 58-60. (in Russian)

8 Zubova S.P. On full controllability criteria of a descriptor system. The polynomial solution of a control problem with checkpoints. *Avtomatika i Telemekhanika* [Automation and Remote Control]. 2011, vol. 72, no. 1, pp. 23-37. (in Russian)

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Дмитрий А. Литвинов ассистент, кафедра высшей математики и информационных технологий, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия, d77013378@yandex.ru

INFORMATION ABOUT AUTHORS

Dmitriy A. Litvinov Assistant Lecturer, Department of Higher Mathematics and Information Technology, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, 394036, Russia, d77013378@yandex.ru

КРИТЕРИЙ АВТОРСТВА

Дмитрий А. Литвинов полностью подготовил рукопись и несет ответственность за плагиат.

CONTRIBUTION

Dmitriy A. Litvinov fully prepared the manuscriptand is responsible the plagiarism

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

CONFLICT OF INTEREST

The author declares no conflict of interest.

ПОСТУПИЛА 05.05.2018

ПРИНЯТА В ПЕЧАТЬ 04.07.2018

RECEIVED 5.5.2018

ACCEPTED 7.4.2018