

Интегрирование бигармонического уравнения по неявной схеме

Михаил И. Попов¹ mihail_semilov@mail.ru

¹ Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия

Реферат. В статье представлено пошаговое построение конечно-разностной схемы для неоднородного бигармонического уравнения при нулевых граничных условиях, наложенных на искомую функцию и ее частные производные первого порядка. Конечно-разностная схема основана на квадратном двадцатипятиточечном шаблоне и имеет неявный характер. На равномерной сетке с помощью разложения функции в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа вычислена погрешность аппроксимации бигармонического оператора разностным аналогом и погрешность аппроксимации граничных условий, наложенных на частные производные первого порядка. Граничные условия, наложенные на искомую функцию, выполняются точно. Конечно-разностная схема аппроксимирует краевую задачу со вторым порядком точности по шагу сетки. С помощью системы компьютерной алгебры Maple получено решения задачи для различных шагов сетки. Выявлена зависимость минимума функции и времени расчета от числа значимых цифр. Найдено оптимальное число значащих цифр. Проведен анализ скорости сходимости численной схемы. Установлена зависимость минимального значения функции и времени расчета от величины шага сетки. Найдено оптимальное значение шага. Построены трехмерный график решения и его профили в срединных сечениях. Указаны преимущества разработанной конечно-разностной схемы. Полученные результаты отвечают физическому смыслу задачи и согласуются аналогичными численными и приближенно-аналитическими решениями.

Ключевые слова: краевая задача, бигармоническое уравнение, конечно-разностная схема, погрешность аппроксимации.

The integration of a biharmonic equation by an implicit scheme

Mikhail I. Popov¹ mihail_semilov@mail.ru

¹ Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, 394036, Russia

Summary. The paper presents a step-by-step construction of a finite-difference scheme for a heterogeneous biharmonic equation under zero boundary conditions superimposed on the desired function and its first-order partial derivatives. The finite-difference scheme is based on a square twenty-five-point pattern and has an implicit character. On analytical grid, the error of approximation of the biharmonic operator by the difference analog and the error of approximation of boundary conditions imposed on the first order partial derivatives are calculated by the expansion of the function in the Taylor series with the remainder term in the form of a Lagrange. The boundary conditions imposed on the sought function are satisfied precisely. A finite-difference scheme approximates a boundary value problem with a second order of accuracy over the mesh step. With the help of the Maple computer algebra system the solutions of the problem for different grid steps are obtained. The dependence of the minimum function and calculation time on the number of significant digits is revealed. The optimal number of significant digits is found. The convergence rate of the numerical scheme is analyzed. The dependence of the minimum value of the function and the calculation time on the value of the grid step is established. The optimal step value is found. A three-dimensional graph of the solution and its profiles in the middle sections are constructed. The advantages of the developed finite-difference scheme are indicated. Obtained results correspond to the physical meaning of the problem and are consistent with similar numerical and approximate analytical solutions.

Keywords: boundary value problem, biharmonic equation, finite-difference scheme, approximation error

Введение

Краевые задачи для бигармонического уравнения возникают в теории упругости при моделировании изгибов тонких пластин [1–2], а также в гидродинамике при моделировании свободно-конвективных течений [3–5].

Наиболее известное решение неоднородного бигармонического уравнения, так называемого уравнения Софи Жермен, получены Анри Навье в виде двойного тригонометрического ряда. Однако оно справедливо лишь для пластинок, шарнирно опертых по контуру. Ряды в этом решении сходятся медленно. Более общее решение предложил Морис Леви, но и им не исчерпываются все постановки граничных условий.

В связи с отсутствием аналитических решений широкое развитие получили численные методы интегрирования краевых задач для бигармонического уравнения. Наряду с классическими [6–7] используются и современные методы, такие как метод конечного множества точек [8–9].

Для цитирования

Попов М.И. Интегрирование бигармонического уравнения по неявной схеме // Вестник ВГУИТ. 2018. Т. 80. № 2. С. 114–118. doi:10.20914/2310-1202-2018-2-114-118

Построение конечно-разностной схемы

Рассмотрим краевую задачу для неоднородного бигармонического уравнения с граничными условиями первого и второго рода в квадратной области $\bar{D} = [0; 1] \times [0; 1]$.

$$\frac{\partial^4 \Phi(X, Y)}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi(X, Y)}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4 \Phi(X, Y)}{\partial Y^4} = -1, \quad (1)$$

$$\Phi(0, Y) = \Phi(1, Y) = \Phi(X, 0) = \Phi(X, 1) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi(0, Y)}{\partial X} = \frac{\partial \Phi(1, Y)}{\partial X} = \frac{\partial \Phi(X, 0)}{\partial Y} = \frac{\partial \Phi(X, 1)}{\partial Y} = 0 \quad (3)$$

Для построения конечно-разностной схемы заменим область \bar{D} решения системы сеткой с шагами $\Delta X, \Delta Y$, $\bar{w}_{\Delta X, \Delta Y} = \{(X_i, Y_j) = (i\Delta X, j\Delta Y)\}, i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m$. Вместо функции непрерывного аргумента на \bar{D} рассматривается функция дискретного аргумента $\Phi(X_i, Y_j)_{\Delta X, \Delta Y}$, которая обозначается $\Phi_{i,j}$.

For citation

Popov M.I. The integration of a biharmonic equation by an implicit scheme. *Vestnik VGUIT* [Proceedings of VSUET]. 2018. vol. 80. no. 2. pp. 114–118. (in Russian). doi:10.20914/2310-1202-2018-2-114-118

Выбор разбиения осуществлен таким образом, чтобы в него попадали точки границы области и центр области.

Для построения конечно-разностного аналога частных производных $\partial^4\Phi(X, Y)/\partial X^4$ и $\partial^4\Phi(X, Y)/\partial Y^4$ используем центрально-разностный оператор 2-го порядка примененный дважды по соответствующей переменной:

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial X^4}\Big|_{i,j} = \frac{\Phi_{i+2,j} - 4\Phi_{i+1,j} + 6\Phi_{i,j} - 4\Phi_{i-1,j} + \Phi_{i-2,j}}{(\Delta X)^4} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial Y^4}\Big|_{i,j} = \frac{\Phi_{i,j+2} - 4\Phi_{i,j+1} + 6\Phi_{i,j} - 4\Phi_{i,j-1} + \Phi_{i,j-2}}{(\Delta Y)^4} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi_{i+2,j} - 4\Phi_{i+1,j} + 6\Phi_{i,j} - 4\Phi_{i-1,j} + \Phi_{i-2,j}}{(\Delta X)^4} + \frac{\Phi_{i,j+2} - 4\Phi_{i,j+1} + 6\Phi_{i,j} - 4\Phi_{i,j-1} + \Phi_{i,j-2}}{(\Delta Y)^4} + \\ & + \frac{1}{72(\Delta X)^2(\Delta Y)^2} \left[(\Phi_{i+2,j+2} - 16\Phi_{i+2,j+1} + 30\Phi_{i+2,j} - 16\Phi_{i+2,j-1} + \Phi_{i+2,j-2}) - 16(\Phi_{i+1,j+2} - 16\Phi_{i+1,j+1} + 30\Phi_{i+1,j} - 16\Phi_{i+1,j-1} + \Phi_{i+1,j-2}) + \right. \\ & \left. + 30(\Phi_{i,j+2} - 16\Phi_{i,j+1} + 30\Phi_{i,j} - 16\Phi_{i,j-1} + \Phi_{i,j-2}) - 16(\Phi_{i-1,j+2} - 16\Phi_{i-1,j+1} + 30\Phi_{i-1,j} - 16\Phi_{i-1,j-1} + \Phi_{i-1,j-2}) + \right. \\ & \left. + (\Phi_{i-2,j+2} - 16\Phi_{i-2,j+1} + 30\Phi_{i-2,j} - 16\Phi_{i-2,j-1} + \Phi_{i-2,j-2}) \right] = -1 \end{aligned} \quad (7)$$

Граничные условия (2) накладываемые на искомую функцию приобретут вид

$$\Phi_{0,j} = \Phi_{i,0} = \Phi_{i,n} = 0, \quad i = 0, n, j = 0, n. \quad (8)$$

Граничные условия накладываемые на частные производные первого порядка получим, используя разностные операторы для левой и правой границ

$$\frac{\partial\Phi}{\partial X}\Big|_{i,0} = \frac{-3\Phi_{i,0} + 4\Phi_{i,1} - \Phi_{i,2}}{2\Delta X}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (9)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial X}\Big|_{i,n} = \frac{3\Phi_{i,n} - 4\Phi_{i,n-1} + \Phi_{i,n-2}}{2\Delta X}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (10)$$

Для верхней и нижней границ будем иметь соответственно

$$\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\Big|_{0,j} = \frac{-3\Phi_{0,j} + 4\Phi_{1,j} - \Phi_{2,j}}{2\Delta Y}, \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (11)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\Big|_{n,j} = \frac{3\Phi_{n,j} - 4\Phi_{n-1,j} + \Phi_{n-2,j}}{2\Delta Y}, \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (12)$$

Заменим в уравнении (3) производные их конечно-разностными аналогами (9) – (12). Тогда, учитывая уравнение (8), граничные условия на производные примут вид

$$\Phi_{i,1} = \frac{1}{4}\Phi_{i,2}, \quad \Phi_{i,n-1} = \frac{1}{4}\Phi_{i,n-2}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (13)$$

$$\Phi_{1,j} = \frac{1}{4}\Phi_{2,j}, \quad \Phi_{n-1,j} = \frac{1}{4}\Phi_{n-2,j}, \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (14)$$

В итоге непрерывная краевая задача (1) – (3) свелась к конечно-разностной схеме (7), (8), (13), (14).

Вычисление погрешности аппроксимации

На равномерной сетке $\Delta X = \Delta Y = h$ обозначим

$$B_h = \frac{\partial^4\Phi}{\partial X^4}\Big|_{i,j} + 2\frac{\partial^4\Phi}{\partial X^2\partial Y^2}\Big|_{i,j} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial Y^4}\Big|_{i,j}$$

Конечно-разностный аналог смешанной производной

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4\Phi}{\partial X^2\partial Y^2}\Big|_{i,j} = & \frac{1}{144(\Delta X)^2(\Delta Y)^2} \left[(\Phi_{i+2,j+2} - 16\Phi_{i+2,j+1} + 30\Phi_{i+2,j} - 16\Phi_{i+2,j-1} + \Phi_{i+2,j-2}) - 16(\Phi_{i+1,j+2} - 16\Phi_{i+1,j+1} + \right. \\ & + 30\Phi_{i+1,j} - 16\Phi_{i+1,j-1} + \Phi_{i+1,j-2}) + 30(\Phi_{i,j+2} - 16\Phi_{i,j+1} + 30\Phi_{i,j} - 16\Phi_{i,j-1} + \Phi_{i,j-2}) - 16(\Phi_{i-1,j+2} - 16\Phi_{i-1,j+1} + \\ & + 30\Phi_{i-1,j} - 16\Phi_{i-1,j-1} + \Phi_{i-1,j-2}) + (\Phi_{i-2,j+2} - 16\Phi_{i-2,j+1} + 30\Phi_{i-2,j} - 16\Phi_{i-2,j-1} + \Phi_{i-2,j-2}) \left. \right] \end{aligned} \quad (6)$$

Подставив в уравнение (1) аппроксимации производных (4)–(6), получим разностное уравнение

Тогда уравнение (7) примет вид

$$B_h\Phi = -1$$

Чтобы определить погрешность аппроксимации образуем разность $z = u - v$, где u – решение задачи (7), (8), (13), (14), а v – решение задачи (1)–(3). Подставляя $u = z + v$ в уравнение, получим для z задачу

$$Bu = B(z + v) = Bz + Bv = -1, \quad Bz = -\varepsilon_B$$

во внутренних узлах сетки и для z выполнены граничные условия (8), (13), (14), где $\varepsilon_B = B_h v + 1$ – погрешность аппроксимации задачи (1)–(3) схемой (7), (8), (13), (14). Так как $\Delta^2 v + 1 = 0$, то

$$\varepsilon_B = Bv + 1 - \Delta^2 v - 1 = Bv - \Delta^2 v.$$

Вычислим погрешность аппроксимации почленно, используя разложение по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, в окрестности i, j -того узла:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 v}{\partial X^4}\Big|_{i,j} - \frac{\partial^4 v(X, Y)}{\partial X^4} = \\ = \frac{h^2}{6} \frac{\partial^6 v}{\partial X^6} [h(i + \eta), jh], \quad 0 < \eta < 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 v}{\partial Y^4}\Big|_{i,j} - \frac{\partial^4 v(X, Y)}{\partial Y^4} = \\ = \frac{h^2}{6} \frac{\partial^6 v}{\partial Y^6} [ih, h(j + \sigma)], \quad 0 < \sigma < 1, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^4 v}{\partial X^2\partial Y^2}\Big|_{i,j} - \frac{\partial^4 v(X, Y)}{\partial X^2\partial Y^2} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{17h^4}{756} \left\{ \frac{\partial^8 v}{\partial Y^8} [(i+\eta)h, hj] + \frac{\partial^8 v}{\partial Y^8} [ih, h(j+\sigma)] \right\} - \\
 &\quad - \frac{34h^4}{189} \left\{ \frac{\partial^8 v}{\partial X^7 \partial Y} [(i+\eta)h, h(j+\sigma)] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial^8 v}{\partial Y^7 \partial X} [(i+\eta)h, h(j+\sigma)] \right\} - \\
 &\quad - \frac{167h^4}{270} \left\{ \frac{\partial^8 v}{\partial X^6 \partial Y^2} [(i+\eta)h, h(j+\sigma)] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial^8 v}{\partial Y^6 \partial X^2} [(i+\eta)h, h(j+\sigma)] \right\} - \\
 &\quad - \frac{34h^4}{27} \left\{ \frac{\partial^8 v}{\partial X^5 \partial Y^3} [(i+\eta)h, h(j+\sigma), k\tau] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial^8 v}{\partial Y^5 \partial X^3} [(i+\eta)h, h(j+\sigma), k\tau] \right\} + \\
 &\frac{85h^4}{54} \frac{\partial^8 v}{\partial X^4 \partial Y^4} [(i+\eta)h, h(j+\sigma)], 0 < \eta < 1, 0 < \sigma < 1.
 \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \max_{(X,Y) \in \bar{D}} \left| \frac{\partial^6 v(X,Y)}{\partial X^6} \right|, \quad M_2 = \max_{(X,Y) \in \bar{D}} \left| \frac{\partial^6 v(X,Y)}{\partial Y^6} \right|, \\
 M_3 &= \min_{(X,Y) \in \bar{D}} \left| \frac{\partial^{m+n} v(X,Y)}{\partial X^m \partial Y^n} \right|, \quad m, n = 1, 3, 5, 7, m+n = 8; \\
 M_4 &= \max_{(X,Y) \in \bar{D}} \left| \frac{\partial^{m+n} v(X,Y)}{\partial X^m \partial Y^n} \right|, \quad m, n = 2, 4, 6, 8, m+n = 8.
 \end{aligned}$$

Поскольку бигармонический оператор симметричен $M_1 = M_2$. Обозначим $\tilde{M}_1 = M_1/3$, $\tilde{M}_2 = (5398/945)M_4 - (1088/189)M_3$, тогда

$$|\varepsilon_B| \leq \tilde{M}_1 h^2 + \tilde{M}_2 h^4. \quad (15)$$

Таким образом, разностный оператор аппроксимирует бигармонический со 2 порядком.

Граничное условие (2) на искомую функцию с учетом (8) аппроксимируется точно. Погрешность аппроксимации граничного условия (3) уравнениями (13) и (14) оценим используя разложение по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, в окрестности i, j -того узла:

$$\frac{\partial v}{\partial X} \Big|_{i,j} - \frac{\partial v}{\partial X} = \frac{2}{3} h^2 \frac{\partial^3 v}{\partial X^3} [h(i+\eta), jh], \quad 0 < \eta < 1.$$

Обозначим

$$M = \max_{(X,Y) \in \bar{D}} \left| \frac{\partial^3 v(X,Y)}{\partial X^3} \right|,$$

тогда $|\varepsilon_T| \leq Mh^2$.

Итак, граничное условие (2) аппроксимируется также со вторым порядком, поэтому конечно-разностная схема (7), (8), (13), (14) аппроксимирует краевую задачу (1)–(3) со вторым порядком точности.

Анализ решений

Решение задачи (7), (8), (13), (14) вычислено с помощью системы компьютерной алгебры Maple для равномерной сетки с шагом $h = 1/120$. На рисунке 1 показан график решения, а на рисунке 2 его профиль в сечениях плоскостями $X = 0.5$ и $Y = 0.5$. На рисунке 3 показаны профили решения в сечениях плоскостью $Y = X$ и $Y = 1 - X$. По графикам видно, что решение симметрично относительно центральной точки $(0.5; 0.5)$, в которой достигается минимум равный $-1.22 \cdot 10^{-3}$.

В таблице 1 показана зависимость минимума функции от числа значимых цифр в расчете, т.е. фактически от погрешности округления. Расчет выполнен для сетки размерностью 81×81 точек. В столбце относительная разница минимумов функции показано насколько процентов результат отличается от предыдущего.

Здесь же приведено время расчета и его относительное изменение. По таблице видно, что при увеличении числа значащих цифр с 14 до 16 время расчета увеличивается на 166% а точность всего на $3 \cdot 10^{-6} \%$. Эти данные говорят о том, что дальнейшее уменьшение погрешности округления приведет к значительному увеличению времени расчета при неизменном результате. Таким образом, 14 значащих цифр - оптимальным значение.

В таблице 2 отражена зависимость минимального значения функции от величины шага сетки и относительная разница минимумов функции. Здесь же приведено время расчета и его относительное изменение. Расчет выполнен с 14 значащими цифрами. Уменьшение относительной разницы минимумов функции по экспоненциальному закону свидетельствует о быстрой сходимости конечно-разностной схемы.

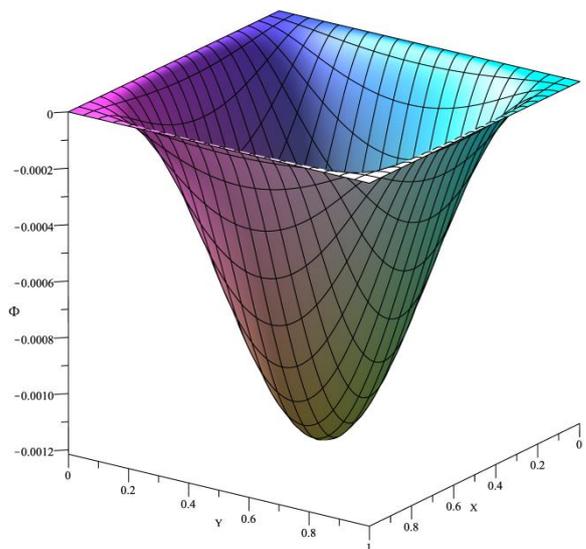


Рисунок 1. График решения

Figure 1. Solution graph

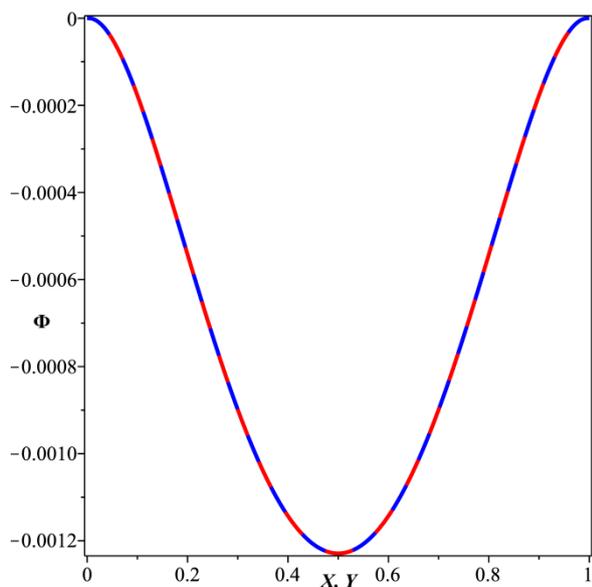


Рисунок 2. Профиль решения в сечении $X = 0.5$

Figure 2. Solution profile in section $X = 0.5$

Уменьшение относительного приращения времени расчета позволяет сделать расчеты более точными. Однако уменьшение шага сетки требует увеличения значащих цифр, поэтому значение шага $1/120$ является оптимальным

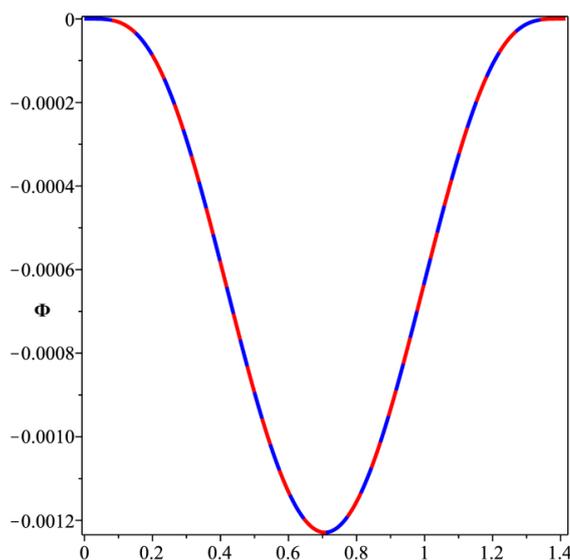


Рисунок 3. Профили решения в сечениях $y = x$ (красный) и $y = 1 - x$ (синий)

Figure 3. Solution profile in section $y = x$ (red) and $y = 1 - x$ (blue)

Полученный результат согласуется с численным решением данной задачи по явной схеме [10] и приближенно-аналитическим решением [11]. Значение функции в центральной точке для которых равны $-1.05 \cdot 10^{-3}$ и $-1.25 \cdot 10^{-3}$ соответственно.

Таблица 1.

Погрешность округления

Table 1.

Rounding error

Число значащих цифр Number of significant digits	Минимум функции The minimum of a function	Относительная разница минимумов функции, % The minimum of the relative difference in the minimum of a function, %	Время расчета Calculation time	Относительная разница времени расчета, % Relative time difference calculation, %
8	-0.0012409828		333.687	
10	-0.001202252713	-3.12	324.56	-2.74
12	-0.00120187713348	-0.03	326.96	0.74
14	-0.0012018733801815	-0.0003	332.969	1.84
16	-0.001201873342732467	$-3 \cdot 10^{-6}$	888.996	166.99

Таблица 2.

Скорость сходимости

Table 2.

Rate of convergence

Шаг сетки Grid spacing	Минимум функции The minimum of a function	Относительная разница минимумов функции, % The minimum of the relative difference in the minimum of a function, %	Время расчета Calculation time	Относительная разница времени расчета, % Relative time difference calculation, %
1/20	-0.0010105920924147		1.357	
1/40	-0.0011381686297206	12.62393987	14.165	943.8467208
1/60	-0.0011806597334856	3.733287131	86.44	510.2364984
1/80	-0.0012018733801815	1.796762133	332.969	285.2024527
1/100	-0.0012145881472324	1.057912357	1090.431	227.4872436
1/120	-0.0012230583683455	0.6973739223	3259.407	198.9099723

Заключение

С помощью неявной конечно-разностной схемы получено решение неоднородного бигармонического уравнения. Путем разложения функции в ряд Тейлора вычислена погрешность аппроксимации бигармонического оператора разностным аналогом и погрешность аппроксимации граничных условий. Проведен анализ скорости сходимости схемы. Преимущества использования данной неявной схемы по сравнению с явной заключаются в ее абсолютной

устойчивости. Доказательство устойчивости явных схем порой весьма затруднительно. Отпадает необходимость вычислять нормы разностных операторов для определения оптимального для скорости сходимости шага. Объем вычислений существенно меньше, так как значения в узлах вычисляются один раз, а не на каждом шаге. Это позволяет экономить ресурсы процессора и время расчета, а также уменьшить погрешность результата за счет уменьшения числа округлений.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Завьялов В.Н., Мартынов Е.А., Романовский В.М. Основы строительной механики пластин: учебное пособие. Омск: СибАДИ, 2012. 116 с.
- 2 Шафарец Е.Б., Шафарец Б.П. Свободная конвекция учет некоторых физических особенностей при моделировании конвективных течений с помощью вычислительных пакетов // Научное приборостроение. 2014. Т. 24. №2. С. 43–51.
- 3 Гоц А.Н. Численные методы расчета в энергомашиностроении. Владимир: Изд-во ВлГУ, 2013. 182 с.
- 4 Jani S., Mahmoodi M., Amini M., Jam J. Numerical investigation of natural convection heat transfer in a symmetrically cooled square cavity with a thin fin on its bottom wall // Thermal science. 2014. V. 18. №. 4. P. 1119-1132.
- 5 Gros T., Revnic C., Pop I., Ingham D.B. Free convection heat transfer in a square cavity filled with a porous medium saturated by a nanofluid // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2015. V. 87. P. 36–41.
- 6 Алгазин С.Д. Численные алгоритмы классической математической физики. М.: Диалог-МИФИ, 2010. 240 с.
- 7 Mu L., Wang J., Ye X. Effective implementation of the weak Galerkin finite element methods for the biharmonic equation // Computers & Mathematics with Applications. 2017. V. 74. №. 6. P. 1215-1222.
- 8 Doss L. J. T., Kousalya N. Finite Pointset Method for biharmonic equations // Computers & Mathematics with Applications. 2018. V. 75. №. 10. P. 3756-3785.
- 9 Doss L. J. T., Kousalya N., Sundar S. A Finite Pointset Method for Biharmonic Equation Based on Mixed Formulation // International Journal of Computational Methods. 2017. P. 1850068.
- 10 Рязжских В.И., Слюсарев М.И., Попов М.И. Численное интегрирование бигармонического уравнения в квадратной области // Вестник Санкт-Петербургского университета. 2013. № 10. V. 1. P. 52–62.
- 11 Попов М.И., Соболева Е.А. Приближенное аналитическое решение внутренней задачи кондуктивно-ламинарной свободной конвекции // Вестник ВГУИТ. 2016. № 4. С. 78–84.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Михаил И. Попов к.ф.-м.н., старший преподаватель, кафедра высшей математики и информационных технологий, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия, mihail_semilov@mail.ru

КРИТЕРИЙ АВТОРСТВА

Михаил И. Попов Полностью подготовил рукопись и несет ответственность за плагиат

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

ПОСТУПИЛА 10.03.2018

ПРИНЯТА В ПЕЧАТЬ 02.04.2018

REFERENCES

- 1 Zavalov V.N., Martinov E.A., Romanovskiy V.M. Osnovi stroitelnoy mehaniki plastin [Fundamentals of structural mechanics of plates]. Omsk, SibADI, 2012, 116 p. (in Russian)
- 2 Shafarets E.B., Shafarets B.P. Free convection taking into account some physical features when modeling convective flows using computational packages. *Nauchnoe priborostroenie* [Scientific instrument engineering], 2014, vol. 24, no 2, pp. 43–51.(in Russian)
- 3 Gots A.N. Chislennye metodi raschota v energomashinostroenii [Numerical methods of calculation in power engineering]. Vladimir, VIGU, 2013, 182 p.
- 4 Jani S., Mahmoodi M., Amini M., Jam J. Numerical investigation of natural convection heat transfer in a symmetrically cooled square cavity with a thin fin on its bottom wall. *Thermal science*, 2014, vol. 18, no. 4, pp. 1119-1132
- 5 Gros T., Revnic C., Pop I., Ingham D.B. Free convection heat transfer in a square cavity filled with a porous medium saturated by a nanofluid. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2015. vol. 87. pp. 36–41.
- 6 Algazin S.D. Chislennye algoritmi klassicheskoi matematicheskoi fiziki [Numerical algorithms of classical mathematical physics]. Moscow, Dialod-MIFI, 2010, 240 p. (in Russian)
- 7 Mu L., Wang J., Ye X. Effective implementation of the weak Galerkin finite element methods for the biharmonic equation. *Computers & Mathematics with Applications*. 2017. vol. 74. no. 6. pp. 1215-1222.
- 8 Doss L. J. T., Kousalya N. Finite Pointset Method for biharmonic equations. *Computers & Mathematics with Applications*. 2018. vol. 75. no. 10. pp. 3756-3785.
- 9 Doss L. J. T., Kousalya N., Sundar S. A Finite Pointset Method for Biharmonic Equation Based on Mixed Formulation. *International Journal of Computational Methods*. 2017. pp. 1850068.
- 10 Ryzhskih V.I., Slusarev M.I., Popov M.I. Numerical integration of a biharmonic equation in square area. *Vestnik Sankt-Petersburgskogo universiteta* [Bulletin of the Saint-Petersburg university], 2013, no. 10, vol. 1, pp. 52–62. (in Russian)
- 11 Popov M.I., Soboleva E.A. The approximate analytical solution of the internal problem of conductive and laminar free convection. *Vestnik Voronezhskogo Universiteta Ingenierih Tehnologiy* [Proceedings of the Voronezh State University of Engineering Technologies], 2016 no. 4, pp. 78–84 (in Russian)

INFORMATION ABOUT AUTHORS

Mikhail I. Popov Cand. Sci. (Phys.-Math.), senior lecturer, higher mathematics and information technology department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, 394036, Russia, mihail_semilov@mail.ru

CONTRIBUTION

Mikhail I. Popov Completely prepared the manuscript and is responsible for plagiarism

CONFLICT OF INTEREST

The author declares no conflict of interest.

RECEIVED 3.10.2018

ACCEPTED 4.2.2018