УДК 536.25

Профессор А.Д. Чернышов, аспирант А.Н. Марченко,
(Воронеж. гос. ун-т. инж. технол.) кафедра высшей математики, тел. (4732) 55-35-54
доцент В.В. Горяйнов
(Воронеж. гос. архитектурно-строительный ун-т) кафедра высшей математики,
тел. (4732) 71-53-62

Решение задачи о деформировании термоупругой пластины методом быстрых разложений

Рассматривается математическая модель для термоупругой пластины при свободном опирании краев. Показано, что данная задача с помощью быстрых разложений сводится к замкнутой алгебраической системе линейных уравнений и тем самым возможно получить приближенное решение в аналитическом виде, которое используется для расчета напряжений в термоупругой пластине.

Consider a mathematical model for thermoelastic plate with free support edges. It is shown that the problem with the rapid degradation is reduced to a closed algebraic system of linear equations and thus obtain approximate solutions in analytical form, which is used to calculate the stresses in the thermoelastic plate.

Ключевые слова: термоупругая пластина, условия согласованности граничных условий, быстрые разложения.

Математическую модель для термоупругой пластины представим следующей системой относительно поперечного перемещения $\tilde{w}$ и температуры $\tilde{T}$:

$$D\left(\frac{\partial^4\tilde{w}}{\partial\tilde{x}^4}+2\frac{\partial^4\tilde{w}}{\partial\tilde{x}^2\partial\tilde{y}^2}+\frac{\partial^4\tilde{w}}{\partial\tilde{y}^4}\right)-\tilde{S}\left(\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{x}^2}+\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{y}^2}\right)+$$
$$+\tilde{\boldsymbol{k}}\tilde{w}=\tilde{q}(\tilde{y})-\tilde{\gamma}\left(\frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial\tilde{x}^2}+\frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial\tilde{y}^2}\right)+\tilde{\alpha}\left(\tilde{T}-T_0\right), \tag{1}$$
$$\frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial\tilde{x}^2}+\frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial\tilde{y}^2}+\tilde{E}_0+\tilde{E}_1\left(\tilde{T}-T_0\right)=0,$$
$$(\tilde{x},\tilde{y})\in\tilde{\Omega}\left([0,a]\times[0,b]\right)$$

где $\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}-$параметры, характеризующие температурное расширение, T_0-начальная температура, $\tilde{\boldsymbol{k}}-$коэффициент упругой постели, $\tilde{S}-$удельное усилие растяжения пластины по контуру, $\tilde{q}(\tilde{y})-$интенсивность равномерно распределенной нагрузки, которая будет определена ниже, $D-$жесткость пластины при изгибе, выражение $\tilde{E}_0+\tilde{E}_1\left(\tilde{T}-T_0\right)$ определяет внутренний источник саморазогревания, представленной линейной зависимостью от температуры.

Запишем граничные условия:

$$\tilde{w}\big|_{x=0}=\left.\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{x}^2}\right|_{\tilde{x}=0}=\tilde{w}\big|_{\tilde{x}=a}=\left.\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{x}^2}\right|_{\tilde{x}=a}=\tilde{w}\big|_{\tilde{y}=0}=$$
$$=\left.\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{y}^2}\right|_{\tilde{y}=0}=\tilde{w}\big|_{\tilde{y}=b}=\left.\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{y}^2}\right|_{\tilde{y}=b}=0 \tag{2}$$

Для представления задачи в безразмерном виде введем следующие обозначения $\tilde{w}=w_0 w$, $\tilde{x}=ax$, $\tilde{y}=by$, $\tilde{S}=SD/a^2$, $\tilde{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{k}D/a^4$, $\tilde{q}(\tilde{y})==q(y)w_0D/a^4$, $\tilde{E}_1=E_1/a^2$, $\tilde{\gamma}=\gamma w_0 D/\left(T_0a^2\right)$, $\tilde{\alpha}=\alpha w_0D/\left(T_0a^4\right)$, $\tilde{T}=T_0T$, $\tilde{E}_0=T_0E_0/a^2$, где величины без тильды сверху являются безразмерными. Тогда система (1) принимает форму:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{a^2}{b^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{a^4}{b^4}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-$$
$$-S\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{a^2}{b^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\boldsymbol{k}w=$$
$$=q(y)-\gamma\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{a^2}{b^2}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+\alpha(T-1), \tag{3}$$
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{a^2}{b^2}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+E_0+E_1(T-1)=0,$$
$$(x,y)\in\Omega\left([0,1]\times[0,1]\right)$$

Граничные условия (2) в безразмерном виде:

$$w\big|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=0} = w\big|_{x=1} = \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=1} = = w\big|_{y=0} = \left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y=0} = w\big|_{y=1} = \left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y=1} = 0 \quad (4)$$

Решение задачи приведено далее.

Для функции $T(x,y)$ в [1] был получен ее аналитический вид:

$$T(x,y) = 1 + \frac{E_0}{2}\left(x - x^2\right) + \sum_{m=1}^{N}\left[\frac{2E_0}{m^3\pi^3}\cdot \left(\left(-1\right)^m - 1\right)\left[\frac{E_1}{E_1 - m^2\pi^2} + \left(1 - \frac{E_1}{E_1 - m^2\pi^2}\right)\cdot \left(\frac{e^{\sqrt{m^2\pi^2 - E_1}\cdot\frac{b}{a}y}}{1 + e^{\sqrt{m^2\pi^2 - E_1}\cdot\frac{b}{a}}} + \frac{e^{-\sqrt{m^2\pi^2 - E_1}\cdot\frac{b}{a}y}}{1 + e^{-\sqrt{m^2\pi^2 - E_1}\cdot\frac{b}{a}}}\right)\right]\right]\sin\left(m\pi x\right) \quad (5)$$

Представим $w(x,y)$ быстрым разложением по синусам в виде суммы граничной функции $M_4^{(w)}(x,y)$ (так как дифференциальное уравнение для w 4-го порядка) и быстро сходящегося ряда Фурье [2]-[3]:

$$w(x,y) = M_4^{(w)}(x,y) + \sum_{m=1}^{N} W_m(y)\sin(m\pi x), \quad (6)$$

$$M_4^{(w)}(x,y) = w(0,y)(1-x) + w(1,y)x + w_{xx}(0,y)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x}{3}\right) + w_{xx}(1,y)\cdot \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6}\right) + w_{xxxx}(0,y)\left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{18} + \frac{x}{45}\right) + w_{xxxx}(1,y)\left(\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{36} + \frac{7x}{360}\right) \quad (7)$$

Для удобства дальнейших рассмотрений обозначим $w(0,y) = A_1(y)$, $w(1,y) = A_2(y)$, $w_{xx}(0,y) = A_3(y)$, $w_{xx}(1,y) = A_4(y)$, $w_{xxxx}(0,y) = A_5(y)$, $w_{xxxx}(1,y) = A_6(y)$.

Тогда представление (6) примет форму:

$$w(x,y) = A_1(y)(1-x) + A_2(y)x + A_3(y)\cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x}{3}\right) + A_4(y)\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6}\right) + A_5(y)\cdot \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{18} + \frac{x}{45}\right) + A_6(y)\cdot \left(\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{36} + \frac{7x}{360}\right) + \sum_{m=1}^{N} W_m(y)\sin(m\pi x) \quad (8)$$

Быстрое разложение в форме (8) подставим в (3) и в граничные условия (4):

$$A_5(y)(1-x) + A_6(y)x + \sum_{m=1}^{N} W_m(y)m^4\pi^4 \cdot \sin(m\pi x) + 2\frac{a^2}{b^2}\Bigg(A_3''(y)(1-x) + A_4''(y)x + A_5''(y)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x}{3}\right) + A_6''(y)\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6}\right) - \sum_{m=1}^{N} W_m''(y)m^2\pi^2\sin(m\pi x)\Bigg) + \frac{a^4}{b^4}\Bigg(A_1(y)\cdot (1-x) + A_2(y)x + A_3(y)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x}{3}\right) + A_4(y)\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6}\right) + A_5^{(4)}(y)\cdot \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{18} + \frac{x}{45}\right) + A_6^{(4)}(y)\cdot \left(\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{36} + \frac{7x}{360}\right) + \sum_{m=1}^{N} W_m^{(4)}(y)\sin(m\pi x)\Bigg) - S\Bigg(A_3(y)(1-x) + A_4(y)x + A_5(y)\cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x}{3}\right) + A_6(y)\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6}\right) - \sum_{m=1}^{N} W_m(y)\cdot m^2\pi^2\sin(m\pi x) + \frac{a^2}{b^2}\Bigg(A_1''(y)(1-x) + A_2''(y)x + A_3''(y)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x}{3}\right) + A_4''(y)\cdot \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6}\right) + A_5''(y)\left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{18} + \frac{x}{45}\right) + A_6''(y)\left(\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{36} + \frac{7x}{360}\right) + \sum_{m=1}^{N} W_m''(y)\cdot \sin(m\pi x)\Bigg)\Bigg) + \boldsymbol{k}\Bigg(A_1(y)(1-x) + A_2(y)x + A_3(y)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x}{3}\right) + A_4(y)\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6}\right) + A_5(y)\left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{18} + \frac{x}{45}\right) + A_6(y)\cdot \left(\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{36} + \frac{7x}{360}\right) + \sum_{m=1}^{N} W_m(y)\sin(m\pi x)\Bigg) = = q(y) - \gamma\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{a^2}{b^2}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + \alpha(T - 1) \quad (9)$$

$$w\big|_{x=0}=A_1(y)=0,\ w\big|_{x=1}=A_2(y)=0,$$
$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=0}=A_3(y)=0,\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=1}=A_4(y)=0 \quad (10)$$

$$w\big|_{y=0}=A_5(0)\left(\frac{x^4}{24}-\frac{x^5}{120}-\frac{x^3}{18}+\frac{x}{45}\right)+A_6(0)\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{x^5}{120}-\frac{x^3}{36}+\frac{7x}{360}\right)+\sum_{m=1}^{N}W_m(0)\sin(m\pi x)=0,$$
$$w\big|_{y=1}=A_5(1)\left(\frac{x^4}{24}-\frac{x^5}{120}-\frac{x^3}{18}+\frac{x}{45}\right)+A_6(1)\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{x^5}{120}-\frac{x^3}{36}+\frac{7x}{360}\right)+\sum_{m=1}^{N}W_m(1)\sin(m\pi x)=0,$$
$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y=0}=A_5''(0)\left(\frac{x^4}{24}-\frac{x^5}{120}-\frac{x^3}{18}+\frac{x}{45}\right)+$$
$$A_6''(0)\left(\frac{x^5}{120}-\frac{x^3}{36}+\frac{7x}{360}\right)+$$
$$+\sum_{m=1}^{N}W_m''(0)\sin(m\pi x)=0,$$
$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y=1}=A_5''(1)\left(\frac{x^4}{24}-\frac{x^5}{120}-\frac{x^3}{18}+\frac{7x}{45}\right)+$$
$$A_6''(1)\left(\frac{x^5}{120}-\frac{x^3}{36}+\frac{7x}{360}\right)+ \quad (11)$$
$$+\sum_{m=1}^{N}W_m''(1)\sin(m\pi x)=0$$

К уравнению (9) применим метод быстрых разложений [2], который заключается в следующем. Обозначим левую и правую части (9) через $F(x,y)$ и $P(x,y)$, т.е:

$$F(x,y)=P(x,y) \quad (12)$$

Равенство (9) должно выполняться при любых значениях $x\in[0,1],\ y\in[0,1]$. В этом уравнении присутствуют четвертая и более младшие производные от ряда Фурье из (6). Так как ряд Фурье в (6) строился с граничной функцией четвертого порядка $M_4^{(w)}(x,y)$, то этот ряд вместе со всеми четными производными до четвертого порядка включительно точно сходится на границе при $x=0$ и $x=1$; шестая производная от этого ряда внутри интервала $(0,1)$ сходится, а на границе может расходиться. Поэтому $F(x,y),\ P(x,y)$ следует представить быстрым разложением по синусам в виде суммы граничной функции нулевого порядка $M_0^{(F)}(x,y)$, $M_0^{(P)}(x,y)$ и ряда Фурье, т.е.:

$$F(x,y)=F(0,y)(1-x)+F(1,y)x+$$
$$+\sum_{m=1}^{N}F_m(y)\sin(m\pi x),$$
$$P(x,y)=P(0,y)(1-x)+P(1,y)x+ \quad (13)$$
$$+\sum_{m=1}^{N}P_m(y)\sin(m\pi x)$$

Из равенства (12) следует равенство коэффициентов разложения в (13), т.е. $F(0,y)=P(0,y),\ F(1,y)=P(1,y),\ F_m(y)=$ $=P_m(y),\ m=1,...,N$. Для получения этих равенств необходимо в (9) положить $x=0$ и $x=1$, а также умножить (9) на $\sin(n\pi x),\ n=1,...,N$ и проинтегрировать по переменной $x\in[0,1]$.

Согласно вышеизложенным рассуждениям из (9) при $x=0$ и $x=1$ найдем:

$$A_5(y)=q(y)+\gamma E_0,\quad A_6(y)=q(y)+\gamma E_0 \quad (14)$$

Из (14) при $y=0$ и $y=1$ получим:

$$A_5(0)=A_6(0)=q(0)+\gamma E_0,$$
$$A_5(1)=A_6(1)=q(1)+\gamma E_0 \quad (15)$$

Чтобы воспользоваться равенством $F_m(y)=P_m(y),\ m=1,...,N$, предварительно определим функцию $q(y)$. Стороны прямоугольной области Ω при $x=0$, $x=1$ разобьем на три участка с помощью искусственно введенной малой величины ε

$$0\le y\le\varepsilon\cup\varepsilon\le y\le 1-\varepsilon\cup 1-\varepsilon\le y\le 1 \quad (16)$$

Функция $q(y)$ должна удовлетворять условиям согласования граничных условий (4) и первого дифференциального уравнения из (3). К выражениям (11) применим оператор быстрых разложений 4-го порядка. Для этого от условий при $y=0$, $y=1$ возьмем производные по x нулевого, второго и четвертого порядков. В получившиеся уравнения подставим $x=0$, $x=1$, а также умножим их на $\sin(n\pi x)$, $n=1,...,N$ и проинтегрируем по переменной $x\in[0,1]$. В результате получим:

$$
\begin{aligned}
&A_5(0)=0, A_6(0)=0, W_m(0)=0,\ m=1,...,N,\\
&A_5(1)=0,\ A_6(1)=0, W_m(1)=0,\ m=1,...,N,\\
&A_5''(0)=0,\ A_6''(0)=0, W_m''(0)=0,\ m=1,...,N,\\
&A_5''(1)=0,\ A_6''(1)=0, W_m''(1)=0,\ m=1,...,N
\end{aligned} \tag{17}
$$

Условия согласованности будут выполнены, если зависимость $q(y)$ не приведет к противоречию в угловых точках прямоугольной области. Отсюда вытекают следующие равенства:

$$q(0)=-\gamma E_0,\ q(1)=-\gamma E_0, \tag{18}$$

$$q(\varepsilon)=q_0,\ q(1-\varepsilon)=q_0 \tag{19}$$

$$q''(0)=0,\ q''(1)=0 \tag{20}$$

$$
\begin{aligned}
&q'(\varepsilon)=...=q^{(4)}(\varepsilon)=0,\\
&q'(1-\varepsilon)=...=q^{(4)}(1-\varepsilon)=0
\end{aligned} \tag{21}
$$

Одна из простых зависимостей функции $q(y)$, которая удовлетворяет полученным условиям (18)–(21), имеет следующий вид:

$$
q(y)=\begin{cases}
q_0+(q_0+\gamma E_0)\dfrac{3(y-\varepsilon)^5}{\varepsilon^5}+\\
+(q_0+\gamma E_0)\dfrac{2(y-\varepsilon)^6}{\varepsilon^6}\\
\quad \textit{при}\ 0\le y\le\varepsilon,\\
q_0\ \ \textit{при}\ \ \varepsilon\le y\le 1-\varepsilon\ ,\\
q_0+(q_0+\gamma E_0)\dfrac{3(y-1+\varepsilon)^5}{\varepsilon^5}+(q_0+\\
+\gamma E_0)\dfrac{2(y-1+\varepsilon)^6}{\varepsilon^6}\ ,\\
\quad \textit{при}\ 1-\varepsilon\le y\le 1
\end{cases} \tag{22}
$$

Для реализации равенства $F_m(y)=P_m(y),\ m=1,...,N$ умножим (9) на $\sin(n\pi x),\ n=1,...,N$ и проинтегрируем по переменной $x\in[0,1]$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\gamma E_0}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)+W_n(y)\frac{n^4\pi^4}{2}-\frac{2a^2q''(y)}{b^2n^3\pi^3}\cdot\\
&\cdot\left(1-(-1)^n\right)-\frac{a^2}{b^2}n^2\pi^2W_n''(y)+\frac{a^4q^{(4)}(y)}{b^4n^5\pi^5}\cdot\\
&\cdot\left(1-(-1)^n\right)+\frac{a^4}{2b^4}W_n^{(4)}(y)-S\left(\frac{\left((-1)^n-1\right)}{n^3\pi^3}\cdot\right.\\
&\cdot\left(q(y)+\gamma E_0\right)-W_n(y)\frac{n^2\pi^2}{2}+\frac{a^2q''(y)}{b^2n^5\pi^5}\cdot\\
&\left.\cdot\left(1-(-1)^n\right)+\frac{a^2}{2b^2}W_n''(y)\right)+\boldsymbol{k}\left(\frac{\left(1-(-1)^n\right)}{n^5\pi^5}\cdot\right.\\
&\left.\cdot\left(q(y)+\gamma E_0\right)+\frac{W_n(y)}{2}\right)=-\gamma\int_0^1\left(\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{a^2}{b^2}\frac{\partial^2T}{\partial y^2}\right)\cdot\\
&\cdot\sin(n\pi x)\,dx+\alpha\int_0^1(T-1)\sin(n\pi x)\,dx
\end{aligned} \tag{23}
$$

В результате получим обыкновенные дифференциальные уравнения четвертого порядка от одной переменной y. Для решения этой системы повторно применим метод быстрых разложений к каждой из неизвестных функций $W_n(y),\ n=1,...,N$. С этой целью сначала представим $W_n(y),\ n=1,...,N$ разложением по синусам в виде суммы граничной функции $M_4^{(W_n)}(y)$ и ряда Фурье:

$$W_n(y)=M_4^{(W_n)}(y)+\sum_{l=1}^{N}W_{n,l}\sin(l\pi y) \tag{24}$$

$$
\begin{aligned}
&M_4^{(W_n)}(y)=W_n(0)(1-y)+W_n(1)y+\\
&W_n''(0)\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6}-\frac{y}{3}\right)+W_n''(1)\left(\frac{y^3}{6}-\frac{y}{6}\right)+\\
&+W_n^{(4)}(0)\left(\frac{y^4}{24}-\frac{y^5}{120}-\frac{y^3}{18}+\frac{y}{45}\right)+\\
&+W_n^{(4)}(1)\left(\frac{y^5}{120}-\frac{y^3}{36}+\frac{7y}{360}\right)
\end{aligned} \tag{25}
$$

Тогда представление (24) с учетом (17) примет более удобную форму:

$$
\begin{aligned}
&W_n(y)=W_n^{(4)}(0)\left(\frac{y^4}{24}-\frac{y^5}{120}-\frac{y^3}{18}+\frac{y}{45}\right)+\\
&+W_n^{(4)}(1)\left(\frac{y^5}{120}-\frac{y^3}{36}+\frac{7y}{360}\right)+\sum_{l=1}^{N}W_{n,l}\sin(l\pi y)
\end{aligned} \tag{26}
$$

Найдем функции $W_n''(y),\ W_n^{(4)}(y)$:

$$
\begin{aligned}
&W_n''(y)=W_n^{(4)}(0)\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6}-\frac{y}{3}\right)+\\
&+W_n^{(4)}(1)\left(\frac{y^3}{6}-\frac{y}{6}\right)-\sum_{l=1}^{N}W_{n,l}l^2\pi^2\sin(l\pi y)
\end{aligned} \tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
&W_n^{(4)}(y)=W_n^{(4)}(0)(1-y)+\\
&+W_n^{(4)}(1)y+\sum_{l=1}^{N}W_{n,l}l^4\pi^4\sin(l\pi y)
\end{aligned} \tag{28}
$$

Подставим в (23) выражения (26)–(28):

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma E_0}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)+\frac{n^4\pi^4}{2}\left(W_n^{(4)}(0)\left(\frac{y^4}{24}-\frac{y^5}{120}-\right.\right.\\
&\left.-\frac{y^3}{18}+\frac{y}{45}\right)+W_n^{(4)}(1)\left(\frac{y^5}{120}-\frac{y^3}{36}+\frac{7y}{360}\right)+\\
&\left.+\sum_{l=1}^{N}W_{n,l}\sin(l\pi y)\right)-\frac{2a^2q''(y)}{b^2n^3\pi^3}\left(1-(-1)^n\right)-\\
&-\frac{a^2}{b^2}n^2\pi^2\left(W_n^{(4)}(0)\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6}-\frac{y}{3}\right)+W_n^{(4)}(1)\cdot\right.\\
&\left.\cdot\left(\frac{y^3}{6}-\frac{y}{6}\right)-\sum_{l=1}^{N}W_{n,l}l^2\pi^2\sin(l\pi y)\right)+\frac{a^4q^{(4)}(y)}{b^4n^5\pi^5}\\
&\cdot\left(1-(-1)^n\right)+\frac{a^4}{2b^4}\left(W_n^{(4)}(0)(1-y)+\right.\\
&\left.+W_n^{(4)}(1)y+\sum_{l=1}^{N}W_{n,l}l^4\pi^4\sin(l\pi y)\right)-\\
&-S\left(\frac{\left((-1)^n-1\right)}{n^3\pi^3}\left(q(y)+\gamma E_0\right)-\frac{n^2\pi^2}{2}\cdot\right.\\
&\cdot\left(W_n^{(4)}(0)\left(\frac{y^4}{24}-\frac{y^5}{120b}-\frac{by^3}{18}+\frac{b^3y}{45}\right)+\right.\\
&+W_n^{(4)}(1)\left(\frac{y^5}{120}-\frac{y^3}{36}+\frac{7y}{360}\right)+\\
&\left.+\sum_{l=1}^{N}W_{n,l}\sin(l\pi y)\right)+\frac{a^2q''(y)}{b^2n^5\pi^5}\left(1-(-1)^n\right)+\\
&+\frac{a^2}{2b^2}\left(W_n^{(4)}(0)\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6}-\frac{y}{3}\right)+W_n^{(4)}(1)\cdot\right.\\
&\left.\left.\cdot\left(\frac{y^3}{6}-\frac{y}{6}\right)-\sum_{l=1}^{N}W_{n,l}l^2\pi^2\sin(l\pi y)\right)\right)+\\
&+\boldsymbol{k}\left(\frac{\left(1-(-1)^n\right)}{n^5\pi^5}\left(q(y)+\gamma E_0\right)+\frac{1}{2}\left(W_n^{(4)}(0)\cdot\right.\right.\\
&\cdot\left(\frac{y^4}{24}-\frac{y^5}{120}-\frac{y^3}{18}+\frac{y}{45}\right)+W_n^{(4)}(1)\cdot\\
&\left.\left.\cdot\left(\frac{y^5}{120}-\frac{y^3}{36}+\frac{7y}{360}\right)+\sum_{l=1}^{N}W_{n,l}\sin(l\pi y)\right)\right)= \qquad (29)\\
&=-\gamma\int_0^1\left(\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{a^2}{b^2}\frac{\partial^2T}{\partial y^2}\right)\sin(n\pi x)dx+\\
&+\alpha\int_0^1(T-1)\sin(n\pi x)dx
\end{aligned}$$

Теперь в (23) положим $y=0$ и $y=1$

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma E_0}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)+\frac{360a^4\left(q_0+\gamma E_0\right)}{\varepsilon^4b^4n^5\pi^5}\cdot\\
&\cdot\left(1-(-1)^n\right)+\frac{a^4W_n^{(4)}(0)}{2b^4}=\\
&=-\gamma\int_0^1\left(\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{a^2}{b^2}\frac{\partial^2T}{\partial y^2}\right)\sin(n\pi x)dx\bigg|_{y=0}+ \qquad (30)\\
&+\alpha\int_0^1(T-1)\sin(n\pi x)dx\bigg|_{y=0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma E_0}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)+\frac{360a^4\left(q_0+\gamma E_0\right)}{\varepsilon^4b^4n^5\pi^5}\cdot\\
&\cdot\left(1-(-1)^n\right)+\frac{a^4}{2b^4}W_n^{(4)}(0)=\\
&=-\gamma\int_0^1\left(\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{a^2}{b^2}\frac{\partial^2T}{\partial y^2}\right)\sin(n\pi x)dx\bigg|_{y=1}+ \qquad (31)\\
&+\alpha\int_0^1(T-1)\sin(n\pi x)dx\bigg|_{y=1}
\end{aligned}$$

Из (30)–(31) следует, что:

$$\begin{aligned}
&W_n^{(4)}(0)=W_n^{(4)}(1)=\frac{720\left(q_0+\gamma E_0\right)}{\varepsilon^4n^5\pi^5}\cdot\\
&\cdot\left((-1)^n-1\right) \qquad (32)
\end{aligned}$$

В соответствии с методом быстрых разложений, получившееся дифференциальное уравнение (29) умножим на $\sin(k\pi y)$, $k=1,...,N$ и проинтегрируем по переменной $y\in[0,1]$

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma E_0}{nk\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)\left(1-(-1)^k\right)+\frac{n^4\pi^4}{2}\left(\frac{W_n^{(4)}(0)}{k^5\pi^5}\cdot\right.\\
&\left.\cdot\left(1-(-1)^k\right)+\frac{W_{n.k}}{2}\right)-\\
&-\frac{2a^2}{b^2n^3\pi^3}\left(1-(-1)^n\right)\int_0^1 q''(y)\sin(k\pi y)dy-\\
&-\frac{a^2}{b^2}n^2\pi^2\left(\frac{W_n^{(4)}(0)}{k^3\pi^3}\left(1-(-1)^k\right)-W_{n,k}\frac{k^2\pi^2}{2}\right)+ \qquad (33)\\
&+\frac{a^4}{b^4n^5\pi^5}\left(1-(-1)^n\right)\int_0^1 q^{(4)}(y)\sin(k\pi y)dy+\\
&+\frac{a^4}{2b^4}\left(\frac{W_n^{(4)}(0)}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right)+W_{n,k}\frac{k^4\pi^4}{2}\right)-
\end{aligned}$$

$$-S\left(\frac{\left((-1)^n-1\right)}{n^3\pi^3}\int_0^1 q(y)\sin(k\pi y)\,dy-\frac{\gamma E_0}{n^3k\pi^4}\cdot\right.$$

$$\cdot\left(1-(-1)^n\right)\left(1-(-1)^k\right)-\frac{n^2\pi^2}{2}\left(\frac{W_n^{(4)}(0)}{k^5\pi^5}\cdot\right.$$

$$\left.\left.\cdot\left(1-(-1)^k\right)+\frac{W_{n,k}}{2}\right)+\frac{a^2}{b^2n^5\pi^5}\left(1-(-1)^n\right)\cdot\right.$$

$$\cdot\int_0^1 q''(y)\sin(k\pi y)dy+\frac{a^2}{2b^2}\left(\frac{W_n^{(4)}(0)}{k^3\pi^3}\cdot\right.$$

$$\left.\left.\cdot\left(1-(-1)^k\right)-W_{n,k}\frac{k^2\pi^2}{2}\right)\right)+\boldsymbol{k}\left(\frac{\left(1-(-1)^n\right)}{n^5\pi^5}\cdot\right.$$

$$\cdot\int_0^1 q(y)\sin(k\pi y)\,dy+\frac{\gamma E_0}{n^5k\pi^6}\left(1-(-1)^n\right)\cdot$$

$$\left.\cdot\left(1-(-1)^k\right)+\frac{W_n^{(4)}(0)}{2k^5\pi^5}\left(1-(-1)^k\right)+\frac{W_{n,k}}{4}\right)=$$

$$=-\gamma\int_0^1\int_0^1\left(\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{a^2}{b^2}\frac{\partial^2T}{\partial y^2}\right)\sin(n\pi x)\cdot$$

$$\cdot\sin(k\pi y)\,dxdy+$$

$$+\alpha\int_0^1\int_0^1(T-1)\sin(n\pi x)\sin(k\pi y)\,dxdy$$

В результате получена замкнутая алгебраическая система линейных уравнений. Решение данной системы, его анализ и оценка погрешности будут представлены в следующей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1 Чернышов, А. Д Температурный режим при естественной конвекции термовязкой несжимаемой жидкости в емкости прямоугольной формы [Текст]/ А. Д. Чернышов, А. Н. Марченко, В. В Горяйнов // Тепловые процессы в технике. – 2012. - Т. 4. - №11. - С. 482-486.

2 Чернышов, А. Д. Быстрые ряды Фурье [Текст] / А. Д. Чернышов // Сборник международной конференции. Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики, Воронеж, ВГУ. - 2010. – С. 388 – 394.

3 Чернышов, А. Д. Улучшенные ряды Фурье и граничные функции [Текст] / А. Д. Чернышов // Сборник международной конференции. Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики , Воронеж, ВГУ. – 2009. - Ч. 2. – С. 236 – 238.

4 Чернышов, А. Д. Задачи теплопроводности для угловой области с внутренним источником [Текст] / А.Д. Чернышов // Инженерно-физический журнал. – 2003. – Т.76. - № 4. – С.150-155.

REFERENCES

1 Chernyshov, A. D. The temperature regime in natural convection of termoviscous incompressible fluid in a rectangular tank [Text] / A. D. Chernyshov, A. N. Marchenko, V. V. Gorjajnov // Thermal processes in engineering. – 2012. - V. 4. - №11. – P. 482-486.

2 Chernyshov, A. D. Fast Fourier series [Text] / A. D. Chernyshov // Actual problems of applied mathematics, informatics and mechanics. Proceedings of the international conference, Voronezh, VSU. - 2010 – P. 388 – 394.

3 Chernyshov, A. D. The improved Fourier series and и boundary functions [Text] / A. D. Chernyshov // Actual problems of applied mathematics, informatics and mechanics. Proceedings of the international conference, Voronezh, VSU. – 2009. - Part 2. – P. 236 – 238.

4 .Chernyshov, A. D. Heat conduction problem in an angular domain with the inner source [Text] / A. D. Chernyshov // Engineering-physical journal. – 2003. – V.76. - № 4. – P. 150-155.