УДК 517.518.85

Доцент С.М. Ситник, адъюнкт А.С. Тимашов
(Воронеж. инст. МВД) кафедра высшей математики

Приложения экспоненциальной аппроксимации по целочисленным сдвигам функций Гаусса

В статье рассматриваются аппроксимации функций при помощи целочисленных сдвигов функций Гаусса – квадратичных экспонент. Предложен метод нахождения узловой функции для данной задачи интерполяции, основанный на решениях усечённых систем линейных уравнений. Найдена явная формула для определителя рассматриваемой системы, доказана однозначная разрешимость системы. Проведено сравнение данного метода с известными ранее, кратко намечены приложения полученных результатов в теории сигналов.

In this paper we consider approximations of functions using integer shifts of Gaussians – quadratic exponentials. A method is proposed to find coefficients of node functions by solving linear systems of equations. The explicit formula for the determinant of the system is found, based on it solvability of linear system under consideration is proved and uniqueness of its solution. We compare results with known ones and briefly indicate applications to signal theory.

Ключевые слова: интерполяция, функции Гаусса, узловые функции, тета-функции Якоби, сигналы.

Рассмотрим задачу о приближении достаточно произвольной функции в виде ряда по системе целочисленных сдвигов функции Гаусса (квадратичной экспоненты с параметрами). Для численного анализа и приложений основную роль играют приближения данного типа конечными суммами, которые возникают при усечении соответствующих рядов. Исследованию таких конечных приближений и посвящена данная работа. История вопроса, основные результаты и многочисленные приложения представлены в источниках [1-8].

Более точно будет исследована следующая основная задача.

Задача. Рассмотрим произвольную функцию $f(x)$, заданную на всей оси $x \in \mathbb{R}$ и некоторый параметр $s > 0$, который в приложениях играет роль дисперсии. Будем искать интерполирующую функцию $\tilde{f}(x)$, также определенную на всей оси $x \in \mathbb{R}$, которая представляется в виде ряда по целочисленным сдвигам функции Гаусса:

$$\tilde{f}(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-\frac{(x-k)^2}{2s^2}} \qquad (1)$$

и совпадает с исходной функцией во всех целых точках:

$$f(m) = \tilde{f}(m),\ m \in \mathbb{Z}. \qquad (2)$$

Известны два подхода к решению поставленной задачи. При первом подходе решение ищется с помощью специальных функций, а именно тета-функций Якоби [1-2]. Как показано в [6-8], несмотря на теоретическую ценность этого подхода, он не имеет вычислительных перспектив, так как связан с делением на чрезвычайно малые знаменатели. Другой подход разрабатывался в [3-5], он основан на применении дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Такой подход имеет определённую вычислительную ценность, но она достигается ценой существенного усложнения алгоритма. Поэтому в настоящей работе предлагается наиболее простой прямой метод решения поставленной задачи, основанный на сведении её к решению конечных систем линейных уравнений.

Существенным препятствием для развития этого метода являлось отсутствие результатов по доказательству однозначной разрешимости соответствующих систем линейных уравнений. В настоящей работе получены результаты, устанавливающие требуемую однозначную разрешимость линейных систем. Эти результаты являются теоретическим обоснованием для разработки практических численных алгоритмов, избавленных от необходимости работы со специальными функциями или ДПФ.

Для дальнейшего изложения введём удобное обозначение для квадратичной экспоненты:

$$e(s,x,k)=e^{-\frac{(x-k)^2}{2s^2}}. \qquad (3)$$

Решение поставленной задачи сводится к нахождению последовательности неизвестных коэффициентов f_k из (1). Для этого, следуя стандартной схеме решения задач интерполяции, необходимо построить узловые функции для каждого узла интерполяции $x=m,\ m\in\mathbb{Z}$. В нашем случае достаточно построить одну базисную узловую функцию для узла при $x=0$, которую мы будем искать в виде:

$$G(s,x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e(s,x,k). \qquad (4)$$

Из (2) следует, что эта базисная узловая функция должна удовлетворять основному условию при всех $m\in\mathbb{Z}$:

$$G(s,m)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e(s,m,k) = s_{m0} \qquad (5)$$

где s_{m0} есть символ Кронекера,

$$s_{m0}=\begin{cases}1, m=0\\ 0, m\neq 0\end{cases}.$$

Предположим, что такая функция $G(s,x)$, удовлетворяющая условию (5), уже найдена. Тогда нетрудно вычислить формальное решение поставленной задачи. Действительно, функция:

$$G_l(s,x)=G(s,x-l)$$

является узловой функцией узла при $x=l$, так как:

$$G_l(s,x)=G(s,x-l)=s_{ml},$$

тогда решением задачи будет, очевидно, функция:

$$\tilde f(x)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l)G_l(s,x) \qquad (6)$$

так как при $x=m$ от суммы (6) остается только одно слагаемое:

$$f(m)G_m(s,m)=f(m)\cdot 1=f(m).$$

Чтобы перейти от представления решения в виде (6) к искомому представлению в виде (1), выполним необходимую подстановку. В результате получим с учетом (4):

$$\tilde f(x)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l)G_l(s,x)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l)G(s,x-l)$$
$$=\sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l)\sum_{l=-\infty}^{\infty} g_k e(s,x-l,k)$$
$$=\sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l)\sum_{l=-\infty}^{\infty} g_k e^{-\frac{(x-l-k)^2}{2s^2}}.$$

Введем новый индекс суммирования $j=l+k$ вместо $l=j-k$ и формально поменяем порядок суммирования. Тогда получим:

$$\tilde f(x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(j-k)g_k e^{-\frac{(x-j)^2}{2s^2}}$$
$$=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{l=-\infty}^{\infty} f(j-k)g_k\Big)e^{-\frac{(x-j)^2}{2s^2}} \qquad (6)$$
$$=\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j\, e(s,x,j),$$

где искомые коэффициенты разложения представляются в виде (после подстановки индексов $j\rightleftarrows k$, чтобы согласовать результат с (1)):

$$f_k\sum_{j=-\infty}^{\infty} f(k-j)g_j \qquad (7)$$

где $f(m)$ – значения заданной функции в целых точках, а g_j – коэффициенты разложения базисной узловой функции (4).

Мы получили, что решением задачи 1, определяемой условиями (1)-(2), формально является ряд (6), коэффициенты которого находятся по формуле (8).

Таким образом, решение задачи 1 по существу сводится к нахождению коэффициентов разложения базисной узловой функции (4), которые должны удовлетворять условиям (5).

Упростим систему уравнений:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{-\frac{(m-k)^2}{2s^2}}=s_{m0}\,, m\in\mathbb{Z}. \qquad (8)$$

Для этого введем новую переменную

$$q=e^{-\frac{1}{2s^2}}.$$

Получим:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k q^{(m-k)^2}=s_{m0}\,, m\in\mathbb{Z}.$$

Для численного решения необходимо рассмотреть конечномерные усечения полученной бесконечной системы уравнений. Рассмотрим такую систему уравнений при $-n \leq k \leq n$ и $-n \leq m \leq n.$ Она имеет вид:

$$\sum_{k=-n}^{n} g_k q^{(m-k)^2} = s_{m0}\,, -n \leq m \leq n.$$

Рассмотрим вопрос, как связаны решения системы (8) с решением «урезанной системы»:

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k e^{-\frac{(m-k)^2}{2s^2}} = s_{m0}\,, m \in \mathbb{Z}. \qquad (9)$$

в которой индексы вместо целых заменяются на неотрицательные целые числа.

Приведем ряд свойств полученных систем бесконечных уравнений (8)-(9). Для этого вводим обозначение:

$$p_{m,k} = e^{-\frac{(m-k)^2}{2s^2}} = e(s,x,k),$$

а также обозначения для последовательностей, переставленных в обратном порядке:

$$c = (\dots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \dots),$$

$$\overleftarrow{c} = (\dots, c_2, c_1, c_0, c_{-1}, c_{-2}, \dots)$$

Очевидно, что $p_{m,m} = 1, p_{-m,-k} = p_{m,k}$.

Утверждение 1. Если последовательность $g_m\,, m \in \mathbb{Z}$ является решением системы (8), то последовательность $c_k = \frac{g_k+g_{-k}}{2}\,, k \in \mathbb{Z}$ является решением системы (9). (Сложить уравнения при $m = \pm j\,, j \in \mathbb{N}$).

Утверждение 2. Если последовательность g является решением системы (9), то и обратная последовательность $\overleftarrow{g}$ также является решением той же системы (9). (Уравнения с $m = \pm j$ переходят друг в друга, а уравнение с $m = 0$ не меняется). Понятно, что $c = \overleftarrow{c}$ тогда и только тогда, когда выполнено условие $c_k = c_{-k}, k \in \mathbb{Z}$ (или $k \in \mathbb{N}_0$). Поэтому справедливо следующее следствие.

Следствие. Если система (9) имеет несимметричное решение g, то для нее существует более одного решения (это g и $\overleftarrow{g}$). При этом вопрос, всегда ли $g_k = g_{-k}$ и реализуется ли неединственность на самом деле, остается открытым.

Утверждение 3. Если система (9) имеет (ненулевое) решение $c = (c_0, c_1, c_2, \dots)$, то система (8) имеет решение вида $g = (\dots, 0, 0, c_0, c_1, c_2, \dots)$, то есть:

$$g_k = \begin{cases} 0, k < 0 \\ c_k, k \geq 0 \end{cases}.$$

Следствие. Если «урезанная» система (9) имеет решение, то система (8) теряет свойство единственности, у нее есть как минимум два решения (это g и $\overleftarrow{g}$, они разные, т.к. система (9) не имеет нулевого решения).

Таким образом, вопрос о соотношениях между решениями систем (8) и (9) является достаточно сложным.

Это система из $2n+1$ линейного уравнения с квадратной матрицей специального “крестообразного” вида.

Например, при n$=2$: в матричном виде она будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{pmatrix} q^4 & q^2 & 1 & q^{-2} & q^{-4} \\ q^2 & q & 1 & q^{-1} & q^{-2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ q^{-2} & q^{-1} & 1 & q & q^2 \\ q^{-4} & q^{-2} & 1 & q^2 & q^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2 \\ g_1 \\ g_0 \\ g_{-1} \\ g_{-2} \end{pmatrix} = s_{m0} \cdot E$$

Получилась система пяти линейных уравнений с матрицей специального вида.

В работе получены теоретические результаты, касающиеся корректной разрешимости основной системы линейных уравнений для конечномерного приближения бесконечной системы, а также проведён достаточно существенный объём компьютерных вычислений.

Приведём список основных полученных результатов (смотри также [9-10]).

1. Доказана следующая ниже теорема.

Теорема. Для главного определителя системы (9) справедлива формула:

$$D_L = det(M_L) = \frac{1}{q^{\frac{N(N+1)(2N+1)}{3}}}(q^1-1)^{2N}(q^2-1)^{2N-1} \dots \dots (q^{2N}-1)^1.$$

2. Следствие. Система линейных уравнений (9) однозначно разрешима при любых $s > 0$.

Действительно, при допустимых рассматриваемых s>0 очевидно, что $0 < q < 1$, поэтому главный определитель системы, как следует из приведённой выше формулы, отличен от нуля.

Таким образом, доказано, что при всех допустимых значениях параметров q, s исследуемые конечномерные системы линейных уравнений имеют единственное решение.

3. Проведено компьютерное исследование решений исследуемых конечномерных систем линейных уравнений численными методами при помощи математического пакета

MATHEMATICA при широком наборе управляющих параметров q, s.

4. Численно показано, что при увеличении размерности приближающих систем их решения стремятся к предельным значениям, которые следует принять за решение исходной бесконечной системы уравнений.

В качестве приложения полученных результатов рассмотрены разложения методом экспоненциальной интерполяции стандартных электрических сигналов и использование указанных разложений в теории фильтрации.

5. Рассмотрено разложение указанным методом по целочисленным сдвигам функции Гаусса основного набора стандартных электрических сигналов: переключения режимов, кусочно-постоянных, прямоугольных, треугольных, сложной формы, включая различные нерегулярные меандры. Выведен большой объём графиков для аппроксимаций этих сигналов, проанализированы ошибки приближений, вычислены количественные характеристики ошибок, среднеквадратичные и равномерные.

Рассмотрены приложения полученных теоретических и численных результатов к теории фильтрации электрических сигналов. Произведён численный расчёт и анализ погрешности для реализации фильтров, близких к идеальным. Для этого реализации фильтров как свёрток с исследованными ранее стандартными сигналами смоделированы с использованием приближений сигналов целочисленными сдвигами функций Гаусса.

ЛИТЕРАТУРА

1 Lanzara, F. Approximate approximations from scattered data [Text] / F. Lanzara, V.Maz'ya, G. Schmidt // Journal of approximation theory. - 2007.-№145. - P. 141-170.

2 Maz'ya, V. Approximate approximations [Text] / V. Maz'ya, G. Schmidt. – Sweden: University of Linköping, 2007 – 350 P.

3 Zhuravlev, M. V. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions [Text] / M. V. Zhuravlev, E. A. Kiselev, L. A. Minin et al // Journal of Mathematical Sciences, Springer.- 2011. – V. – 173. - № 2. - P. 231-241.

4 Журавлёв, М. В. Тета--функции Якоби и системы целочисленных сдвигов функций Гаусса [Текст] / М. В. Журавлев, Е. А. Киселёв, Л. А. Минин и др. // Современная математика и её приложения. Уравнения в частных производных. - 2010. - Т. 67. - С. 107-116.

5 Минин, Л. А. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций [Текст] / Л. А. Минин, С. М. Ситник, М. В. Журавлев // Научные ведомости Белгородского государственного университета. - 2009.- № 13 (68), Выпуск 17/2. - С. 89-99.

6 Минин, Л. А. О неравенствах для тета-функций Якоби [Текст] / Л. А. Минин, С. М. Ситник // Чернозёмный альманах научных исследований. Серия "Фундаментальная математика".- 2009.- № 1 (8).- С. 234-311.

7 Минин, Л. А. Неравенства для третьей тета-функции Якоби [Текст] /Л. А. Минин, С. М. Ситник // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (АМАДЕ).Тезисы докладов международной конференции, Минск, Беларусь. - 2009.- С. 111.

8 Минин, Л. А. О неравенствах для тета-функций Якоби [Текст] / Л. А. Минин, С. М. Ситник // Труды участников международной школы–семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. Абрау-Дюрсо, Ростов-на-Дону, Южный Федеральный университет. - 2008. - С. 124-126.

9 Тимашов, А. С. О вычислении характеристик сигналов при их разложении по функциям Гаусса [Текст] / А. С. Тимашов // Сборник материалов Всероссийской научно—практической конференции "Актуальные вопросы эксплуатации систем охраны и защищённых телекоммуникационных систем", Воронеж, Воронежский институт МВД. - 2011. - С. 260-261.

10 Тимашов, А. С. О решении систем уравнений, определяющих коэффициенты разложения по целочисленным сдвигам функций Гаусса [Текст] / А. С. Тимашов // Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи», посвящённой 75-летию Ю. П. Самарина (ММиКЗ)., Самара.- 2011. - С. 234-236.

REFERENCES

1 Lanzara, F. Approximate approximations from scattered data [Text] / F. Lanzara, V. Maz'ya, G. Schmidt // Journal of approximation theory. - 2007.-№145. - P. 141-170.

2 Maz'ya, V. Approximate approximations [Text] / V. Maz'ya, G. Schmidt. – Sweden: University of Linköping, 2007 – 350 P.

3 Zhuravlev, M. V. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions [Text] / M. V. Zhuravlev, E. A. Kiselev, L. A. Minin et al // Journal of Mathematical Sciences, Springer.- 2011. – V. – 173. - № 2. - P. 231-241.

4 Zhuravlev, M. V. Jacobi theta-functions and systems of integer translates of Gaussian functions [Text] / M. V. Zhuravlev, E. A. Kiselev, L. A. Minin et al // Contemporary mathematics and its applications. Partial differential equations. - 2010. - T. 67. - P. 107-116.

5 Minin, L. A. On the computational features of interpolation using integer shifts of Gaussian functions [Text] / L. A. Minin, S. M. Sytnyk, M. V. Zhuravlev // Scientific statement of the Belgorod State University. - 2009. - № 13 (68) Issue 17/2. - P. 89-99.

6 Minin, L. A. Inequalities for Jacobi theta functions [Text] / L. A. Minin, S. M. Sytnyk // Black earth almanac research. A series of "Fundamental mathematics." - 2009. - № 1 (8.) - P. 234-311.

7 Minin, L. A. Inequalities for the third Jacobi theta functions [Text] / L. A. Minin, S. M. Sytnyk // Analytical Methods of analysis and differential equations (AMADE). Proceedings of the International Conference, Minsk, Belarus. - 2009. - P. 111.

8 Minin, L. A. Inequalities for Jacobi theta functions [Text] / L. A. Minin, S. M. Sytnyk // Proceedings of the participants of the International school on geometry and analysis in memory of N. V. Efimov, Abrau-Durso, Rostov-na-Donu, Southern Federal University. - 2008. - P. 124-126.

9 Timashov, A. S. Calculation of the characteristics of the signals at their expansion in the Gaussian function [Text] / A. S. Timashov // Proceedings of the All-Russia scientific - practical conference "Actual problems of operating systems and secure communication systems", Voronezh, Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs. - 2011. - P. 260-261.

10 Timashov, A. S. Solution of systems of equations that determine the coefficients of expansion in integer shifts of Gaussian functions [Text] / A. S. Timashov // Proceedings of the Eighth All-Russian scientific conference with international participation "Mathematical modeling and boundary value problems", on the 75-anniversary of U. P. Samarin (MMBVP), Samara. - 2011. - P. 234-236.