УДК 539.3;534.1

Профессор М.А. Артемов,
(Воронеж. гос.ун-т) кафедра программного обеспечения и администрирования информационных систем, тел. (473) 220-82-66
старший научный сотрудник Л.А. Кукарских
(ВУНЦ ВВС «ВВА» г. Воронеж) 4 ОНИ НИЦ(БП и О ВВС), тел. (473) 244-77-16

Распространение волн в двухфазной упруговязкопластической пористой среде

В данной статье изучается поведение слабых разрывов в насыщенной жидкостью двухфазной пористой среде, где для одной из фаз выполняются условия пластичности Треска.

In present article studied behavior of weak discontinuities in diphases elastic-viscoplastic porous medium, where for one out of phases performed Tresca conditions.

Ключевые слова: слабые разрывы, пористая среда, пластичность.

Динамическому деформированию в двухфазной упругой пористой среде посвящен ряд работ [1 - 6], среди которых следует отметить М. А. Био [1, 2], Л. Я. Косачевского [3], Я. И. Френкеля [6].

Исследованию распространения и затухания слабых разрывов в упруго-вязкопластической однородной среде при условии пластичности Мизеса и Треска посвящены работы [7, 8], где показано, что в такой среде существует по два типа волн ускорений и ударных волн, для которых скорости распространения выражаются теми же формулами, что и в упругой среде.

Под волной ускорения в насыщенной жидкостью упруго-вязкопластической пористой среде понимается изолированная поверхность, на которой напряжения, сила, действующая на жидкость, отнесенная к единице площади поперечного сечения пористой среды, направляющие косинусы главных напряжений и скорости непрерывны, а их некоторые частные производные претерпевают разрыв.

Пористое тело представляет собой микронеоднородную среду, физико-механические характеристики которой являются постоянными величинами. Предполагается, что размеры пор, заполненные жидкостью малы по сравнению с расстоянием, на котором существенно изменяются кинематические и динамические характеристики движения. Это позволяет считать, что обе среды сплошные, и в каждой точке пространства в этом случае будет два вектора смещения: $\vec{u}^{(1)}$ - вектор смещения упруго-вязкопластической фазы (скелета пористой среды) и $\vec{u}^{(2)}$ - вектора смещения жидкости в поре. Жидкость будем считать сжимаемой. Задача рассматривается в Лагранжевых координатах.

1. Рассмотрим насыщенную жидкостью упруго-вязкопластическую пористую среду. Предположим, что деформации первой фазы среды (скелета) малы и складываются из двух частей – упругой и пластической:

$$e_{ik}^{(1)} = e_{ik}^{(1)e} + e_{ik}^{(1)p} \qquad (1)$$

Полный тензор напряжений и силу, действующую на жидкость, отнесенную к единице площади поперечного сечения пористой среды, запишем в виде [3-5]:

$$T_{ik} = \sigma_{ik}^{(1)} + \sigma_{ik}^{(2)} = \lambda e_{rr}^{(1)e}\delta_{ik} + 2\mu e_{ik}^{(1)e} + A_1 e_{rr}^{(2)}\delta_{ik}$$

$$P = A_1 e_{rr}^{(1)e} + A_2 e_{rr}^{(2)},\ \ e_{ij}^{(1)e} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}^{(1)} + u_{j,i}^{(1)}\right), \qquad (2)$$

$$e_{kk}^{(2)} = u_{k,k}^{(2)}$$

а тензор скорости пластической деформации $\varepsilon_{ij}^{(1)p} = \dot{e}_{ij}^{(1)p}$ $(\varepsilon_{kk}^{(1)p} = \dot{e}_{kk}^{(1)p} = 0)$ связан с главными напряжениями упругой среды (скелета) условием пластичности Треска [8]:

$$\left|(\sigma_i^{(1)} - \eta\varepsilon_i^{(1)p}) - (\sigma_j^{(1)} - \eta\varepsilon_j^{(1)p})\right| = k \qquad (3)$$

По повторяющимся индексам предполагается суммирование от единицы до трех.

Будем считать, что напряженное и деформированное состояния упругой среды первой фазы соответствуют ребру призмы пластичности:

$$\sigma_i^{(1)} - \eta\varepsilon_i^{(1)p} = \sigma_j^{(1)} - \eta\varepsilon_j^{(1)p} = \sigma_k^{(1)} - \eta\varepsilon_k^{(1)p} \pm k \qquad (4)$$

В формулах (2) - (4): λ, μ - коэффициенты Ламе; A_1, A_2 – коэффициенты, характеризующие пористость среды и сжимаемость жидкости; P - сила, действующая на жидкость, отнесенная к единице площади поперечного сечения пористой среды; η - коэффициент вязкости; k - предел текучести материала.

Из формул (1.1) и (1.2) следует:

$$\dot{T}_{ij} = \lambda V_{k,k}^{(1)}\delta_{ij} + \mu(V_{i,j}^{(1)} + V_{j,i}^{(1)}) - 2\mu\varepsilon_{ij}^{(1)p} + A_1 V_{k,k}^{(2)}\delta_{ij}$$

$$\dot{P} = A_1 V_{k,k}^{(1)} + A_2 V_{k,k}^{(2)} \quad (5)$$

Точкой над буквой обозначена производная по времени.

Величины $\varepsilon_{ij}^{(1)p}$ связаны с $\varepsilon_i^{(1)p}$ следующими соотношениями:

$$\varepsilon_{ij}^{(1)p} = \varepsilon_1^{(1)p} l_i l_j + \varepsilon_2^{(1)p} m_i m_j + \varepsilon_3^{(1)p} n_i n_j \quad (6)$$

где l_i, m_i, n_i - направляющие косинусы главных напряжений $\sigma_i^{(1)}$ и скоростей деформаций $\varepsilon_i^{(1)p}$.

Компоненты тензора напряжений и скорости перемещений должны удовлетворять уравнениям движения [3]:

$$\rho_{11}\dot{V}_i^{(1)} + \rho_{12}\dot{V}_i^{(2)} = T_{ik,k}$$

$$\rho_{12}\dot{V}_i^{(1)} + \rho_{22}\dot{V}_i^{(2)} = P,i \quad (7)$$

$$\rho_{11} = \rho_1 - \rho_{12}, \rho_{22} = \rho_2 - \rho_{12}, V_i^{(\alpha)} = \dot{u}_i^{(\alpha)},$$
$$(\alpha = 1,2)$$

где ρ_{12} – интенсивность перехода массы из второй фазы в первую; $\rho_{11} = \dfrac{\rho_1}{\alpha_1}$ и $\rho_{22} = \dfrac{\rho_2}{\alpha_2}$ – истинные плотности твердой фазы и жидкости в порах; p_1 – масса первой фазы в единице объема среды; p_2 – масса второй фазы в единице объема среды; a_1 и a_2 – величины, характеризующие доли объема смеси, занимаемые каждой фазой ($a_1 + a_2 = 1$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$).

Формулы (6) с учетом (4) можно преобразовать к виду [8]:

$$\eta\varepsilon_{ij}^{(1)p} = \sigma_{ij}^{(1)}\frac{1}{3}\sigma_{kk}^{(1)}\delta_{ij} - \frac{1}{3}k\delta_{ij} + kn_i n_j = s_{ij}^{(1)} - \frac{1}{3}k\delta_{ij} + kn_i n_j$$

$$s_{ij}^{(1)} = \delta_{ij}^{(1)} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}^{(1)}\delta_{ij} \quad (8)$$

Возьмем разность выражений (5), (7) и (8) на различных сторонах волновой поверхности $\sum(t)$, получим:

$$[\dot{\sigma}_{ij}] = \lambda[V_{k,k}^{(1)}]\delta_{ij} + \mu([V_{i,j}^{(1)}] + [V_{j,i}^{(1)}]) -$$
$$-2\mu[\varepsilon_{ij}^{(1)p}] + A_1[V_{k,k}^{(2)}]\delta_{ij}$$
$$[\dot{P}] = A_1[V_{k,k}^{(1)}] + A_2[V_{k,k}^{(2)}]$$
$$\rho_{11}[\dot{V}_i^{(1)}] + \rho_{12}[\dot{V}_i^{(2)}] = [\sigma_{ij,j}] \quad (9)$$
$$\rho_{12}[\dot{V}_i^{(1)}] + \rho_{22}[\dot{V}_i^{(2)}] = [P_{,i}]$$
$$\eta[\varepsilon_{ij}^{(1)p}] = [s_{ij}^{(1)}] - k[n_i n_j]$$

Применяя к формулам (9) геометрические и кинематические условия совместности первого порядка [9] для каждой фазы, получим систему уравнений:

$$(\lambda + \mu)\lambda_j^{(1)}\nu_j\nu_i + \mu\lambda_i^{(1)} + A_1\lambda_j^{(2)}\nu_j\nu_i =$$
$$= \rho_{11}G^2\lambda_i^{(1)} + \rho_{12}G^2\lambda_i^{(2)} \quad (10)$$
$$A_1\lambda_j^{(1)}\nu_j\nu_i + A_2\lambda_j^{(2)}\nu_j\nu_i = \rho_{12}G^2\lambda_i^{(1)} + \rho_{22}G^2\lambda_i^{(2)}$$
$$[\varepsilon_{ij}^{(1)p}] = 0$$

где ν_i - компоненты единичного вектора нормали к поверхности $\sum(t)$; $\lambda_i^{(a)}$ $(a = 1,2)$ – величины, характеризующие скачки первых производных скоростей перемещений; G – скорость движения волновой поверхности.

Предполагая $\lambda_i^{(1)}\nu_i = \omega_1 \neq 0$, $\lambda_i^{(2)}\nu_i = \omega_2 \neq 0$ на волновой поверхности, умножим (10) на ν_i и просуммируем по повторяющемуся индексу i, после преобразований получим однородную систему уравнений относительно ω_1 и ω_2:

$$(\Lambda - \rho_{11}G^2)\omega_1 + (A_1 - \rho_{12}G^2)\omega_2 = 0$$
$$(A_1 - \rho_{12}G^2)\omega_1 + (A_2 - \rho_{22}G^2)\omega_2 = 0 \quad (11)$$

Из (1.11) следует уравнение ($G = G_l$):

$$(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)G_l^4 + (2\rho_{12}A_1 - \rho_{11}A_2 -$$
$$-\rho_{22}\Lambda)G_l^2 + \Lambda A_2 - A_1^2 = 0, \quad (12)$$

решение которого имеет вид:

$$G^2{}_{l_{1,2}} = \{2(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)\}^{-1}(k_1 \pm \sqrt{k_2^2 - 4k_3k_4})$$
$$k_1 = \rho_{11}A_2 + \rho_{22}\Lambda - 2\rho_{12}A_1$$
$$k_2 = \rho_{11}A_2 - \rho_{22}\Lambda \quad (13)$$
$$k_3 = \rho_{22}A_1 - \rho_{12}A_2, \quad k_4 = \rho_{11}A_1 - \rho_{12}\Lambda,$$

где $G_{l1,2}$ – скорости безвихревых волн; $\Lambda = \lambda + 2\mu$

Если $\lambda_i^{(\alpha)}\nu_i = 0$ (a = 1, 2) на поверхности $\sum(t)$ при условии, что не все $\lambda_i^{(\alpha)}$ равны нулю одновременно, то из (10) получим $(G = G_t)$:

$$G_t^2 = \frac{\mu\rho_{22}}{\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2}, \quad (14)$$

где G_t – скорость эквиволюминальной волны.

Таким образом, в насыщенной жидкостью упруго-вязкопластической пористой среде существует две безвихревые и одна эквиволюминальная волны ускорения, скорости которых имеют скорости продольных и поперечных волн [4, 5] и совпадают со скоростями волн в упругой пористой среде.

2. Получим уравнения затухания для волн ускорения. Для этого продифференцируем уравнения (5) по x_i, а уравнения (7) по t и просуммируем по повторяющимся индексам, а затем возьмем разность найденных выражений на различных сторонах волновой поверхности и применим геометрические и кинематические условия совместности второго порядка [9]:

$$
\begin{gathered}
[\ddot{v}_i^{(1)}]\nu_i = G_l^2 L_i \nu_i - 2G_l \frac{\delta \lambda_i^{(1)}}{\delta t}\nu_i \\
[\ddot{v}_i^{(2)}]\nu_i = G_l^2 M_i \nu_i - 2G_l \frac{\delta \lambda_i^{(2)}}{\delta t}\nu_i \\
[v_{i,kk}^{(1)}]\nu_i = L_i \nu_i - 2\Omega_l \lambda_i^{(1)}\nu_i \qquad (15) \\
[v_{i,kk}^{(2)}]\nu_i = M_i \nu_i - 2\Omega_l \lambda_i^{(2)}\nu_i \\
[v_{k,ki}^{(1)}]\nu_i = L_i \nu_i + g^{\alpha\beta}\lambda_{k,\alpha}^{(1)} x_{k,\beta} \\
[v_{k,ki}^{(2)}]\nu_i = M_i \nu_i + g^{\alpha\beta}\lambda_{k,\alpha}^{(2)} x_{k,\beta}
\end{gathered}
$$

После преобразований получим:

$$
\begin{gathered}
\left(\rho_{11}G_l^2 - \Lambda\right)L_i\nu_i + \left(\rho_{12}G_l^2 - A_1\right)M_i\nu_i - \\
-2\rho_{11}G_l \frac{\delta\lambda_i^{(1)}}{\delta t}\nu_i - 2\rho_{12}G_l \frac{\delta\lambda_i^{(2)}}{\delta t}\nu_i + \\
+2\Omega_l \Lambda \lambda_i^{(1)}\nu_i + 2\Omega_l A_1 \lambda_i^{(2)}\nu_i + 2\mu[\varepsilon_{ik,k}^{(1)p}] = 0 \qquad (16), \\
\left(\rho_{12}G_l^2 - A_1\right)L_i\nu_i + \left(\rho_{22}G_l^2 - A_2\right)M_i\nu_i - \\
-2\rho_{12}G_l \frac{\delta\lambda_i^{(1)}}{\delta t}\nu_i - 2\rho_{22}G_l \frac{\delta\lambda_i^{(2)}}{\delta t}\nu_i + \\
+2\Omega_l\left(A_1\lambda_i^{(1)}\nu_i + A_2\lambda_i^{(2)}\nu_i\right) = 0 \qquad (17)
\end{gathered}
$$

где L_i, M_i – соответственно величины, характеризующие скачки вторых производных скоростей $V_i^{(\alpha)}$; Ω_l – средняя кривизна поверхности $\sum(t)$; $g^{\alpha\beta}$ – компоненты первой ковариантной квадратичной формы; $\frac{\delta}{\delta t}$ – обозначает δ – дифференцирование по t [9].

При выводе уравнений (16) и (17) учтено, что $\nu_i\nu_i = 1, \nu_i x_{i,\beta} = 0$. Исключим из уравнений (16) и (17) величины L_i и M_i. Для этого умножим уравнение (16) на $\left(\rho_{22}G_l^2 - A_2\right)$, а уравнение (17) на $-\left(\rho_{12}G_l^2 - A_1\right)$ и сложим. В результате преобразований и с учетом (12), получим:

$$
\begin{gathered}
2G_l\left\{\left(\rho_{11}A_2 - \rho_{12}A_1\right) - G_l^2\left(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2\right)\right\}\frac{\delta\omega_1}{\delta t} + \\
+2G_l\left(\rho_{12}A_2 - \rho_{22}A_1\right)\frac{\delta\omega_2}{\delta t} + 2\mu[\varepsilon_{i,kk}^{(1)p}]\nu_i\left(\rho_{22}G_l - A_2\right. \\
+2\Omega_l\left\{\left(\rho_{22}\Lambda - \rho_{12}A_1\right)G_l^2 + A_1^2 - A_2\Lambda\right\}\omega_1 + \\
+2\Omega_l G_l^2\left(\rho_{22}A_1 - \rho_{12}A_2\right)\omega_2 = 0 \qquad (18)
\end{gathered}
$$

Исключим из уравнения (18) ω_2. Для этого из первого уравнения (11) выразим ω_2 через ω_1:

$$
\omega_2 = \Gamma_1\omega_1, \qquad (19)
$$

где

$$
\Gamma_1 = \frac{\rho_{11}G_l^2 - \Lambda}{A_1 - \rho_{12}G_l^2}. \qquad (20)
$$

Тогда уравнение (18) затухания для безвихревой волны с учетом (19) запишем в виде:

$$
F_1\frac{\delta\omega_1}{\delta t} + 2\mu[\varepsilon_{ik,k}^{(1)p}]\nu_i F_2 + F_3\omega_1 = 0 \qquad (21)
$$

Здесь:

$$
\begin{gathered}
F_1 = -2G_l\left\{\left(\rho_{12}A_1 - \rho_{11}A_2\right) + G_l^2\left(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2\right) + \right. \\
\left. +\left(\rho_{22}A_1 - \rho_{12}A_2\right)\Gamma_1\right\} \\
F_2 = \rho_{22}G_l^2 - A_2 \qquad (22) \\
F_3 = 2\Omega_l\left\{G_l^2\left(\rho_{22}\Lambda - \rho_{12}A_1\right) + A_1^2 - A_2\Lambda\right\} + \\
+\left\{G_l^2\left(\rho_{22}A_1 - \rho_{12}A_2\right)\Gamma_1\right\}
\end{gathered}
$$

Подставив в формулы (22) значение Γ_1 из (20), получим запись коэффициентов F_1, F_2, F_3 в другом виде:

$$
F_1 = \frac{2G_l^2}{A_1 - \rho_{12}G_l^2}D_1, \quad F_2 = \frac{D_2}{A_1 - \rho_{12}G_l^2},
$$

$$
F_3 = \frac{2\Omega_l G_l^2}{A_1 - \rho_{12}G_l^2}D_1, \qquad (23)
$$

где

$$
\begin{gathered}
D_1 = \left(\rho_{11}\rho_{12}A_2 + \rho_{12}\rho_{22}\Lambda - 2\rho_{11}\rho_{22}A_1\right)G_l^2 + \\
+\rho_{11}A_1A_2 - 2\rho_{12}A_2\Lambda + \rho_{22}A_1\Lambda \\
D_2 = -\left\{\rho_{12}\rho_{22}G_l^4 - \left(\rho_{22}A_1 + \rho_{12}A_2\right)G_l^2 + A_1A_2\right\}
\end{gathered}
$$

После подстановки (23) в уравнение (21), преобразований, и учитывая, что $\frac{\delta\omega_1}{\delta t} = G_l\frac{d\omega_1}{ds}$, получим уравнения затухания для безвихревых волн первой фазы:

$$
\frac{d\omega_1}{ds} = \Omega_l\omega_1 + \mu\gamma[\varepsilon_{i,kk}^{(1)p}]\nu_i \qquad (24)
$$

$$
\gamma = \frac{\rho_{12}\rho_{22}G_l^4 - (\rho_{22}A_1 + \rho_{12}A_2)G_l^2 + A_1A_2}{\left(\rho_{11}\rho_{12}A_2 + \rho_{12}\rho_{22}\Lambda - 2\rho_{11}\rho_{22}A_1\right)G_l^4 + \left(\rho_{11}A_1A_2 - 2\rho_{12}A_2\Lambda + \rho_{22}A_1\Lambda\right)G_l^2}, \qquad (25)
$$

где s ≥ 0 – расстояние вдоль нормалей к волновой поверхности.

Если учесть, что $\lambda_i^{(\alpha)}\nu_i = 0$ при переходе эквиволюминальной волны через поверхность $\sum(t)$, то из выражений (5)-(7), записанных в разрывах, умножения полученных выражений на $\lambda_i^{(1)}$ и суммирования по повторяющемуся индексу i, получим уравнение затухания для эквиволюминальной волны первой фазы:

$$\frac{d\lambda_i^{(1)}}{ds} = \Omega_t \lambda_i^{(1} + [\varepsilon_{ik,k}^{(1)p}] \tag{26}$$

Выражения для $[\varepsilon_{ik,k}^{(1)p}]$ найдем из условия пластичности Треска (3) [8]:

Для этого продифференцируем уравнение (8) по x_k и возьмем разность их значений на разных сторонах от волновой поверхности:

$$\eta[\varepsilon_{ij,k}^{(1)p}] = [\varepsilon_{ij,k}^{(1)}] + k([n_{i,k}]n_j + [n_{j,k}]n_i) \tag{27}$$

Чтобы определить величины скачков $[n_{i,k}]$ через $[\sigma_{ij,k}^{(1)}]$ продифференцируем соотношения [8]:

$$l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = \delta_{ij}$$

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_1^{(1)} l_i l_j + \sigma_2^{(1)} m_i m_j + \sigma_3^{(1)} n_i n_j \tag{28}$$

по x_k и запишем их в скачках. В результате будем иметь:

$$[(l_i l_j)_{,k}] + [(m_i m_j)_{,k}] + [(n_i n_j)_{,k}] = 0 \tag{29}$$

$$[\sigma_{ij,k}^{(1)}] = [\sigma_{1,k}^{(1)}] l_i l_j + [\sigma_{2,k}^{(1)}] m_i m_j + [\sigma_{3,k}^{(1)}] n_i n_j +$$
$$+ [(l_i l_j)_{,k}]\sigma_1^{(1)} + [(m_i m_j)_{,k}]\sigma_2^{(1)} + [(n_i n_j)_{,k}]\sigma_3^{(1)},$$

где $\sigma_i^{(1)} (i = 1,2,3) -$ главные напряжения в первой фазе.

Для соотношений (29) применим геометрические условия совместности первого порядка:

$$[l_{i,k}] = a_i \nu_k, \ [m_{i,k}] = b_i \nu_k \tag{30}$$

$$[n_{i,k}] = C_i \nu_k, \ [\sigma_{i,k}^{(1)}] = B_i \nu_k$$

$$[\sigma_{ij,k}^{(1)}] = \mu_{ij}\nu_k, \mu_{ij} = -\frac{\lambda}{G}\omega_1 \delta_{ij} - \frac{\mu}{G}(\lambda_i^{(1)}\nu_j + \lambda_j^{(1)}\nu_i),$$

где $\mu_{ij}, a_i, b_i, C_i -$ скачки первых производных напряжений $\sigma_{ij,k}^{(1)}$ и направляющих косинусов l_i, m_i, n_i.

Тогда (29) запишем в виде:

$$a_i l_j + a_j l_i + b_i m_j + b_j m_i + C_i n_j + C_j n_i = 0 \tag{31}$$

$$B_1 l_i l_j + B_2 m_i m_j + B_3 n_i n_j + \left(a_i l_j + a_j l_i\right)\sigma_1^{(1)} +$$
$$+ \left(b_i m_j + b_j m_i\right)\sigma_2^{(1)} + \left(C_i n_j + C_j n_i\right)\sigma_3^{(1)} = \mu_{ij}$$

Решив систему уравнений (31) относительно a_i, b_i, B_i, C_i и подставив в (27), получим выражение для $[\varepsilon_{ik,k}^{(1)p}]$. Затем полученные значения $[\varepsilon_{ik,k}^{(1)p}]$ подставим в уравнения (24) и (26), получим дифференциальные уравнения для определения затухания первой фазы безвихревой и экволюминальной волн в насыщенной жидкостью упруго-вязкопластической пористой среде.

Затухание безвихревой волны второй фазы определим из (19), а затухание эквиволюминальной волны второй фазы определим из (10), положив $\lambda_i^{(a)}\nu_i = 0$

$$\lambda_i^{(2)} = \Gamma_2 \lambda_i^{(1)}, \qquad \Gamma_2 = -\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}} \tag{32}$$

Тогда затухание волн в насыщенной жидкостью упруго-вязкопластической пористой среде запишем как сумму решения уравнения (24) и (19) или (26) и (32):

$$W_s = \omega_{1s} + \omega_{2s} \qquad s = l, t. \tag{33}$$

3. Рассмотрим безвихревую сферическую волну в равномерно растянутом по направлению к оси $\sigma_3^{(1)}$ в насыщенном жидкостью упруго-вязкопластическом пористом пространстве. В этом случае $\sigma_1^{(1)} = \sigma_2^{(1)} = 0$, $\sigma_3^{(1)} \neq 0, n_1 = n_2 = 0, n_3 = 1$. Тогда средняя и гауссова кривизны волновой поверхности $\sum(t)$ при $t = 0$ запишутся в виде [9]

$$\Omega_0 = -\frac{1}{R_0}, \ K_0 = \frac{1}{R_0^2}.$$

Для определения средней кривизны Ω_l подставим значения Ω_0 и K_0 в формулу:

$$\Omega_l = \frac{\Omega_0 - K_0 s}{1 - 2\Omega_0 s + K_0 s^2}. \tag{34}$$

Тогда:

$$\Omega_l = -\frac{1}{R_0 + s} \tag{35}$$

Из системы (31) найдем C_1, C_2 и C_3:

$$C_1 = -\frac{2\mu}{\sigma_3^{(1)} G_l}\omega_1 \nu_1 \nu_3,$$
$$C_2 = -\frac{2\mu}{\sigma_3^{(1)} G_l}\omega_1 \nu_2 \nu_3, C_3 = 0 \tag{36}$$

Подставим (35) в формулу (27), после несложных преобразований получим:

$$[\varepsilon_{ik,k}^{(1)p}]\nu_i = -\frac{4\mu}{G_l \eta}\left(\frac{1}{3} + \frac{k}{\sigma_3^{(1)}}\nu_3^2(1 - \nu_3^2)\right)\omega_1 \tag{37}$$

Тогда (24) принимает вид:

$$\frac{\delta\omega_1}{\delta t}=\left\{\Omega_l-\frac{4\mu^2\gamma}{G_l\eta}\left(\frac{1}{3}+\frac{k}{\sigma_3^{(1)}}\nu_3^2(1-\nu_3^2)\right)\right\}\omega_1 \quad (38)$$

Из уравнения (38) с учетом (35) после интегрирования находим:

$$\omega_1=\omega_{01}\left(\frac{R_0}{R_0+s}\right)\exp\left\{-\frac{4\mu\gamma}{\eta}\left(\frac{1}{3}+\frac{k}{\sigma_3^{(1)}}\nu_3^2(1-\nu_3^2)\right)\right\}s, \quad (39)$$

где ω_{01} – значение ω_1 при $s=0$.

Из формул (19) и (20) находим значение ω_2:

$$\omega_2=\omega_{10}\left(\frac{\rho_{11}G_l^2-\Lambda}{A-\rho_{12}G_l^2}\right)\left(\frac{R_0}{R_0+s}\right)\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{4\mu^2\gamma}{\eta}\left(\frac{1}{3}+\frac{k}{\sigma_3^{(1)}}\nu_3^2(1-\nu_3^2)\right)\right\}s, \quad (40)$$

где γ находится из выражения (25).

Тогда интенсивность затухания безвихревой сферической волны ускорения в упруго-вязкопластическом пористом пространстве будет как сумма ω_1 и ω_2:

$$W_l=\omega_1+\omega_2 \quad (41)$$

или

$$W_l=\omega_{10}\left(\frac{R_0}{R_0+s}\right)\left(\frac{(\rho_{11}-\rho_{12})G_l^2+A_1-\Lambda}{A_1-\rho_{12}G_l^2}\right)\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{4\mu^2\gamma}{\eta}\left(\frac{1}{3}+\frac{k}{\sigma_3^{(1)}}\nu_3^2(1-\nu_3^2)\right)\right\}s \quad (42)$$

Из (42) следует, что интенсивность W_l затухания безвихревой сферической волны зависит от пористости среды, коэффициентов вязкости и пластичности, а также от главных напряжений первой фазы, истинных плотностей фаз и интенсивности перехода массы из второй фазы в первую.

ЛИТЕРАТУРА

1 Био, М. А. Теория упругости и консолидации анизотропной пористой среды [Текст] / М. А. Био // Сборник переводов и обзоров иностранной периодической литературы. - 1956. - № 1. - С. 140-146.

2 Био, М. А. Теория упругости и усиление пористого анизотропного материала [Текст] / М. А. Био // Прикладная физика. - 1955. - Т. 26. - № 2. - С. 182-185.

3 Косачевский, Л. Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах [Текст] / Л. Я. Косачевский // ПММ. - 1959. - Т. 23. - № 6. - С. 1115-1123.

4 Масликова, Т. И. О распространении нестационарных упругих волн в однородных пористых средах [Текст] / Т. И. Масликова, В. С. Поленов // Известия РАН. МТТ. – 2005. - № 1. - С. 104-108.

5 Масликова, Т. И. Нестационарные волны в пористых материалах [Текст] / Т. И. Масликова, В. С. Поленов // Известия инж.-тех. академии Чувашской республики. – 1999. - № 1-4. - С. 119-125.

6 Френкель, Я. И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве [Текст] / Я. И. Френкель // Известия АН ССР. Серия географии и геофизики. - 1944. Т.8. - № 4. - С.133-150.

7 Быковцев, Г. И. О распространении волн в упруго-вязкопластической среде [Текст] / Г. И. Быковцев, Н. Д. Вервейко // Инженерный журнал МТТ. – 1966. - № 4. - С. 111-113.

8 Россихин, Ю. А. О распространении волн в упруго-вязкопластической среде [Текст] / Ю. А. Россихин // Прикладная механика. – 1969. - Т. 5. - № 5. - С.82-88.

9 Томас, Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах [Текст] / Т. Томас. - М.: Мир, 1964. - С. 308.

REFERENCES

1 Bio, M. A. Theory of elasticity and consolidation of an anisotropic porous medium [Text] / M. A. Bio // Collection of translations and reviews of foreign periodicals. - 1956. - № 1. - P. 140-146.

2 Bio, M. A. Theory of elasticity and strengthening porous anisotropic material [Text] / M. A. Bio // Applied physics. - 1955. - T. 26. - № 2. - P. 182-185.

3 Kosachevskyi, L. Y. Propagation of elastic waves in two-component systems [Text] / L. Y. Kosachevskyi // AMM. - 1959. - T. 23. - № 6. - P. 1115-1123.

4 Maslikova, T. I. Propagation of transient elastic waves in homogeneous porous media [Text] / T. I. Maslikova, V. S. Polenov / / Proceedings of the Russian Academy of Sciences. MRB. - 2005. - № 1. - P. 104-108.

5 Maslikova, T. I. Transient waves in porous materials [Text] / T. I. Maslikova, V. S. Polenov // Proceedings of the engineer-tech. academy of the Chuvash Republic. - 1999. - № 1-4. - P. 119-125.

6 Frankel, J. I. The theory of seismic and seismoelectric phenomena in a moist soil [Text] / Frenkel J. I. // Proceedings of the AS of the USSR. - 1944. T.8. - № 4. - P.133-150.

7 Bykovtsev, G. I. Propagation of waves in an elastic-visco-plastic medium [Text] / G. I. Bykovtsev, N. D. Verveyko // Engineering journal MRB. - 1966. - № 4. - P. 111-113.

8 Rossikhin, Y. A. On the propagation of waves in an elastic-visco-plastic medium [Text] / Y. A. Rossikhin // Applied mechanics. - 1969. - T. 5. - № 5. - P.82-88.

9 Thomas, T. Plastic flow and fracture in solids [Text] / T. Thomas. – M.: Mir, 1964. - P. 308.