

Применение методов математического моделирования в оптимизационном проектировании технологических процессов производства пищевых продуктов

Евгений С. Попов	¹	e_s_popov@mail.ru
Екатерина А. Пожидаева	¹	katerina-77707@mail.ru
Елена С. Певцова	¹	beloch64@mail.ru
Алина В. Соколова	¹	alinasokolova.1999@mail.ru
Алена С. Колмакова	¹	svetikkoz1991@gmail.com

¹ Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия

Аннотация. Оптимизация термохимических и биологических превращений, происходящих при тепловой обработке пищевых продуктов, может быть осуществлена только с учетом динамики формирования температурных полей внутри обрабатываемых изделий. Разработана математическая модель процесса Sous-Vide обработки, обеспечивающая определение динамики изменения температурного поля Sous-Vide обработанных функциональных пищевых продуктов на основе животного и растительного сырья. Для расчета процесса Sous-Vide обработки функциональных продуктов применяли дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности с учетом критерия Био. При решении системы дифференциальных уравнений в частных производных использован математический пакет flexPDE. В расчетах использована пространственная сетка с числом узлов 20000, принята точность вычислений $10E-4$. При расчетах применяются экспериментально определенные значения теплопроводности, удельной теплоемкости, плотности и температуропроводности каждого из компонентов пищевой системы. Результаты вычисленного эксперимента при математическом моделировании процесса Sous-Vide обработки показывают эволюцию температурных полей в различных сечениях пищевой системы и на ее верхней поверхности, имеющей форму эллипсоида вращения. Установлены зависимости изменения теплофизических характеристик при продольном и поперечном обтекании пищевой системы теплоносителем. Результаты вычислительного эксперимента показывают хорошую сходимость математической модели и полученных результатов, которая составляет 94%, что свидетельствует об адекватности разработанной математической модели процесса Sous-Vide обработки. Полученная математическая модель позволяет путем вычислительного эксперимента анализировать и оптимизировать режимы Sous-Vide обработки широкого ассортимента пищевого сырья, различных геометрических форм и размеров, обладающих различными физико-химическими и теплофизическими свойствами, с учетом их нестационарности в условиях термического воздействия.

Ключевые слова: Sous-Vide обработка, растительные биокорректоры, вакуумная упаковка, математическое моделирование, комбинированные пищевые системы.

Application of methods of mathematical modeling in the optimization design of technological processes of food production

Evgenij S. Popov	¹	e_s_popov@mail.ru
Ekaterina A. Pozhidaeva	¹	katerina-77707@mail.ru
Elena S. Pevtsova	¹	beloch64@mail.ru
Alina V. Sokolova	¹	alinasokolova.1999@mail.ru
Alyona S. Kolmakova	¹	svetikkoz1991@gmail.com

¹ Voronezh State University of Engineering Technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, 394036, Russia

Abstract. Optimization of thermochemical and biological transformations occurring during the heat treatment of food products can be carried out only taking into account the dynamics of the formation of temperature fields inside the processed products. A mathematical model of the Sous-Vide processing process has been developed, which provides the determination of the dynamics of changes in the temperature field of Sous-Vide processed functional food products based on animal and vegetable raw materials. To calculate the process of Sous-Vide processing of functional products, we used the differential equation of unsteady heat conduction taking into account the Bio criterion. When solving a system of partial differential equations, the mathematical package flexPDE is used. In calculations, a spatial grid with the number of nodes 20000 was used, the accuracy of calculations was $10E-4$. Experimentally determined values of thermal conductivity, specific heat capacity, density and thermal diffusivity of each of the components of the food system are used in calculations. The results of the calculated experiment in mathematical modeling of the Sous-Vide processing process show the evolution of temperature fields in different sections of the food system and on its upper surface, having the shape of an ellipsoid of rotation. The dependences of the change in the thermophysical characteristics of the longitudinal and transverse flow of the food system coolant. The results of the computational experiment show a good convergence of the mathematical model and the results obtained, which is 94%, which indicates the adequacy of the developed mathematical model of the Sous-Vide processing process. The obtained mathematical model allows, by means of a computational experiment, to analyze and optimize the Sous-Vide processing modes of a wide range of food raw materials, of various geometric shapes and sizes, with different physicochemical and thermal properties, taking into account their non-stationarity under thermal influence.

Keywords: Sous-Vide processing, vegetable biocorrectors, vacuum packaging, mathematical modeling, combined food systems

Для цитирования

Попов Е.С., Пожидаева Е.А., Певцова Е.С., Соколова А.В., Колмакова А.С. Применение методов математического моделирования в оптимизационном проектировании технологических процессов производства пищевых продуктов // Вестник ВГУИТ. 2019. Т. 81. № 2. С. 47–55. doi:10.20914/2310-1202-2019-2-47-55

For citation

Popov E.S., Pozhidaeva E.A., Pevtsova E.S., Sokolova A.V., Kolmakova A.S. Application of methods of mathematical modeling in the optimization design of technological processes of food production. *Vestnik VGUIT* [Proceedings of VSUET]. 2019. vol. 81. no. 2. pp. 47–55. (in Russian). doi:10.20914/2310-1202-2019-2-47-55

Введение

Многообразие состава и свойств пищевых продуктов, применяемых в отрасли организации питания, используемых в кулинарной практике, многообразие рецептур и разнотипность оборудования обуславливают многочисленность способов тепловой обработки и широкие диапазоны ее режимов. При этом от способа, режима и продолжительности обработки зависят санитарная безопасность, органолептические показатели, пищевая и биологическая ценность, сохранность ценных биологически активных компонентов, а также технологические потери продукции.

Одним из перспективных направлений развития пищевой индустрии в повышении сохранности свойств термолабильных ингредиентов является применение щадящей термической обработки сырья с предварительной вакуумной упаковкой в полимерную термоустойчивую пленку – технология Sous-Vide или LT-LT-обработка («low-temperature – long-time») [1–9]. Данный метод приготовления пищи был разработан и применен в середине 1970-х годов шеф-поваром Джорджем Пралюсом (Georges Pralus) при приготовлении паштета из гусиной печени фуа-гра. В настоящее время данная технология находит свое применение в сегменте корпоративного питания, в фаст-фудах, в заготовочных цехах крупных ресторанов. В то же время процесс Sous-Vide обработки является нестационарным, характеризуется комплексом термохимических и биологических превращений пищевых систем, оптимизация которых может быть осуществлена только с учетом динамики температурных полей на основе решения задачи нестационарной теплопроводности.

Материалы и методы

При решении поставленной задачи по оптимизации процесса щадящей тепловой обработки пищевых систем применено дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = k \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

где t – температура, °C; τ – продолжительность, с; k – коэффициент температуропроводности продукта, м²/с.

Дополняя (1) начальными и граничными условиями, можно получить решения задачи нестационарной теплопроводности в аналитическом виде для тел простейшей формы, например, неограниченной пластины, неограниченного цилиндра, шара или численными методами для тел произвольной формы [10].

В дифференциальном уравнении (1) параболического типа предполагается, что теплота распространяется с бесконечной скоростью. В [11] рассмотрен подход, основанный на конечной скорости распространения теплоты, что характерно для большей части пищевых продуктов, который позволил путем введения понятия «температурный фронт» и заменой производной от температуры по времени в возмущенной области ее средним (по протяженности возмущенной области) значением свести уравнение в частных производных для одномерной области к обыкновенному дифференциальному уравнению. Такое модельное представление о распространении теплоты позволило в аналитическом виде анализировать проблемы, возникающие при тепловой обработке пищевых продуктов простейшей геометрической формы. Тем не менее, как в первом, так и во втором случаях для проведения конкретных расчетов необходимо иметь справочные данные по теплофизическим свойствам продуктов, подвергаемых термообработке.

Вакуум-упакованная поликомпонентная пищевая система, состоящая из 16% масс. моркови, 12,5% масс. лука репчатого, 25,5% масс. картофеля, 20,0% масс. свеклы столовой, 26,0% масс. функциональной растительной композиции на основе продуктов глубокой комплексной переработки растительного сырья (муки зародышей пшеницы, семян амаранта, тыквы, льна, биологически активных добавок к пище «Селексен», «Флавоцен») [12, 13], представляла собой геометрическую фигуру, которую можно приближенно представить в виде пересечения прямоугольного параллелепипеда, длина и ширина основания которого равны $a = 140$ мм и $b = 105$ мм, с эллипсоидом вращения, у которого полуоси равны a , b и $c = 3,5$ мм. Углы прямоугольного параллелепипеда скруглены радиусом $R = 15$ мм (рисунок 1).

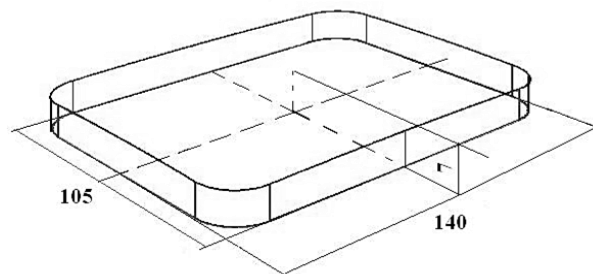


Рисунок 1. Схематическое изображение исследуемой вакуум-упакованной поликомпонентной пищевой системы

Figure 1. Schematic representation of the investigated vacuum-packaged multicomponent food system

Результаты и обсуждение

Для расчета теплофизических характеристик поликомпонентной пищевой системы примем, что объем пищевой системы равен сумме объемов составляющих ее компонентов, тогда плотность смеси можно рассчитать по формуле [14]

$$\frac{1}{\rho} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\rho_i}, \quad (2)$$

где ρ – плотность пищевой системы, кг/м³; x_i – массовая доля i -го компонента, имеющего плотность ρ_i ; n – число компонентов в пищевой системе.

Удельную теплоемкость пищевой системы рассчитаем по зависимости

$$c = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{k_i} \varphi_i,$$

где λ_i , k_i – теплопроводность, Вт/(м·К), и температуропроводность, м²/с, i -го компонента пищевой системы; φ_i – объемная доля i -го компонента пищевой системы, которую определим по соотношению

$$\varphi_i = \frac{x_i}{\rho_i} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\rho_i}},$$

Экстремальные значения теплопроводности пищевой системы, состоящей из n компонентов, с использованием метода электроанalogии, можно найти из следующих предположений:

– если все компоненты пищевой системы расположены по направлению теплового потока, то максимальная величина теплопроводности системы будет определять как

$$\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i;$$

– минимальное значение теплопроводности пищевой системы соответствует случаю, когда отдельные частицы имеют расположение, перпендикулярное направлению распространения теплоты (градиенту температуры), что влечет за собой применение соотношения

$$\frac{1}{\lambda_{\min}} = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i}{\lambda_i}.$$

Для теплофизических расчетов теплопроводность пищевой системы определим как среднеарифметическое значение найденных экстремальных величин

$$\lambda_{\min} = \frac{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}{2}.$$

Входящую в уравнение (1) температуропроводность пищевой системы рассчитаем по формуле

$$k = \frac{\lambda}{\rho c}.$$

Результаты вычислений теплофизических характеристик поликомпонентной пищевой системы, подвергнутой Sous-Vide обработке, представлены в таблице 1.

Теплофизические свойства поликомпонентной пищевой системы, подвергнутой Sous-Vide обработке

Таблица 1.

Table 1.

Thermophysical properties of a multicomponent food system subjected to Sous-vide processing

Физическая величина Physical quantity	Температура в центре продукта, °C / продолжительность LT-обработки, мин The temperature in the center of the product, °C / duration of LT processing, min			
	20 °C/0 мин	65 °C /11 мин	85 °C /25 мин	89 °C /42 мин
ρ , кг/м ³	972,5	1009,3	1026,4	1039,5
c , Вт/ кг · К	3530,6	3308,8	3129,5	2939,2
λ , кг/ м · К	0,4744	0,4408	0,4038	0,3706
k , м ² /с · 10 ⁷	1,381	1,326	1,257	1,213

Динамика температурного поля в пищевой системе, рассчитываемая с использованием уравнения (1), в значительной степени определяется граничными условиями. С учетом того что термообработка образцов проводилась горячим воздухом с температурой $t_{\infty} = 95^{\circ}\text{C}$, для которого коэффициенты теплоотдачи достаточно малы, приняты граничные условия 3-го рода, определяемые уравнением

$$-\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{\text{пов}} = \alpha \cdot (t_{\infty} - t), \quad (3)$$

где λ – теплопроводность продукта, Вт/(м·К); n – нормаль к поверхности образца; α – коэффициент теплоотдачи от воздуха к поверхности материала, Вт/(м²·К).

Так как испытуемый образец находится внутри полимерной тары, то необходимо оценить ее термическое сопротивление. Упаковочные пленки имеют толщину порядка 100 мкм, а по имеющимся данным [15] ее температуропроводность имеет примерно такую же величину, что и у исследуемой пищевой системы – $(11 \div 15) \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$, в связи с этим ее влияние на поле температур внутри продукта можно не учитывать.

Верхняя поверхность образца имеет малую кривизну, поэтому расчет коэффициента теплоотдачи в (3) будем вести по критериальным уравнениям как в случае обтекания теплоносителем плоской поверхности [14]. Для выбора расчетной формулы необходимо рассчитать число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{ud\rho}{\mu},$$

где u – скорость воздуха, м/с; μ – динамическая вязкость воздуха, Па·с; ρ – плотность воздуха, кг/м³; d – длина пути потока вдоль теплообменной поверхности, м.

Так как расположение образца относительно направления движения воздуха может быть произвольным, а образец не имеет полной симметрии, то расчет α будем вести для двух характерных направлений – вдоль большой оси эллипсоида вращения и в поперечном направлении.

Длина дуги эллипса, получаемого при сечении образца вертикальной плоскостью, проходящей через его большую ось, определяется по формуле [16]

$$l_1 = a \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - e_1^2 \cos^2 t} dt, \quad (4)$$

где e_1 – эксцентриситет эллипса, определяемый выражением

$$e_1 = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad e \in [0,1). \quad (5)$$

Для принятой геометрии образца $t_1 = \pi/3$, а $t_2 = 2\pi/3$.

После подстановки принятых значений, $a = 140$ мм, $b = 105$ мм в соотношения (4) и (5), используя пакет символьной математики Maple для взятия эллиптического интеграла в (4), получим значение $l_1 = 145$ мм.

Для поперечного направления расчетные формулы примут вид

$$l_2 = b \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - e_2^2 \cos^2 t} dt,$$

где

$$e_2 = \sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}},$$

а $t_1 = \pi/3$, а $t_2 = 2\pi/3$.

Для значения $c = 3,5$ мм получили значение длины дуги эллипса, равное $l_2 = 109$ мм.

Если рассматривать влажный воздух как бинарную смесь сухого воздуха и водяного пара, то его плотность можно рассчитать из соотношения [17, 18]

$$\rho = \frac{\rho_{\text{п}}(1+x)}{(x + M_{\text{п}} / M_{\text{св}})}, \quad (6)$$

где – молярные массы водяного пара и сухого воздуха, равные соответственно $M_{\text{п}} = 18,016$ кг/кмоль и $M_{\text{св}} = 28,96$ кг/кмоль; $\rho_{\text{п}}$ – плотность водяного пара, кг/м³; x – влагосодержание паровоздушной смеси.

Плотность водяного пара определяют из уравнения состояния

$$\rho_{\text{п}} = \frac{M_{\text{п}} p}{RT},$$

где $R = 8314$ Дж/(кмоль · К) – универсальная газовая постоянная; p – давление, которое примем равным атмосферному; Па, T – абсолютная температура, К.

Влагосодержание воздуха при его известной относительной влажности φ находят по зависимости [17, 18]

$$x = \frac{\varphi \frac{M_{\text{п}}}{M_{\text{св}}}}{(p/p_t)^t \exp[-B(1-t^{-1}) + C(1-t)] - \varphi},$$

где $p_t = 610,8$ Па – давление насыщенных паров воды при $T_0 = 273,15$ К; $t = T/T_t$ – относительная температура; A, B, C – коэффициенты, численные значения которых [15, 16] равны

$$A = 9,248; B = 27,098; C = 2,005.$$

Динамическую вязкость влажного воздуха в зависимости от его влагосодержания x можно найти с использованием формулы Уилки [16, 17]

$$\mu = \frac{\mu_{\text{п}} x}{x + \Phi_{1,2} M_{\text{п}} / M_{\text{св}}} + \frac{\mu_{\text{св}}}{1 + \Phi_{2,1} x M_{\text{св}} / M_{\text{п}}}. \quad (7)$$

Здесь $\mu_{\text{п}}$, $\mu_{\text{св}}$ – динамическая вязкость пара и сухого воздуха, Па·с,

$$\Phi_{1,2} = \frac{[1 + (M_{\text{п}} / M_{\text{св}})^{-1/4} (\mu_{\text{п}} / \mu_{\text{св}})^{1/2}]^2}{2\sqrt{2(1 + M_{\text{п}} / M_{\text{св}})}},$$

$$\Phi_{2,1} = \frac{[1 + (M_{\text{св}} / M_{\text{п}})^{-1/4} (\mu_{\text{св}} / \mu_{\text{п}})^{1/2}]^2}{2\sqrt{2(1 + M_{\text{св}} / M_{\text{п}})}},$$

Если использовать безразмерную температуру $t = T/T_0$, где T – температура набегающего потока воздуха, К, то

$$\mu_{\text{п}} = 2,91 \cdot 10^{-5} t^{3/2} / (t + 2,38), \quad (8)$$

$$\mu_{\text{св}} = 2,41 \cdot 10^{-5} t^{3/2} / (t + 0,41). \quad (9)$$

При температуре греющего воздуха $t_{\infty} = 100^{\circ}\text{C}$ и его относительной влажности $\varphi = 0,85$ для давления $p = 101325$ Па получены значения плотности пара и паросодержания воздуха, равные соответственно $\rho_{\text{п}} = 0,588$ кг/м³ и $x = 3,577$. Тогда плотность влажного воздуха по (6) примет значение $\rho = 0,642$ кг/м³.

Динамическая вязкость водяного пара и сухого воздуха согласно уравнениям (8) и (9) составляет $\mu_{\text{п}} = 1,24 \cdot 10^{-5}$ Па·с и $\mu_{\text{св}} = 2,17 \cdot 10^{-5}$ Па·с соответственно, динамическая вязкость влажного воздуха по уравнению (7) равна $\mu = 1,38 \cdot 10^{-5}$ Па·с.

При скорости воздушного потока $u = 1,2$ м/с число Рейнольдса при продольном обтекании верхней поверхности образца будет

$$\text{Re}_e^1 = \frac{1,2 \cdot 0,145 \cdot 0,642}{1,38 \cdot 10^{-5}} = 8109.$$

Пренебрегая кривизной, теплоотдачу от верхней поверхности образца при $\text{Re} < 5 \cdot 10^5$ будем рассчитывать как для плоской поверхности по формуле [14]

$$\text{Nu}_v^1 = 0,664 \cdot \text{Re}_v^{1/2} \cdot \text{Pr}^{1/3},$$

где Pr – число Прандтля для воздуха при температуре набегающего потока, которое рассчитывается по соотношению

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{k} = \frac{\nu \rho c}{\lambda}, \quad (10)$$

где ν – кинетическая вязкость, м²/с; ρc – объемная теплоемкость, Дж/ м³·К; λ – теплопроводность, Вт/м·К влажного воздуха.

Так как $\nu = \mu/\rho$, то с учетом ранее полученных результатов $\nu = 2,15 \cdot 10^{-5}$ м²/с. Объемная теплоемкость среды как величина аддитивная находится по формуле [14]

$$\rho c = \frac{\rho_{\text{п}} c_{\text{п}} (x + c_{\text{св}} / c_{\text{п}})}{(x + M_{\text{п}} / M_{\text{св}})}, \quad (11)$$

где $c_{\text{п}}$, $c_{\text{св}}$ – удельные изобарные теплоемкости водного пара и сухого воздуха, которые согласно [14] для интервала температур 0–95 °С можно принять равными

$$c_{\text{п}} = 1873 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}, \quad c_{\text{св}} = 1006 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}.$$

В результате расчета по (11) получаем $\rho c = 1079$ Дж/ м³·К.

Теплопроводность влажного воздуха является аддитивной величиной и может быть найдена по уравнению [17, 18]

$$\lambda = \frac{\lambda_{\text{п}} x + \lambda_{\text{св}} \frac{M_{\text{п}}}{M_{\text{св}}}}{x + \frac{M_{\text{п}}}{M_{\text{св}}}}, \quad (12)$$

где $\lambda_{\text{п}}$, $\lambda_{\text{св}}$ – теплопроводности водяного пара и сухого воздуха, определяемые уравнениями

$$\lambda_{\text{п}} = \frac{0,0595 \cdot t^{0,5}}{1 + \frac{2,46}{t}}, \quad (13)$$

$$\lambda_{\text{св}} = \frac{0,0347 \cdot t^{0,5}}{1 + \frac{0,454}{t}}. \quad (14)$$

В результате расчетов по (12)–(14) имеем $\lambda_{\text{п}} = 0,0248$ Вт/(м·К), $\lambda_{\text{св}} = 0,0304$ Вт/(м·К), $\lambda = 0,0257$ Вт/(м·К).

Таким образом, число Прандтля по (10) будет равно

$$\text{Pr} = 0,902.$$

Число Нуссельта для верхней поверхности образца при его продольном обтекании воздухом составит $\text{Nu}_v^1 = 57,8$.

При поперечном обтекании образца, когда $d = l_2 = 0,109$ м, число Рейнольдса равно $\text{Re}_v^2 = 6096$, а число Нуссельта – $\text{Nu}_v^2 = 50,1$. Коэффициенты теплоотдачи найдем по формуле

$$\alpha = \frac{\text{Nu} \lambda}{d},$$

что дает следующие результаты

$$\alpha_e^1 = \frac{57,8 \cdot 0,0257}{0,145} = 10,2 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)},$$

$$\alpha_e^2 = \frac{50,1 \cdot 0,0257}{0,109} = 11,8 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Среднее по верхней поверхности образца значение коэффициента теплоотдачи будет равно $\alpha_e^1 = (\alpha_e^1 + \alpha_e^2) / 2 = 11,0$ Вт/(м²·К).

Для нижней плоской поверхности вакуум-упакованного продукта при продольном обтекании воздухом $d = 0,140$ м, $\text{Re}_n^1 = 7829$, $\text{Nu}_n^1 = 56,8$, $\alpha_n^1 = 10,4$ Вт / (м²·К).

Для поперечного движения воздуха, когда $d = 0,105$ м, имеем: $\text{Re}_n^2 = 5872$, $\text{Nu}_n^2 = 49,2$, $\alpha_n^2 = 12,0$ Вт / (м²·К). Среднее значение коэффициента теплоотдачи – $\alpha_n = 11,2$ Вт / (м²·К).

Для боковых поверхностей коэффициент теплоотдачи будем считать таким же, как на верхней поверхности.

Для численного интегрирования уравнения нестационарной теплопроводности (1) с граничными условиями третьего рода (2) приведем их к безразмерному виду. При этом необходимо учесть, что для испытуемого объекта размеры по координатным осям различаются

больше, чем на порядок. Вследствие этого скорости релаксации температурных возмущений по этим направлениям будут существенным образом отличаться между собой. В связи с этим выбор характерного размера системы l_0 , определяющего масштаб времени для исследуемого процесса, играет важную роль.

Определим l_0 следующим образом

$$l_0 = \frac{4V}{S},$$

где V – объем тела, m^3 ; S – площадь поверхности, m^2 .

Будем приближенно считать, что вакуум-упакованная пищевая система представляет собой прямоугольный параллелепипед со сторонами a, b, c . Тогда

$$l_0 = \frac{2abc}{ac + bc + ab}. \quad (15)$$

Обозначим $c/a = \xi_1, c/b = \xi_2$. Тогда с учетом (15)

$$\frac{l_0}{c} = \frac{2}{1 + \xi_1 + \xi_2}. \quad (16)$$

Пусть масштаб времени равен $\tau_0 = l_0^2/k$. Тогда безразмерное время $\theta = \tau/\tau_0 = k\tau/l_0^2$.

Пусть безразмерные координаты и температура определяются выражениями:

$$X = x/a; Y = y/b; Z = z/c; \\ T = (t_\infty - t)/(t_\infty - t_0),$$

где t_0 – начальное значение температуры тела $t_0, 20^\circ C$.

С учетом принятых обозначений и соотношения (16) уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{4}{(1 + \xi_1 + \xi_2)^2} \left(\xi_1^2 \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \xi_2^2 \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} \right). \quad (17)$$

Начальное условие

$$T(X, Y, Z, 0) = 1. \quad (18)$$

Граничные условия

$$\frac{\partial T(-1/2, Y, Z, \theta)}{\partial X} = -Bi_x \cdot T(-1/2, Y, Z, \theta), \quad (19)$$

$$\frac{\partial T(1/2, Y, Z, \theta)}{\partial X} = Bi_x \cdot T(1/2, Y, Z, \theta), \quad (20)$$

$$\frac{\partial T(X, -1/2, Z, \theta)}{\partial Y} = -Bi_y \cdot T(X, -1/2, Z, \theta), \quad (21)$$

$$\frac{\partial T(X, 1/2, Z, \theta)}{\partial Y} = Bi_y \cdot T(X, 1/2, Z, \theta), \quad (22)$$

$$\frac{\partial T(X, Y, -1/2, \theta)}{\partial Z} = -Bi_{zH} T(X, Y, -1/2, \theta), \quad (23)$$

$$\frac{\partial T(X, Y, Z^*, \theta)}{\partial Z} = Bi_{zB} T(X, Y, Z^*, \theta), \quad (24)$$

Здесь $Bi_x = \alpha_e a / \lambda_\tau, Bi_y = \alpha_e b / \lambda_\tau, Bi_{zH} = \alpha_h h / \lambda_\tau, Bi_{zB} = \alpha_b h / \lambda_\tau$; h – высота прямоугольного параллелепипеда, эквивалентного по объему образцу, у которого верхняя грань есть эллипсоид вращения (см. уравнение (25)), а нижняя – плоскость.

Если уравнение трехосного эллипсоида вращения, образующего верхнюю грань образца, есть

$$Z^* = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad (25)$$

то объем верхней половины будет

$$V_e = 4 \int_0^{c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} \int_0^{a/2} \int_0^{b/2} dx dy dz. \quad (26)$$

Так как объем нижней половины равен

$$V_H = a \cdot b \cdot c, \quad (27)$$

то весь объем образца составит

$$V = V_B + V_H, \quad (28)$$

а высота равновеликого прямоугольного параллелепипеда

$$h = V / (a \cdot b). \quad (29)$$

Отметим, что уравнение (17) при $\xi_1 \rightarrow 0$

и $\xi_2 \rightarrow 0$ становится одномерным: $\frac{\partial T}{\partial \theta} = 4 \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2}$,

то есть соответствует случаю нагревания (охлаждения) неограниченной пластины.

Вычисления по (29) с учетом (26)–(28), проведенные с использованием пакета символьной математики Maple, дали следующий результат – $h = 6,688$ мм. Найденное значение эквивалентной высоты прямоугольного параллелепипеда позволило уточнить характерный размер исследуемого объекта l_0 путем замены в (5.30) значения c на $h/2$.

При решении системы дифференциальных уравнений в частных производных (17)–(24) применен математический пакет flexPDE, использующий метод конечных элементов для моделирования объектов с распределенными параметрами. В расчетах использована пространственная сетка с числом узлов $n = 20000$, принята точность вычислений $1 \cdot 10^{-4}$.

Результаты моделирования, показывающие эволюцию температурных полей на плоскости $Z = 0$ и на верхней поверхности образца, имеющего форму эллипсоида вращения, представлены на рисунке 2. Проверка адекватности модельных представлений показала, что максимальное отклонение результатов расчета от опытных данных по Sous-Vide обработке поликомпонентной пищевой системы составляет не более 7,2%.

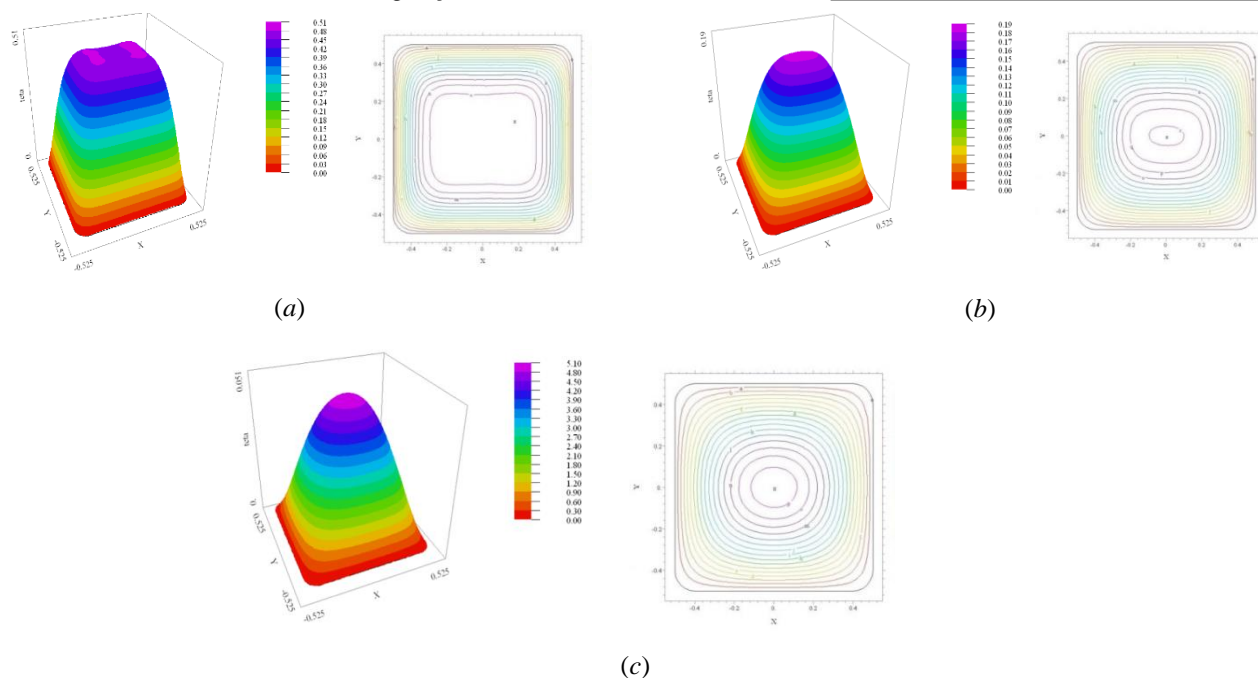


Рисунок 2. Эволюция температурного поля на плоскости $Z = 0$ (слева) и на верхней поверхности образца (справа) при различной продолжительности Sous-Vide обработки поликомпонентной пищевой системы, мин: $a - 11$; $b - 25$; $c - 42$
 Figure 2. Evolution of the temperature field on the $Z = 0$ plane (left) and on the upper surface of the sample (right) at different Sous-Vide processing times of a multicomponent food system, min: $a - 11$; $b - 25$; $c - 42$

Заклучение

Полученная математическая модель позволяет путем вычислительного эксперимента анализировать и оптимизировать режимы Sous-Vide обработки широкого ассортимента пищевого сырья различной геометрической формы и размера, обладающего разными

физико-химическими и теплофизическими свойствами, с учетом его нестационарности в условиях термического воздействия.

Благодарности

Работа выполнена в рамках научно-исследовательских работ по гранту Президента Российской Федерации.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Carrascal J.R. Sous-vide cooking of meat: A Maillarized approach // *International Journal of Gastronomy and Food Science*. 2019. V. 16. P. 100–108.
- 2 Mathias P.C. The quest for umami: Can sous vide contribute? // *International Journal of Gastronomy and Food Science*. 2018. V. 13. P. 129–133.
- 3 Shenggian S.F. Texture, color and sensory evaluation of sous-vide cooked beef steaks processed using high pressure processing as method of microbial control // *LWT*. 2019. V. 103. P. 169–177.
- 4 Uttaro B. Efficacy of multi-stage sous-vide cooking on tenderness of low value beef muscles // *Meat Science*. 2019. V. 149. P. 40–46.
- 5 Stringer S.C. Predicting bacterial behaviour in sous vide food // *International Journal of Gastronomy and Food Science*. 2018. V. 13. P. 117–128.
- 6 Cosansu S. Effect of grape seed extract on heat resistance of *Clostridium perfringens* vegetative cells in sous vide processed ground beef // *Food Research International*. 2019. V. 120. C. 33–37.
- 7 Попов Е.С. Нутриентные корректоры пищевого статуса на основе продуктов глубокой переработки низкожирного сырья: получение, свойства, новые технологии применения. Воронеж, 2017.

- 8 Родионова Н.С., Попов Е.С. Sous-Vide обработка мелкокусковых полуфабрикатов из мяса говядины: режимы и показатели качества // *Пищевая промышленность*. 2015. № 10. С. 32–34.
- 9 Радченко М.В. Исследование влияния длительной низкотемпературной тепловой обработки на качественные характеристики вареных продуктов из свинины с различным ходом автолиза. Орел, 2017. 24 с.
- 10 Самарский А.А., Вабишевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.
- 11 Бражников А.М., Теория термической обработки мясопродуктов. Москва: Агропромиздат, 1987. 271 с.
- 12 Голубева Л.В., Пожидаева Е.А., Дарьин А.О., Свистула А.В. Разработка технологии получения структурирующей добавки для замороженных молочных продуктов // *Пищевая промышленность*. 2018. С. 43–45.
- 13 Пожидаева Е.А., Болотова Н.В., Илошина А.В. Влияние условий замораживания на продолжительность процесса холодильной обработки творожных полуфабрикатов, обогащенных полиненасыщенными жирными кислотами // *Устойчивое развитие регионов: материалы Международной научно-практической конференции*. 2016. С. 124–130.

14 Романков Г.П., Фролов В.Ф., Флисюк О.М. Методы расчета процессов и аппаратов химической технологии (примеры и задачи). Санкт-Петербург: Химиздат, 2009. 544 с.

15 Лявер Д. Полимеры в пищевой промышленности // Технология переработки и упаковки. 2003. № 4. С.12.

16 Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Москва: Наука, 1973. 832 с.

17 Харин В.М., Агафонов Г.В. Теоретические основы тепло – и влагообменных процессов пищевой промышленности. М.: Пищевая промышленность, 2001. 344 с.

18 Харин В.М., Агафонов Г.В. Теория гигро- и гидротермической обработки капиллярнопористых тел. Воронеж: ВГТА, 2000. 184 с.

REFERENCES

1 Carrascal J.R. Sous-vide cooking of meat: A Maillardized approach. International Journal of Gastronomy and Food Science. 2019. vol. 16. pp. 100–108.

2 Mathias P.C. The quest for umami: Can sous vide contribute? International Journal of Gastronomy and Food Science. 2018. vol. 13. pp. 129–133.

3 Shenggian S.F. Texture, color and sensory evaluation of sous-vide cooked beef steaks processed using high pressure processing as method of microbial control. LWT. 2019. vol. 103. pp. 169–177.

4 Uttaro B. Efficacy of multi-stage sous-vide cooking on tenderness of low value beef muscles. Meat Science. 2019. vol. 149. pp. 40–46.

5 Stringer S.C. Predicting bacterial behaviour in sous vide food. International Journal of Gastronomy and Food Science. 2018. vol. 13. pp. 117–128.

6 Cosansu S. Effect of grape seed extract on heat resistance of Clostridium perfringens vegetative cells in sous vide processed ground beef. Food Research International. 2019. vol. 120. pp. 33–37.

7 Popov E.S. Nutrientnye korrektoory pishchevogo statusa na osnove produktov glubokoj pererabotki nizkomaslichnogo syr'ya: poluchenie, svoystva, novye tekhnologii primeneniya [Nutrient food status correctors based on products of deep processing of low oil raw materials: production, properties, new technologies of application]. Voronezh, 2017. (in Russian).

8 Rodionova N.S., Popov E.S. Sous-Vide processing of small-sized beef semi-finished products: modes and quality indicators. Pishchevaya promyshlennost' [Food industry]. 2015. no. 10. pp. 32–34. (in Russian).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Евгений С. Попов д.т.н., профессор, кафедра сервиса и ресторанного бизнеса, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия, e_s_popov@mail.ru

Екатерина А. Пожидаева к.т.н., доцент, кафедра технологии продуктов животного происхождения, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия, katerina-77707@mail.ru

Елена С. Певцова студент, кафедра сервиса и ресторанного бизнеса, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия, beloch64@mail.ru

9 Radchenko M.V. Issledovaniye vliyaniya dlitel'noy nizkotemperaturnoy teplovoy obrabotki na kachestvennyye kharakteristiki varenykh produktov iz svininy s razlichnym khodom avtoliza [Investigation of the effect of long-term low-temperature heat treatment on the quality characteristics of boiled pork products with different autolysis course]. Orel, 2017. 24 p. (in Russian).

10 Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N. Vychislitel'naya teploperedacha [Computational heat transfer]. Moscow, Yeditorial URSS, 2003. 784 p. (in Russian).

11 Brazhnikov A.M. Teoriya termicheskoy obrabotki myasoproduktov [Theory of heat treatment of meat products]. Moscow, Agropromizdat, 1987. 271 p. (in Russian).

12 Golubeva L.V., Pozhidaeva E.A., Darin A.O., Svistula A.V. Development of technology for producing structuring additives for frozen dairy products. Pishchevaya promyshlennost' [Food industry]. 2018. pp. 43–45. (in Russian).

13 Pozhidaeva E.A., Bolotova N.V., Ilyushina A.V. Influence of freezing conditions on the duration of the process of refrigeration processing of curd semi-finished products enriched with polyunsaturated fatty acids and lots. Ustoychivoye razvitiye regionov [Sustainable development of regions: materials of the International scientific-practical conference]. 2016. pp. 124–130. (in Russian).

14 Romankov G.P., Frolov V.F., Flisyuk O.M. Metody rascheta protsessov i apparatov khimicheskoy tekhnologii (primery i zadachi) [Methods for calculating the processes and devices of chemical technology (examples and tasks)]. St. Petersburg, Khimizdat, 2009. 544 p. (in Russian).

15 Laver D. Polymers in the food industry. Tekhnologiya pererabotki i upakovki [Processing and packaging technology]. 2003. vol. 4. pp. 12. (in Russian).

16 Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov [Mathematics Handbook for Scientists and Engineers]. Moscow, Nauka, 1973. 832 p. (in Russian).

17 Kharin V.M., Agafonov G.V. Theoretical foundations of heat and moisture exchange processes in the food industry. Pishchevaya promyshlennost' [Food Industry]. 2001. 344 p. (in Russian).

Kharin V.M., Agafonov G.V. Teoriya gigro- i gidrotermicheskoy obrabotki kapillyarnoporistykh tel [Theory of Hygro-and Hydrothermal Processing of Capillary-Porous Bodies]. Voronezh, VSTA, 2000. 184 p. (in Russian).

INFORMATION ABOUT AUTHORS

Evgenij S. Popov Dr. Sci. (Engin.), professor, service and restaurant business department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, 394036, Russia, e_s_popov@mail.ru

Ekatерina A. Pozhidaeva Cand. Sci. (Engin.), associate professor, technology of animal products department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19, Voronezh, 394036, Russia, katerina-77707@mail.ru

Elena S. Pevtsova student, service and restaurant business department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19, Voronezh, 394036, Russia, beloch64@mail.ru

Алина В. Соколова студент, кафедра сервиса и ресторанного бизнеса, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия, alinasokolova.1999@mail.ru

Алена С. Колмакова студент, кафедра сервиса и ресторанного бизнеса, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия, svetikkoz1991@gmail.com

КРИТЕРИЙ АВТОРСТВА

Евгений С. Попов предложил методику проведения эксперимента, написал рукопись, корректировал ее до подачи в редакцию

Екатерина А. Пожидаева обзор литературных источников по исследуемой проблеме, выполнила расчеты, несет ответственность за плагиат

Елена С. Певцова, Алина В. Соколова, Алена С. Колмакова провели эксперимент

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ПОСТУПИЛА 15.04.2019

ПРИНЯТА В ПЕЧАТЬ 07.05.2019

Alina V. Sokolova student, service and restaurant business department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19, Voronezh, 394036, Russia, alinasokolova.1999@mail.ru

Alyona S. Kolmakova student, service and restaurant business department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19, Voronezh, 394036, Russia, svetikkoz1991@gmail.com

CONTRIBUTION

Evgenij S. Popov suggested the methodology for conducting the experiment, wrote the manuscript, corrected it before filing to the editorial office

Ekaterina A. Pozhidaeva review of the literature on the problem, performed calculations, is responsible for plagiarism

Elena S. Pevtsova, Alina V. Sokolova, Alyona S. Kolmakova conducted an experiment

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare no conflict of interest.

RECEIVED 4.15.2019

ACCEPTED 5.7.2019