Процессы и аппараты пищевых производств

Processes and devices for food production

Оригинальная статья/Original article

УДК 664.542.69:621.867.4

DOI: <http://doi.org/10.20914/2310-1202-2019-2-13-21>

Имитационная математическая модель процесса смешивания сыпучих компонентов в смесителе

Александр Н. Остриков	¹	oan@vsuet.ru
Лариса Н. Фролова	¹	fln 84@mail.ru
Алексей И. Александров	¹	alex-nadezhda@mail.ru
Виктор В. Посметьев	²	victorvpo@mail.ru

¹ Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия

² ООО «Доступная робототехника», ул. Тимирязева, д.8, г. Воронеж, 394087, Россия

Аннотация. Разработанная имитационная модель позволяет проводить компьютерные эксперименты по смешиванию компонентов, в которых изменяются параметры компонентов смеси или смесителя, устанавливается характер влияния параметра и даются рекомендации по выбору его оптимальных значений. Модель процесса смешивания учитывает размеры, форму и реологические свойства компонентов смеси, а также взаимодействие сыпучего материала с рабочими поверхностями смесителя (лопатками, стойками лопаток, валами, корпусом). Имитационная математическая модель смесителя обладает высоким пространственным разрешением для корректного воспроизведения взаимодействия частиц в процессе смешивания. В рамках конечно-элементного приближения сыпучий материал представляется как совокупность множества элементов. Для моделирования механического поведения смеси использовался метод динамики частиц. Моделирование производится в трехмерном декартовом пространстве. Состояние каждого элемента задается шестью переменными: координатами его центра и компонентами скорости. Решением данной системы дифференциальных уравнений второго порядка являются функции, определяющие траектории движения элементов и позволяющие оценить эффективность процесса перемешивания. Для решения дифференциальных уравнений такого вида используется численный метод Рунге-Кутты второго порядка. Для реализации расчета по представленным выше формулам и удобства проведения серий компьютерных экспериментов разработана компьютерная программа на языке Object Pascal в интегрированной среде программирования Borland Delphi 7. Разработанная математическая модель процесса смешивания сыпучих компонентов позволяет подобрать рациональные технологические режимы смешивания, что дает возможность увеличить однородность смешивания до 98 % и рассчитать кинематический режим процесса смешивания в смесителе за счет создания «квазивесомого» гидродинамического режима смешивания и существенного ускорения процесса смешивания.

Ключевые слова: смешивание, сыпучий материал, математическая модель, расчет, параметры.

Simulation mathematical model of the mixing process of bulk components in the mixer

Alexander N. Ostrikov	¹	oan@vsuet.ru
Larisa N. Frolova	¹	fln 84@mail.ru
Alexey I. Aleksandrov	¹	alex-nadezhda@mail.ru
Virtor V. Posmetiev	²	victorvpo@mail.ru

¹ Voronezh State University of Engineering Technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, 394036, Russia

² Affordable Robotics LLC, Timiryazev St., 8, Voronezh, 394087, Russia

Abstract. The developed simulation model allows computer experiments on mixing components in which the parameters of the components of the mixture or mixer are changed, the nature of the influence of the parameter is established and recommendations for choosing the optimal values of the parameter are given. The model of the mixing process takes into account the size, shape and rheological properties of the components of the mixture, as well as the interaction of the bulk material with the working surfaces of the mixer (blades, blade struts, shafts, housing). The simulation mathematical model of the mixer has a high spatial resolution for the correct reproduction of the interaction of particles in the mixing process. In the framework of the finite element approximation, the bulk material is represented as a set of elements. The particle dynamics method was used to model the mechanical behavior of the mixture. Modeling is performed in three-dimensional Cartesian space. The state of each element is defined by six variables: the coordinates of its center and the velocity components. The solution of this system of differential equations of the second order are the functions that determine the trajectories of motion of the elements and allow to evaluate the efficiency of the mixing process. To solve differential equations of this kind, the second – order numerical method-Runge-Kutta is used. A computer program in the Object Pascal language in the Borland Delphi 7 integrated programming environment has been developed to implement the calculation according to the above formulas and to make it easier to conduct a series of computer experiments. The developed mathematical model of the process of mixing of bulk components allows to choose rational technological modes of mixing, which makes it possible to increase the homogeneity of mixing up to 98 %, and to calculate the kinematic mode of the mixing process in the mixer by creating a "quasi-weight" hydrodynamic mixing mode and a significant acceleration of the mixing process.

Keywords: mixing, bulk material, mathematical model, calculation, parameters.

Для цитирования

Остриков А.Н., Фролова Л.Н., Александров А.И., Посметьев В.В. Имитационная математическая модель процесса смешивания сыпучих компонентов в смесителе // Вестник ВГУИТ. 2019. Т. 81. № 2. С. 13–21. doi:10.20914/2310-1202-2019-2-13-21

For citation

Ostrikov A.N., Frolova L.N., Aleksandrov A.I., Posmetiev V.V. Simulation mathematical model of the mixing process of bulk components in the mixer. *Vestnik VGUET* [Proceedings of VSUET]. 2019. vol. 81. no. 2. pp. 13–21. (in Russian). doi:10.20914/2310-1202-2019-2-13-21

Введение

Для теоретического исследования двухвального смесителя разработана его имитационная модель, позволяющая проводить компьютерные эксперименты по смешиванию компонентов. На основе серий компьютерных экспериментов, в которых изменяется тот или иной параметр компонентов смеси или смесителя, устанавливается характер влияния параметра и даются рекомендации по выбору оптимальных значений параметра.

Для адекватного представления в модели процесса смешивания необходимо учитывать размеры, форму и реологические свойства компонентов смеси. Отдельную сложность представляет расчет взаимодействия сыпучего материала с рабочими поверхностями смесителя (лопатками, стойками лопаток, валами, корпусом). Поэтому математическая модель двухвального смесителя должна обладать высоким пространственным разрешением [1], чтобы корректно воспроизвести сыпучий материал и форму рабочих поверхностей, а также высоким временным разрешением, чтобы с высокой адекватностью воспроизвести взаимодействие частиц в процессе смешивания.

Цель работы – разработка математической модели процесса смешивания сыпучих компонентов в двухвальном смесителе, расчет и обоснование конструкции двухвального смесителя.

Результаты и обсуждения

В рамках конечно-элементного приближения сыпучий материал представляется как совокупность множества (порядка 10^3 – 10^5) элементов. Каждый элемент представляет собой либо крупную частицу смеси, либо некоторый объем смеси, ведущий себя как единое целое. В рамках конечно-элементного приближения рабочие поверхности смесителя представляются в виде совокупности множества элементарных треугольников. Элементы смеси механически взаимодействуют как между собой, так и с рабочими поверхностями смесителя (рисунок 1).

Для моделирования механического поведения смеси используется метод динамики частиц [2–5].

Будем считать, что компоненты смеси состоят из множества элементов шарообразной формы с диаметром порядка 10^{-4} – 10^{-3} м. При контакте элементов друг с другом и

с рабочими поверхностями смесителя возникают упругие силы, а также силы сухого и вязкого трения (рисунок 2). Под действием сил в модели рассчитывается движение элементов по законам классической динамики. В модели необходимо воспроизвести изменение состояния системы элементов (процесс перемешивания) и определить суммарное механическое воздействие элементов на вращающиеся элементы смесителя, позволяющее рассчитать потребляемую мощность.

Рисунок 1. Представление смесителя и компонентов в модели

Figure 1. Representation of mixer and components in the model

Рисунок 2. Силы, возникающие при контакте двух элементов смеси (а) и между элементом и поверхностью смесителя (б): F^Y – упругие силы; F^C и F^B – силы сухого и вязкого трения. Векторные величины обозначены жирным шрифтом

Figure 2. Forces arising from the contact of two elements of the mixture (a) and between the element and the surface of the mixer (b): CU – elastic forces; FS and FB – forces of dry and viscous friction. Vector values are indicated in bold

Моделирование производится в трехмерном декартовом пространстве (x , y , z). Состояние каждого элемента E_i задается шестью переменными: координатами его центра (X_i , y_i , z_i) и компонентами скорости (V_{xi} , v_{yi} , v_{zi}).

Уравнения движения элементов составлены на основе второго закона Ньютона:

$$\begin{cases}
 i=1 \dots N_3; \\
 m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_3} \left\{ c_{ij} \left(\frac{d_i + d_j}{2} - r_{ij} \right) \frac{(x_i - x_j)}{r_{ij}} + \left(k_{ij}^C \frac{v_{xi} - v_{xj}}{|\vec{v}_i - \vec{v}_j|} + k_{ij}^B (v_{xi} - v_{xj}) \right) c_{ij} \left(r_{ij} - \alpha_a \frac{d_i + d_j}{2} \right), r_{ij} < \alpha_a \frac{d_i + d_j}{2}; \right. \\
 \left. 0, r_{ij} \geq \alpha_a \frac{d_i + d_j}{2}; \right\} + \\
 + \sum_{j=1}^{N_{II}} \left\{ c_{i-IIj} \left(\frac{d_i}{2} - r_{i-IIj} \right) \frac{(x_i - x_{i-IIj})}{r_{i-IIj}} + \left(k_{ij}^C \frac{v_{xi} - v_{xIIj}}{|\vec{v}_i - \vec{v}_{IIj}|} + k_{ij}^B (v_{xi} - v_{xIIj}) \right) c_{ij} \left(r_{i-IIj} - \alpha_a \frac{d_i}{2} \right), r_{i-IIj} < \alpha_a \frac{d_i}{2}; \right. \\
 \left. 0, r_{i-IIj} \geq \alpha_a \frac{d_i}{2}; \right\}; \\
 m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_3} \left\{ c_{ij} \left(\frac{d_i + d_j}{2} - r_{ij} \right) \frac{(y_i - y_j)}{r_{ij}} + \left(k_{ij}^C \frac{v_{yi} - v_{yj}}{|\vec{v}_i - \vec{v}_j|} + k_{ij}^B (v_{yi} - v_{yj}) \right) c_{ij} \left(r_{ij} - \alpha_a \frac{d_i + d_j}{2} \right), r_{ij} < \alpha_a \frac{d_i + d_j}{2}; \right. \\
 \left. 0, r_{ij} \geq \alpha_a \frac{d_i + d_j}{2}; \right\} + \\
 + \sum_{j=1}^{N_{II}} \left\{ c_{i-IIj} \left(\frac{d_i}{2} - r_{i-IIj} \right) \frac{(y_i - y_{i-IIj})}{r_{i-IIj}} + \left(k_{ij}^C \frac{v_{yi} - v_{yIIj}}{|\vec{v}_i - \vec{v}_{IIj}|} + k_{ij}^B (v_{yi} - v_{yIIj}) \right) c_{ij} \left(r_{i-IIj} - \alpha_a \frac{d_i}{2} \right), r_{i-IIj} < \alpha_a \frac{d_i}{2}; \right. \\
 \left. 0, r_{i-IIj} \geq \alpha_a \frac{d_i}{2}; \right\}; \\
 m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_3} \left\{ c_{ij} \left(\frac{d_i + d_j}{2} - r_{ij} \right) \frac{(z_i - z_j)}{r_{ij}} + \left(k_{ij}^C \frac{v_{zi} - v_{zj}}{|\vec{v}_i - \vec{v}_j|} + k_{ij}^B (v_{zi} - v_{zj}) \right) c_{ij} \left(r_{ij} - \alpha_a \frac{d_i + d_j}{2} \right), r_{ij} < \alpha_a \frac{d_i + d_j}{2}; \right. \\
 \left. 0, r_{ij} \geq \alpha_a \frac{d_i + d_j}{2}; \right\} + \\
 + \sum_{j=1}^{N_{II}} \left\{ c_{i-IIj} \left(\frac{d_i}{2} - r_{i-IIj} \right) \frac{(z_i - z_{i-IIj})}{r_{i-IIj}} + \left(k_{ij}^C \frac{v_{zi} - v_{zIIj}}{|\vec{v}_i - \vec{v}_{IIj}|} + k_{ij}^B (v_{zi} - v_{zIIj}) \right) c_{ij} \left(r_{i-IIj} - \alpha_a \frac{d_i}{2} \right), r_{i-IIj} < \alpha_a \frac{d_i}{2}; \right. \\
 \left. 0, r_{i-IIj} \geq \alpha_a \frac{d_i}{2}; \right\} - m_i g,
 \end{cases}$$

где i – номер элемента; N_3 – количество элементов; m_i – масса элемента; t – время; j – номер элемента, возможно контактирующего с i -м элементом; c_{ij} – коэффициент жесткости взаимодействия элементов i и j (рассчитывается через модули упругости) k_{ij}^C и k_{ij}^B – коэффициенты сухого трения элементов i и j друг о друга; d_i – диаметр i -го элемента; r_{ij} – расстояние между центрами элементов i и j ; α_a – коэффициент ограничения взаимодействия между элементами (выбирается из диапазона $1,0 \dots 1,1$ и позволяет задавать "липкость" элементов); N_{II} – количество элементарных поверхностей смесителя; c_{i-IIj} , k_{i-IIj}^C и k_{i-IIj}^B – коэффициенты жесткости, сухого и вязкого трения при взаимодействии элемента i с поверхностью j ; r_{i-IIj} – расстояние от центра i -го элемента до j -й поверхности; X_{i-IIj} , y_{i-IIj} , z_{i-IIj} – декартовы координаты точки-проекции центра элемента i на поверхность j ; v_{xIIj} , v_{yIIj} , v_{zIIj} – компоненты скорости центра j -й элементарной поверхности; $|\dots|$ – модуль вектора; g – ускорение свободного падения.

Сила упругости выступает в качестве силы нормальной реакции между элементами, приводящей к отталкиванию элементов, если они вступают в контакт – если расстояние между элементами r_{ij} будет менее $(d_i + d_j)/2$. Расстояние r_{ij} между центрами элементов рассчитывается через координаты центров по теореме Пифагора:

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}.$$

Решением данной системы дифференциальных уравнений второго порядка являются функции $X_i(t)$, $y_i(t)$, $z_i(t)$, определяющие траектории движения элементов и позволяющие оценить эффективность процесса перемешивания.

Рабочие поверхности смесителя представлены в модели совокупностью более 100 элементарных треугольников. Часть элементарных треугольников неподвижна (корпус смесителя), часть – движется в пространстве (лопатки). Если элементарная треугольная поверхность Π_j контактирует с элементом i , то между ними возникают упругие силы отталкивания (или притяжения в случае липких элементов, что задается коэффициентом α_0) и силы сухого и вязкого трения. Силы, действующие на элемент, приводят к изменению его траектории движения, а противоположные им силы, действующие на лопатки, позволяют рассчитать суммарное сопротивление движению лопаток и затем, потребляемую смесителем мощность. Для расчета указанных сил необходим математический аппарат, позволяющий определить, контактирует ли элемент с треугольной элементарной поверхностью. Если контактирует, то контактирует ли с центральной частью поверхности (вариант I на рисунке 3), ребром (вариант II) или углом (вариант III).

Рисунок 3. Возможные варианты взаимодействия элемента смеси с элементарной треугольной поверхностью: I – с плоскостью; II – с ребром; III – с вершиной. Если центр элемента попадает в области 1, 3, 5, то элемент взаимодействует с ребром элементарной треугольной поверхности. Если попадает в области 2, 4, 6 – взаимодействует с вершиной элементарной треугольной поверхности

Figure 3. Possible variants of interaction of a component of a mixture with the basic triangular surface: I – plane; II – with an edge; III – with the top up. If the center of the element falls in areas 1, 3, 5, the element interacts with the edge of the elementary triangular surface. If it falls in areas 2, 4, 6 – interacts with the vertex of the elementary triangular surface

Далее необходимо определить расстояние $r_{i-\Pi_j}$ от элемента до плоскости, позволяющее рассчитать величину упругой силы отталкивания, и направление действия силы, задаваемое отрезком $E_i-E_{\text{инт}}$, где E_i и $E_{\text{инт}}$ – центр элемента и проекция центра элемента на плоскость

элементарной поверхности (в варианте II определяется проекция на ребро, в варианте III в качестве $E_{\text{инт}}$ используется вершина треугольника). Изложим подробно только наиболее сложный алгоритм проверки контакта элемента i с внутренней частью треугольником Π_j (вариант I).

Проверка осуществляется в два этапа: сначала определяется проекция центра элемента (X_i, y_i, z_i) на плоскость, содержащую треугольник, затем проверяется, попадает ли точка проекции внутрь или вне треугольника. На первом этапе составляется уравнение плоскости, проходящей через три точки – вершины T_{j1}, T_{j2}, T_{j3} треугольника по известной в аналитической геометрии формуле

$$\begin{vmatrix} x - x_{j1} & y - y_{j1} & z - z_{j1} \\ x_{j2} - x_{j1} & y_{j2} - y_{j1} & z_{j2} - z_{j1} \\ x_{j3} - x_{j1} & y_{j3} - y_{j1} & z_{j3} - z_{j1} \end{vmatrix} = 0,$$

где x, y, z – координаты произвольной точки, принадлежащей плоскости; x_{j1}, y_{j1}, z_{j1} – координаты вершины T_{j1} ; x_{j2}, y_{j2}, z_{j2} – вершины T_{j2} ; x_{j3}, y_{j3}, z_{j3} – вершины T_{j3} .

После вычисления определителя данное уравнение имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где A, B, C, D – коэффициенты уравнения плоскости.

Уравнение плоскости необходимо нормировать делением всех коэффициентов на длину нормального к плоскости вектора $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}z + \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0.$$

Будем далее обозначать нормированные коэффициенты индексом "н", тогда нормированное уравнение плоскости примет вид

$$A_n x + B_n y + C_n z + D_n = 0.$$

Тогда расстояние $r_{i-\Pi_j}$ от центра элемента (X_i, y_i, z_i) до плоскости можно рассчитать по следующей формуле аналитической геометрии

$$r_{i-\Pi_j} = |A_n x_i + B_n y_i + C_n z_i + D_n|.$$

Так как большинство элементов не контактируют с данной треугольной элементарной поверхностью в текущий момент времени, на

данном этапе расчета производится исключение всех неконтактирующих элементов смеси по условию $r_{i-Пj} > d_i/2$, что позволяет существенно ускорить вычисления на компьютере.

Для того чтобы определить, взаимодействует ли элемент с внутренней частью треугольной поверхности (по варианту 1), необходимо найти проекцию центра элемента на плоскость данного треугольника. Так как известны координаты нормального вектора A_n , B_n и C_n и расстояние $r_{i-Пj}$ от точки до плоскости, проекция $E_{инп}(x_{инп}, y_{инп}, z_{инп})$ находится смещением по нормальному вектору:

$$x_{инп} = x_i - A_n \cdot r_{i-Пj};$$

$$y_{инп} = y_i - B_n \cdot r_{i-Пj};$$

$$z_{инп} = z_i - C_n \cdot r_{i-Пj}.$$

Для проверки попадания точки $E_{инп}$ внутрь или вовне треугольника T_j используется метод проверки по площадям треугольника: сумма площадей трех треугольников, построенных на вершинах исходного треугольника и точке $E_{инп}$, должна равняться площади всего треугольника T_j , то есть

$$S(\Delta T_{j1} T_{j2} T_{j3}) = S(\Delta E_{инп} T_{j2} T_{j3}) + S(\Delta T_{j1} E_{инп} T_{j3}) + S(\Delta T_{j1} T_{j2} E_{инп}).$$

Если суммарная площадь треугольников $\Delta E_{инп} T_{j2} T_{j3}$, $\Delta T_{j1} E_{инп} T_{j3}$ и $\Delta T_{j1} T_{j2} E_{инп}$ оказывается больше площади элементарного треугольника $S(\Delta T_{j1} T_{j2} T_{j3})$, это означает, что точка $E_{инп}$ не лежит внутри треугольника T_j и элемент либо не контактирует с данной элементарной поверхностью, либо контактирует с ней по ребру или вершине элементарного треугольника.

Если обнаружено, что элемент контактирует с элементарной поверхностью, производится расчет сил упругости, сухого и вязкого трения, действующих между элементом смеси и поверхностью смесителя по формуле.

С течением времени элементарные треугольные поверхности, которыми представлены лопасти и ребра, представляющие стойки лопаток, совершают вращательное движение в пространстве (рисунок 4). При этом в модели непрерывно корректируются в приближении равномерного вращательного движения координаты точек-вершин соответствующих треугольников T_{ij} (где i – номер треугольника, j – номер вершины).

Метод численного интегрирования. Дифференциальные уравнения, описывающие движение элементов

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = k_1 \frac{dx}{dt} + k_2 x + k_3$$

или

$$ma = k_1 v + k_2 x + k_3,$$

где m – масса элемента; x – искомая функция (зависимость координата x , y или z от времени); t – время; k_1 , k_2 , k_3 – величины, не зависящие от x , но зависящие от других искомых функций системы дифференциальных уравнений; a – ускорение (соответствующая декартова компонента a_x , a_y или a_z); v – скорость (соответствующая декартова компонента V_x , v_y или v_z).

Для решения дифференциальных уравнений такого вида используется численный метод – Рунге-Кутты второго порядка (другое название метода – модифицированный метод Эйлера-Коши) [11]. Метод численного интегрирования реализуется следующими итерационными формулами

$$x^{\tau+1} = x^{\tau} + v^{\tau} \cdot \Delta t + \frac{k_1 v^{\tau} + k_2 x^{\tau} + k_3}{m} \cdot \frac{(\Delta t)^2}{2};$$

Рисунок 4. Представление рабочих поверхностей смесителя как совокупности элементарных треугольных поверхностей, ребер и угловых точек

Figure 4. Representation of the working surfaces of the mixer as a set of elementary triangular surfaces, edges and angular points

$$v^{\tau+1} = v^{\tau} + \frac{k_1 v^{\tau} + k_2 x^{\tau} + k_3}{m} \cdot \Delta t,$$

где индексы τ и $\tau+1$ обозначают текущий и последующий шаг интегрирования по времени; Δt – величина шага интегрирования. Данный метод имеет второй порядок точности по отношению к искомой функции $x(t)$.

Для основной системы дифференциальных уравнений, описывающей движение элементов смеси, необходимо задать начальные условия:

положение в пространстве и скорость элементов в начальный момент времени. В начальный момент времени заданное количество элементов размещается в геометрической области в форме параллелепипеда в верхней части смесителя, при этом координаты элементов выбираются случайным образом с помощью генератора случайных чисел, имеющих равномерный закон распределения. Начальные скорости элементов задаются равными нулю. С началом интегрирования уравнений движения элементы, изначально находящиеся в плотном контакте друг с другом, приобретают скорости под действием упругих сил и разлетаются в объеме смесителя. Благодаря силам сухого и вязкого трения происходит постепенное уменьшение энергии элементов, и спустя 2–3 с от начального момента времени они оседают в нижней части смесителя. После этого валы с лопатками начинают вращаться с заданной угловой скоростью, и начинается основной компьютерный эксперимент по смешиванию компонентов.

Система дифференциальных уравнений считается устойчивой, если ее решение практически не зависит от начальных условий. Для разработанной модели условие устойчивости выполняется для всей совокупности уравнений в отношении усредненных показателей, которые подлежат определению: коэффициент вариации, средняя потребляемая мощность и многие другие. Необходимо отметить, что устойчивость каждого отдельного дифференциального уравнения не является высокой, так как элементы в процессе интегрирования уравнений движения контактируют между собой случайным образом. Соответственно силы, действующие на элементы, то появляются, то исчезают, что вызывает разрывы в возмущающих функциях дифференциальных уравнений. Однако для большого количества дифференциальных уравнений второго порядка (а в модели для каждого из 10^3 – 10^5 элементов в модели решаются три уравнения – для координат x , y , z) результат пространственного и временного усреднения характеристик по многим элементам не зависит от начального положения и скорости элементов.

Такая особенность математического описания (неустойчивость каждого отдельного уравнения, но устойчивость системы уравнений в целом) является естественной для природных процессов и типична для моделей вещества в физике, химии, материаловедении. Аналогичная ситуация встречается в методе молекулярной динамики, с помощью которого моделируют движение атомов и молекул [15], в котором также, каждое отдельное уравнение малоустойчиво,

однако в целом система уравнений устойчива по средним характеристикам системы (давление, средняя плотность и т. п.).

В предлагаемой модели приняты следующие допущения:

- частицы смеси являются шарообразными;
- в пределах одного элемента вещество считается сплошной средой с постоянной по всему объему плотностью;
- элементы движутся по законам классической механики;
- механическое взаимодействие между элементами и поверхностями смесителя носит линейный упруго-вязкий характер;
- корпус и лопатки смесителя могут быть представлены совокупностью треугольников конечного размера.

Расчет показателей эффективности. Для количественной характеристики однородности смеси целесообразно использовать коэффициент вариации (неоднородности)

$$k_c = \frac{100}{\langle c \rangle} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (c_i - \langle c \rangle)^2}{n-1}}; \quad \langle c \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{n},$$

где $\langle c \rangle$ – среднее содержание ключевого компонента в пробах; c_i – содержание ключевого компонента в i -й пробе; n – количество проб. В процессе перемешивания двух равных по объему компонентов коэффициент k_c теоретически должен уменьшаться от 50% (компоненты разделены) до 0% (смесь полностью однородна).

Применительно к разработанной модели в основных компьютерных экспериментах k_c рассчитывался следующим образом. Так как в модели смесь состоит из конечного числа элементов, объем пробы для определения концентрации c_i должен быть достаточно большим и содержать не менее 100 элементов, чтобы достигнуть точности определения концентрации более 95%. Исходя из симметрии камеры смесителя, камера была разделена на четыре части одинакового объема – двумя вертикальными плоскостями вдоль и поперек камеры. В выбранной для модели системе координат уравнения данных плоскостей были $x = 0$; $y = 0$. При этом в каждую часть попадало примерно $N/4$ элементов, что составляло достаточно большую величину для определения c_i , а следовательно, и k_c с точностью, превышающей 99%. В этом случае количество проб n равнялось четырем, и средняя концентрация компонента $\langle c \rangle$ и коэффициент k_c рассчитывались по формулам:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{N_3} \left\{ \begin{array}{l} 0, \begin{cases} t_i \neq 1 \\ x_i < 0 \\ y_i < 0 \end{cases} \\ 1, \begin{cases} t_i = 1 \\ x_i > 0 \\ y_i > 0 \end{cases} \end{array} \right\} + \sum_{i=1}^{N_3} \left\{ \begin{array}{l} 0, \begin{cases} t_i \neq 1 \\ x_i < 0 \\ y_i > 0 \end{cases} \\ 1, \begin{cases} t_i = 1 \\ x_i > 0 \\ y_i < 0 \end{cases} \end{array} \right\} + \right. \\
\left. \sum_{i=1}^{N_3} \left\{ \begin{array}{l} 0, \begin{cases} x_i < 0; \\ y_i < 0; \end{cases} \\ 1, \begin{cases} x_i > 0; \\ y_i > 0; \end{cases} \end{array} \right\} + \sum_{i=1}^{N_3} \left\{ \begin{array}{l} 0, \begin{cases} x_i < 0; \\ y_i > 0; \end{cases} \\ 1, \begin{cases} x_i > 0; \\ y_i < 0; \end{cases} \end{array} \right\} + \right. \\
\left. \sum_{i=1}^{N_3} \left\{ \begin{array}{l} 0, \begin{cases} t_i \neq 1 \\ x_i > 0 \\ y_i < 0 \end{cases} \\ 1, \begin{cases} t_i = 1 \\ x_i < 0 \\ y_i > 0 \end{cases} \end{array} \right\} + \sum_{i=1}^{N_3} \left\{ \begin{array}{l} 0, \begin{cases} t_i \neq 1 \\ x_i > 0 \\ y_i > 0 \end{cases} \\ 1, \begin{cases} t_i = 1 \\ x_i < 0 \\ y_i < 0 \end{cases} \end{array} \right\} + \right. \\
\left. \sum_{i=1}^{N_3} \left\{ \begin{array}{l} 0, \begin{cases} x_i > 0; \\ y_i < 0; \end{cases} \\ 1, \begin{cases} x_i < 0; \\ y_i > 0; \end{cases} \end{array} \right\} + \sum_{i=1}^{N_3} \left\{ \begin{array}{l} 0, \begin{cases} x_i > 0; \\ y_i > 0; \end{cases} \\ 1, \begin{cases} x_i < 0; \\ y_i < 0; \end{cases} \end{array} \right\} \right)
\end{aligned}$$

$$k_c = \frac{100}{\langle c \rangle \sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{i=1}^{N_3} \left\{ \begin{array}{l} 0, \begin{cases} t_i \neq 1 \\ x_i < 0 \\ y_i < 0 \end{cases} \\ 1, \begin{cases} t_i = 1 \\ x_i > 0 \\ y_i > 0 \end{cases} \end{array} \right\} - \langle c \rangle \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{N_3} \left\{ \begin{array}{l} 0, \begin{cases} t_i \neq 1 \\ x_i < 0 \\ y_i > 0 \end{cases} \\ 1, \begin{cases} t_i = 1 \\ x_i > 0 \\ y_i < 0 \end{cases} \end{array} \right\} - \langle c \rangle \right)^2 + \\
& \left(\sum_{i=1}^{N_3} \left\{ \begin{array}{l} 0, \begin{cases} x_i < 0; \\ y_i < 0; \end{cases} \\ 1, \begin{cases} x_i > 0; \\ y_i > 0; \end{cases} \end{array} \right\} - \langle c \rangle \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{N_3} \left\{ \begin{array}{l} 0, \begin{cases} x_i < 0; \\ y_i > 0; \end{cases} \\ 1, \begin{cases} x_i > 0; \\ y_i < 0; \end{cases} \end{array} \right\} - \langle c \rangle \right)^2 + \\
& \left(\sum_{i=1}^{N_3} \left\{ \begin{array}{l} 0, \begin{cases} t_i \neq 1 \\ x_i > 0 \\ y_i < 0 \end{cases} \\ 1, \begin{cases} t_i = 1 \\ x_i < 0 \\ y_i > 0 \end{cases} \end{array} \right\} - \langle c \rangle \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{N_3} \left\{ \begin{array}{l} 0, \begin{cases} t_i \neq 1 \\ x_i > 0 \\ y_i > 0 \end{cases} \\ 1, \begin{cases} t_i = 1 \\ x_i < 0 \\ y_i < 0 \end{cases} \end{array} \right\} - \langle c \rangle \right)^2
\end{aligned}$$

где t_i – тип i -го элемента; фигурная скобка $\{ \dots \}$ означает одновременное выполнение условий; квадратная скобка $[\dots]$ – выполнение любого из условий.

Средняя в течение компьютерного эксперимента мощность N_{cp} , потребляемая смесителем, рассчитывается по формуле:

$$N_{cp} = \frac{\sum_{\tau=1}^{[t_{KЭ}/\Delta t]} \sum_{i=1}^{N_3} \sum_{j=1}^{N_{II}} \vec{v}_i \cdot \vec{F}_{ij}}{[t_{KЭ}/\Delta t]} + 4N_{CT} + 4\alpha_{BT}\omega_e,$$

где $t_{KЭ}$ – длительность компьютерного эксперимента; Δt – шаг интегрирования; $[\dots]$ – операция округления до целого числа; N_3 и N_{II} – количество элементов и элементарных поверхностей треугольной формы; $\vec{v}_i$ – скорость i -го элемента на текущем шаге интегрирования τ ; $\vec{F}_{ij}$ – сила взаимодействия i -го элемента с j -м элементарным треугольником рабочей поверхности; знаком « $\cdot$ » обозначается скалярное произведение векторов; N_{CT} – мощность, расходуемая в подшипнике вала на сухое трение; α_{BT} – коэффициент вязкого трения в подшипнике вала; ω_e – угловая скорость вала.

Продолжительность смешивания t_c определяется как время, за которое коэффициент k_c

достигает заданного уровня, при котором смесь считается готовой (принят равным 1%):

$$t_c = t|_{k_c=1\%}.$$

Программная реализация модели. Для реализации расчета по представленным выше формулам и удобства проведения серий компьютерных экспериментов разработана компьютерная программа «Программа для моделирования двухвального смесителя» на языке Object Pascal в интегрированной среде программирования Borland Delphi 7 (рисунок 5).

Программа предназначена для многократного проведения компьютерных экспериментов по смешиванию компонентов и определения на этой основе оптимальных конструктивных параметров двухвального смесителя для компонентов различных типов.

Основные функциональные возможности программы:

– задание основных реологических параметров компонентов смеси;

— задание формы корпуса смесителя, лопаток и пространственного размещения лопаток на валах;

— вывод на экран в процессе компьютерного эксперимента трех проекций смесителя и элементов смеси, а также графиков временных зависимостей коэффициента вариации (неоднородности) и потребляемой мощности.

Основные технические характеристики программы:

- количество элементов смеси от 1000 до 100000;
- размер элементов смеси от 0,1 до 10 мм;
- длительность компьютерного эксперимента по смешиванию от 3 до 60 мин (зависит от количества элементов, данные приведены для тактовой частоты процессора 3 ГГц).

Рисунок 5. Вывод результатов моделирования в «Программе для моделирования двухвального смесителя»: *a* – начало смешивания; *b* – завершение смешивания

Figure 5. The conclusion of the simulation results in the "program for modeling a two-shaft mixer": *a* – beginning of mixing; *b* – end of mixing

Закключение

Применение разработанной математической модели процесса смешивания сыпучих компонентов позволит подобрать рациональные технологические режимы смешивания, что дает

возможность увеличить однородность смешивания до 98%, и рассчитать кинематический режим процесса смешивания в двухвальном смесителе за счет создания «квазиневесомого» гидродинамического режима смешивания и существенного ускорения процесса смешивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем: учебное пособие. М.: Высшая школа, 1998. 319 с.
2. Кривцов А.М. Деформирование и разрушение тел с микроструктурой. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 304 с.
3. Hoover W.G. Atomistic Nonequilibrium Computer Simulations // Physica A. 1983. V. 118. P. 111–122.
4. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике. Часть. 2. М.: Мир, 1990. 400 с.
5. Хеерман Д.В. Методы компьютерного эксперимента в теоретической физике. М.: Наука, 1990. 176 с.
6. Hafner J. Atomic-Scale Computation Materials Science // Acta Mater. 2000. V. 48. P. 71–92.
7. Лагарьков А.Н., Сергеев В.М. Метод молекулярной динамики в статистической физике // УФН. 1978. Т. 125. № 7. С. 409–448. doi: 10.3367/UFNr.0125.197807b.0409
8. Allen M.P., Tildesley D.J. Computer Simulation of Liquids. Oxford: Clarendon Press, 1987. 408 p.

9. Полухин В.А., Ухов В.Ф., Дзугутов М.М. Компьютерное моделирование динамики и структуры жидких металлов. М.: Наука, 1981. 323 с.
10. Monaghan J. Smoothed Particle Hydrodynamics // Annu. Rev. Astron. Astrophys. 1992. V. 30. P. 543–574.
11. Инженерные расчеты на ЭВМ: Справочное пособие; под ред. В.А. Троицкого. Л.: Машиностроение, 1979. 288 с.
12. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М.: Наука, 1976. 279 с.
13. Мельников С.В., Алешкин В.Р., Рощин П.М. Планирование эксперимента в исследованиях сельскохозяйственных процессов: 2-е изд., перераб. и доп. Л.: Колос, 1980. 168 с.
14. Дегтярев Ю.И. Методы оптимизации: учеб. пособие для вузов. М.: Сов. радио, 1980. 272 с.

REFERENCES

1. Sovetov B.Ya., Yakovlev S.A. Modelirovaniye sistem [Modeling systems]. Moscow, Vysshaya shkola, 1998. 319 p. (in Russian).
2. Krivtsov A.M. Deformirovaniye i razrusheniye tel s mikrostrukturnoy [Deformation and fracture of bodies with a microstructure]. Moscow, FIZMATLIT, 2007. 304 p. (in Russian).
3. Hoover W.G. Atomistic Nonequilibrium Computer Simulations. *Physica A*. 1983. vol. 118. pp. 111–122.
4. Guld H., Tobochnik Ya. Komp'yuternoye modelirovaniye v fizike [Computer modeling in physics]. Part 2. Moscow, Mir, 1990. 400 p. (in Russian).
5. Heerman D.V. Metody komp'yuternogo eksperimenta v teoreticheskoy fizike [Methods of computer experiment in theoretical physics]. Moscow, Nauka, 1990. 176 p. (in Russian).
6. Hafner J. Atomic-Scale Science Computation Materials. *Acta Mater.* 2000. vol. 48. pp. 71–92.
7. Lagarkov A.N., Sergeev V.M. The method of molecular dynamics in statistical physics. *UFN* [Sov. Phys. Usp.]. 1978. vol. 125. no. 7. pp. 409–448. doi: 10.3367/UFNr.0125.197807b.0409 (in Russian).
8. Allen M.P., Tildesley D.J. Computer Simulation of Liquids. Oxford, Clarendon Press, 1987. 408 p.
9. Polukhin V.A., Ukhov V.F., Dzugutov M.M. Komp'yuternoye modelirovaniye dinamiki i struktury zhidkikh metallov [Computer simulation of the dynamics and structure of liquid metals]. Moscow, Nauka, 1981. 323 p. (in Russian).
10. Monaghan J. Smoothed Particle Hydrodynamics. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 1992. vol. 30. pp. 543–574.
11. Inzhenernyye raschety na EVM [Computer engineering calculations]. Leningrad, Mashinostroyeniye, 1979. 288 p. (in Russian).
12. Adler Yu.P., Markova E.V., Granovsky Yu.V. Planirovaniye eksperimenta pri poiske optimal'nykh usloviy [Planning of experiment when searching optimal conditions]. Moscow, Nauka, 1976. 279 p. (in Russian).
13. Melnikov S.V., Aleshkin V.R., Roshchin P.M. Planirovaniye eksperimenta v issledovaniyakh sel'skokhozyaystvennykh protsessov [The design of the experiment in the study of agricultural processes]. Leningrad, Kolos, 1980. 168 p. (in Russian).
14. Degtyarev Yu.I. Metody optimizatsii [Methods of optimization]. Moscow, Sov. radio, 1980. 272 p. (in Russian).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Александр Н. Остриков д.т.н., профессор, кафедра технологии жиров, процессов и аппаратов химических и пищевых производств, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия, oan@vsuet.ru

Лариса Н. Фролова д.т.н., профессор, кафедра технологии жиров, процессов и аппаратов химических и пищевых производств, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия, fln 84@mail.ru

Алексей И. Александров экстерн, кафедра технологии жиров, процессов и аппаратов химических и пищевых производств, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия, alex-nadezhda@mail.ru

Виктор В. Посметьев к.ф.-м.н., директор ООО «Доступная робототехника», ул.Тимирязева, д.8, г.Воронеж, 394087, Россия, victorvp@mail.ru

КРИТЕРИЙ АВТОРСТВА

Все авторы в равной степени принимали участие в написании рукописи и несут ответственность за плагиат

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ПОСТУПИЛА 18.04.2019

ПРИНЯТА В ПЕЧАТЬ 25.05.2019

INFORMATION ABOUT AUTHORS

Alexander N. Ostrikov Dr. Sci. (Engin.), professor, technology of fats, processes and apparatuses of chemical and food production department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, 394036, Russia, oan@vsuet.ru

Larisa N. Frolova Dr. Sci. (Engin.), professor, technology of fats, processes and devices of chemical and foods productions department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, 394036, Russia, fln 84@mail.ru

Alexey I. Aleksandrov extern, technology of fats, processes and devices of chemical and food production department, Voronezh state university of engineering technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, 394036, Russia, alex-nadezhda@mail.ru

Victor V. Posmetiev Cand. Sci. (Phys.-Math.), Director of Affordable Robotics LLC, Timiryazev St., 8, Voronezh, 394087, Russia, victorvp@mail.ru

CONTRIBUTION

All authors equally participated in the writing of the manuscript and are responsible for plagiarism

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare no conflict of interest.

RECEIVED 4.18.2019

ACCEPTED 5.25.2019