

Поиск всех решений задачи динамического программирования в случае совпадения их многокритериальных оценок

Юрий В. Бугаев	¹	y_bugaev52@mail.ru	 0000-0002-1043-7682
Людмила А. Коробова	¹	lyudmila_korobova@mail.ru	 0000-0003-1349-732X
Ирина Ю. Шурупова	²	i_shur@mail.ru	 0000-0002-0992-2998

1 Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия

2 Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия» им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, ул. Старых Большевиков, 54 «А», г. Воронеж, 394064, Россия

Аннотация. Среди математических методов, используемых в экономике, видное место занимает метод динамического программирования, с помощью которого организуется оптимальное управление многостадийными процессами. Недостатком этого метода является невозможность вычисления всех решений задачи при совпадении их критериальных оценок. Факт существования нескольких оптимальных траекторий многошагового процесса может означать, что задача поставлена не вполне корректно, в том смысле, что назначенные критерии не полно характеризуют исследуемую систему. Это означает, что традиционный метод динамического программирования необходимо доработать на случай существования нескольких оптимальных траекторий с одинаковым значением критерия. В данной статье предлагается наиболее общий вариант такой доработки, а именно, обобщению подвергается многокритериальная численная схема. Для более наглядного представления выкладок и результата исследования дискретную задачу динамического программирования будем описывать в терминах теории графов. В этом случае она сведется к задаче поиска оптимального пути на ориентированном графе. Для ее решения предлагается трехэтапный алгоритм, в состав которого включены следующие шаги. Первый этап – построение оптимальных критериальных оценок для путей из начальной вершины во все остальные. Для выполнения этого этапа наиболее универсальным методом является многокритериальный вариант метода Форда–Беллмана. Второй этап – построение графа оптимальных путей. В исходном графе отбираются дуги, составляющие часть оптимальных путей. Из них затем с помощью оригинального алгоритма формируется подграф, в котором все пути оптимальны. Аналитически доказывается, что данный алгоритм дает верный результат (корректен). Третий этап – перебор всех путей в построенном подграфе. Проведенные численные эксперименты показали, что предложенный трехэтапный метод эффективно работает на ориентированных графах любого типа в достаточно большом диапазоне размерности. Предложенный алгоритм с минимальными изменениями может быть использован для решения произвольной дискретной задачи динамического программирования.

Ключевые слова: математические методы, экономика, динамическое программирование, многостадийные процессы, корректность алгоритма

Search for all solutions to the dynamic programming problem if their multicriteria estimates coincide

Yuri V. Bugaev	¹	y_bugaev52@mail.ru	 0000-0002-1043-7682
Lyudmila A. Korobova	¹	lyudmila_korobova@mail.ru	 0000-0003-1349-732X
Irina Yu. Shurupova	²	i_shur@mail.ru	 0000-0002-0992-2998

1 Voronezh State University of Engineering Technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, 394036, Russia

2 Military Training and Scientific Center of the Air Force "Air Force Academy" named after prof. N.E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarina, st. Old Bolsheviks, 54 "A", Voronezh, 394064, Russia

Abstract. Among the mathematical methods used in economics, a prominent place is occupied by the dynamic programming method, with the help of which the optimal control of multi-stage processes is organized. The disadvantage of this method is the impossibility of calculating all solutions to the problem if their criteria-based estimates coincide. The fact of the existence of several optimal trajectories of a multi-step process may mean that the task is not set correctly, in the sense that the assigned criteria do not fully characterize the system under study. This means that the traditional method of dynamic programming needs to be refined in case of the existence of several optimal trajectories with the same value of the criterion. This article proposes the most general version of such refinement, namely, a multi-criteria numerical scheme is generalized. For a more visual representation of calculations and the result of the study, we will describe the discrete dynamic programming problem in terms of graph theory. In this case, it reduces to the problem of finding the optimal path on a directed graph. To solve it, a three-stage algorithm is proposed, the composition of which includes the following steps. The first stage is the construction of optimal criteria estimates for paths from the initial vertex to all the others. To perform this stage, the most universal method is the multicriteria version of the Ford – Bellman method. The second stage is the construction of a graph of optimal paths. In the original graph, arcs are selected that are part of the optimal paths. Of these, using the original algorithm, a subgraph is formed in which all paths are optimal. It is analytically proved that this algorithm gives the correct result (correct). The third stage is enumeration of all paths in the constructed subgraph. Numerical experiments showed that the proposed three-stage method works efficiently on oriented graphs of any type in a sufficiently large range of dimensions. The proposed algorithm with minimal changes can be used to solve an arbitrary discrete dynamic programming problem.

Keywords: mathematical methods, economics, dynamic programming, multi-stage processes, algorithm correctness

Для цитирования

Бугаев Ю.В., Коробова Л.А., Шурупова И.Ю. Поиск всех решений задачи динамического программирования в случае совпадения их многокритериальных оценок // Вестник ВГУИТ. 2020. Т. 82. № 1. С. 398–403. doi:10.20914/2310-1202-2020-1-398-403

For citation

Bugaev Yu.V., Korobova L.A., Shurupova I.Yu. Search for all solutions to the dynamic programming problem if their multicriteria estimates coincide. *Vestnik VGUIT* [Proceedings of VSUET]. 2020. vol. 82. no. 1. pp. 398–403. (in Russian). doi:10.20914/2310-1202-2020-1-398-403

This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

Введение

Высокая эффективность математических методов в естественных, технических и экономических науках постоянно получает практические подтверждения [1–10]. В частности, в экономической отрасли хорошо зарекомендовал себя метод динамического программирования (ДП) [1–3, 5–7]. С помощью этого метода удастся организовать эффективное управление многошаговыми процессами в сферах распределения инвестиций, управления ресурсами, сетевого планирования и др.

Широкое распространение схемы ДП определяет актуальность задач ее совершенствования. Одним из недостатков этой схемы является невозможность вычисления всех решений задачи при совпадении их критериальных оценок.

Поясним сказанное на примере. При рассмотрении экономических задач на практике довольно часто используется алгоритм классической задачи о рюкзаке. Причем используется задача именно о так называемом «целочисленном рюкзаке».

Пример 1. Заданы n вещей, их размеры w_i , стоимости s_i , и некоторое число H – вместимость рюкзака (все числа – натуральные). Требуется найти количество штук z_i каждой вещи, чтобы выполнялось условие $\sum_{i=1}^n z_i w_i \leq H$ и при этом суммарная ценность

вещей $f = \sum_{i=1}^n z_i s_i$ была максимальной.

Применим для решения представленной выше задачи метод ДП. Найдем решения при следующих данных: количество вещей $n = 4$; габариты (или размеры) $w = (2; 3; 5; 7)$; стоимость каждой вещи $s = (3; 5; 8; 11)$ и вместимость рюкзака $H = 10$. При таких исходных данных получим ответ: $z = (2; 2; 0; 0)$, $f^{max} = 16$.

Однако несложно убедиться, что укладка $z = (1; 1; 1; 0)$ тоже является оптимальным решением. Очевидно, алгоритм ДП выбрал первый вариант из-за того, что при поиске максимального элемента в некотором наборе ответом всегда является первый из одинаковых максимальных элементов.

Согласно классическому определению, точка x^* называется точкой максимума функции $\varphi(x)$ на множестве X , если $\varphi(x^*) \geq \varphi(x)$ для всех $x \in X$. Т.е. в определении записано нестрогое неравенство. Отсюда, если X – конечное множество, на котором целевая функция имеет несколько точек максимума, то из сформулированного определения следует, что при буквальном следовании ему в выбор должны попасть все эти точки. Тогда в примере 1 необходимо предусмотреть следующие ситуации при решении. Если при решении учитывать порядок следования вещей при укладке вещей в рюкзак, то мы получим 15 вариантов оптимального управления процессом укладки вещей с одинаковым значением целевой функции. Если не определять порядок укладки вещей

в рюкзаке – четыре решения $(2, 2, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 2, 0)$.

Число подобных дублирующих вариантов в прикладных задачах большой размерности также может быть очень большим, а так как их критериальные оценки одинаковы, то в традиционной схеме ДП не принято тратить вычислительные ресурсы и находить их все – достаточно выбрать какое-то одно решение. Тем не менее, существует немало практически важных задач, решаемых методом ДП, в которых надо найти не просто одно первое попавшееся оптимальное решение, но найти все такие решения. В частности, это касается известной задачи поиска критического пути в сетевом графе при реализации метода PERT управления проектами. В процессе решения этой задачи для вычисления резервов времени выполнения работ, запланированных в проекте, необходимо определить вершины, лежащие на критическом пути. Если же таких путей несколько, то возникает неоднозначность в оценках, особенно в том варианте метода, при котором критический путь может меняться на итерациях решения более общей задачи [10].

В общем случае само существование нескольких оптимальных траекторий многошагового процесса с большой вероятностью может означать, что задача поставлена не вполне корректно, в том смысле, что назначенные критерии не полно характеризуют исследуемую систему. Тогда для выбора оптимального варианта придется прибегать к каким-нибудь вспомогательным процедурам, возможно, с подключением новых критериев. А раз так, то вполне возможно, что именно среди траекторий, не найденных на первом этапе, и находится оптимальное решение.

Это означает, что необходимо доработать традиционную схему ДП на случай существования нескольких оптимальных траекторий с одинаковым значением критерия. В данной статье предлагается наиболее общий вариант такой доработки, а именно, обобщению подвергается многокритериальная схема ДП.

Методы

Решение дискретной задачи оптимизации многошагового процесса методом ДП удобно описывать в терминах теории графов. В этом случае получаем задачу поиска оптимального пути на ориентированном графе.

Существуют две схемы нахождения оптимальных решений данной задачи. Первая связана с запоминанием условно-оптимальных решений при первом проходе алгоритма. Вторая схема основана на восстановлении траекторий. При первом проходе запоминаются только критериальные оценки условно-оптимальных траекторий. При втором проходе оптимальное решение определяется на основе ключевого равенства, которое в терминах задачи поиска оптимального пути на графе имеет вид:

$$D(v) = D(u) + \rho(u, v), \quad (1)$$

где v – очередная анализируемая вершина, u – вершина, предшествующая v , $\rho(u, v)$ – длина дуги (u, v) , $D(x)$ – найденная при прямом ходе протяженность (критериальная оценка) оптимального пути из начальной вершины в вершину x . Для текущей вершины v выбирают смежную с ней вершину u , удовлетворяющую равенству (1). Её считают следующей вершиной оптимального пути, полагают $v = u$ и процесс восстановления продолжается до достижения начальной вершины.

Воспользуемся второй схемой для разработки алгоритма восстановления всех оптимальных решений многокритериальной задачи поиска оптимальных путей на графе. Его наиболее подходящий для данного случая прототип опубликован авторами в [11].

Пусть задан граф G , каждая дуга (u, v) которого снабжена векторным весом $A[u, v]$, вес произвольного пути равен сумме весов составляющих дуг, и на множестве весов дуг и путей задано некоторое бинарное отношение предпочтения R . Требуется определить все пути, веса которых не доминируются в смысле отношения R , в том числе надо найти и пути с совпадающими критериальными оценками. Сокращённо искомые пути назовём R -оптимальными.

Введем следующие обозначения:

- V – множество вершин графа;
- s, f – начальная и конечная вершины искомого пути;
- $p(u, v)$ – часть пути p , соединяющая лежащие на нём вершины u и v ;
- $F(p)$ – многокритериальная оценка длины пути p (целевая вектор-функция);
- $\{D[v]\}$ – множество оптимальных векторных весов путей из начальной вершины (источника) s в вершину v , полученное в результате работы алгоритма;
- $PP[v]$ – список вершин графа, предшествующих вершине v ;
- $C^R(X)$ – множество значений функции выбора на X , определяемой механизмом блокировки по заданному бинарному отношению R ;
- $a \Leftarrow L$ – операция исключения элемента a из списка L .

Сделаем следующие предположения.

1. В графе G каждая пара вершин может соединяться не более чем одной дугой.

2. Векторный вес любого контура, имеющегося в графе, доминируется в смысле отношения R нулевым вектором.

3. Отношение R транзитивно, асимметрично и инвариантно относительно добавления произвольного элемента. Последнее свойство означает, что для любых трёх элементов $x, y, b \in E^m$ следующие отношения эквивалентны:

$$xRy \text{ и } (x + b)R(y + b).$$

Обсуждение

Решение задачи разбивается на три этапа. Опишем их на неформальной версии языка PASCAL.

1 этап. Построение оптимальных критериальных оценок для путей из начальной вершины s во все остальные.

Предлагается следующий алгоритм 1, представляющий собой многокритериальный вариант известного метода Форда – Беллмана.

```

for v in V \ {s} do {D[v]} := {A[s, v]};
{D[s]} := ∅;
for k := 1 to n - 2 do
  for v in V \ {s} do
    for u in PP[v] do
      for q in {D[u]} do
        {D[v]} := CR(({D[v]} ∪ {q + A[u, v]}));

```

Корректность данного алгоритма доказывает следующая теорема, являющаяся частным случаем более общей теоремы из [11].

Теорема 1. Если граф G и бинарное отношение R удовлетворяют предположениям 1 – 3, то множество оценок, полученных алгоритмом 1, совпадает с множеством оценок R -оптимальных путей графа.

2 этап. Построение графа R -оптимальных путей.

Отбираются дуги, составляющие часть R -оптимальных путей. Из них затем формируется подграф G_1 , в котором все пути R -оптимальны. Данный блок алгоритма (алгоритм 2) выглядит так

```

for v in V
  begin PP_Eq[v] := PP[v];
  for u in PP[v] do
    begin M := true;
    for z in {D[v]} do
      for y in {D[u]} do
        if z = y + A[u, v] then
          begin M := false; break; end;
        if not(M) then break;
      if M then u ← PP_Eq[v];
    end;
  end;

```

< Формирование графа по спискам предшествования $PP_Eq[v]$ >

В традиционной схеме с восстановлением путей этапы поиска подходящих дуг и построение оптимальных путей совмещены в одном блоке.

Однако при наличии равновеликих путей приходится сохранять варианты в соответствующих структурах данных, (подграф G_1) а затем на третьем этапе выявлять все возможные решения. Как видно из описания алгоритма, отбор дуг, составляющих решение задачи, основан на выполнении следующего условия.

$$\exists z \in \{D[v]\} \exists y \in \{D[u]\}: z = y + A[u, v]. \quad (2)$$

При его выполнении вершина u остаётся в списке предшествования $PP_Eq[v]$.

Результат работы алгоритма 2 приведён на рисунке 1. Дуги исходного графа снабжены двумя критериями, указанными в скобках. Задача

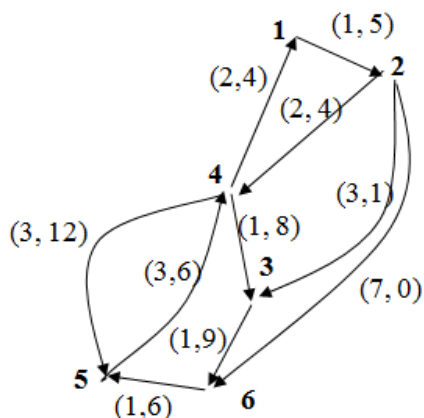


Рисунок 1. Исходный граф

Figure 1. Graph

Теорема 2. Пусть подграф G_1 графа G задан списками предшествования $PP_Eq[v]$, $v \in V$, которые построены по алгоритму 2 (рисунок 2). Тогда множества всех R -оптимальных путей на графе G и путей на подграфе G_1 из начальной вершины s в конечную f совпадают.

В [11] доказана теорема, которая утверждает, что при сформулированных допущениях 1 – 3 каждая часть R -оптимального пути графа также R -оптимальна. Обозначим это свойство сокращённо «свойство [11]». Им мы воспользуемся при доказательстве теоремы 2.

Доказательство. Пусть $p \in G$ – произвольный R -оптимальный путь из s в f . Покажем, что $p \in G_1$. Рассмотрим вторую от начала пути p вершину v . Для нее справедливо равенство (2) при $u = s$, поскольку $D[s] = 0$, и вершины s и v соединяет единственная дуга. Следовательно, $s \in PP_Eq[v]$, а значит, $(s, v) \in G_1$.

Далее, по предположению индукции, допустим, что для произвольной вершины $u \in G$ вся часть $p(s, u)$ пути p от s до u принадлежит G_1 , и пусть v – следующая вершина пути p . Покажем, что $(u, v) \in G_1$.

состоит в поиске всех Парето-оптимальных путей из вершины $s = 1$ в вершину $f = 5$. Всего из вершины $s = 1$ в вершину $f = 5$ ведут три Парето-оптимальных пути, два из которых имеют совпадающие критериальные оценки.

Отметим очевидный факт, что алгоритм не создаёт в графе новых вершин и рёбер, а только исключает рёбра, не удовлетворяющие равенству (2). Поэтому, любая вершина, дуга или путь, имеющиеся в графе G_1 , также присутствуют в G . Открытым остаётся лишь вопрос о соответствии произвольных путей в графе G_1 R -оптимальным путям в G . Ответ даёт следующая теорема.

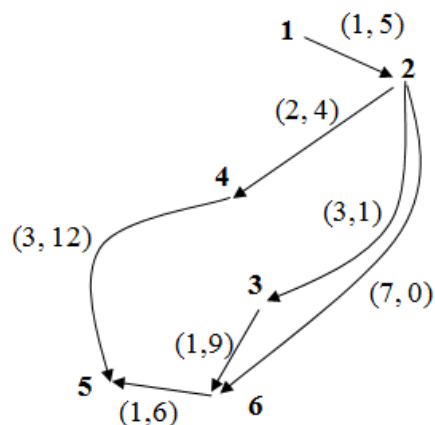


Рисунок 2. Граф со списками предшествования $PP_Eq[v]$

Figure 2. Graph $PP_Eq[v]$

Очевидно, $F(p(s, u)) + A[u, v] = F(p(s, v))$.

Но согласно свойству [11], части $p(s, u)$ и $p(s, v)$ пути p R -оптимальны, и, следовательно, $F(p(s, u)) \in \{D[u]\}$ и $F(p(s, v)) \in \{D[v]\}$. Значит, при $y = F(p(s, u))$ и $z = F(p(s, v))$ выполняется равенство (2) и при работе алгоритма 2, дуга (u, v) не будет исключена и $(u, v) \in G_1$.

Отсюда, по индукции следует, что весь путь p принадлежит G_1 .

Обратно. Пусть на подграфе G_1 q – произвольный путь из s в f . Покажем, что на графе G он является R -оптимальным.

Рассмотрим его первое ребро (s, t) . Т.к. по условию это единственное ребро, соединяющее s и t , то оно является R -оптимальным путём из s в t на графе G . Иными словами, для первого ребра пути q требуемое утверждение верно.

Предположим, что для произвольной вершины $u \in q$ вся часть $q(s, u)$ пути q от s до u является R -оптимальным путем из s в u на графе G , и пусть v – следующая вершина пути q . Покажем, что составной путь $q(s, u) \& (u, v) \in q$ является R -оптимальным на G .

Согласно алгоритму 2, дуга (u, v) остаётся в графе G_1 в том, и только в том случае, если одновременно выполнены три условия:

$F(q(s, u)) \in \{D[u]\}$, $F(q(s, v)) \in \{D[v]\}$ и $F(q(s, v)) = F(q(s, u)) + A[u, v]$.

По предположению индукции, $F(q(s, u)) \in \{D[u]\}$, а по построению $q F(q(s, v)) = F(q(s, u)) + A[u, v]$. Кроме того, известно, что $(u, v) \in G_1$. Отсюда получим $F(q(s, v)) \in \{D[v]\}$.

Поскольку $\{D[v]\}$ – множество недоминируемых альтернатив, то в G не может существовать пути из s в v , который доминировал бы над путём $q(s, v)$. Следовательно, $q(s, v)$ – R -оптимальный путь из s в v .

Отсюда, по индукции получаем, что q – R -оптимальный путь на графе G из s в f .

3 этап. Перебор всех путей в построенном графе.

Наиболее простой метод решения этой задачи – алгоритм поиска с возвратом (*back-tracking*) [11]. Часто он реализуется в рекурсивной форме. Для задач большой размерности метод не применяется, т. к. он перебирает все возможные решения. Но в данном случае нас интересуют именно все решения, поэтому применение данного метода оправдано. Ниже приведена рекурсивная схема поиска с возвратом всех путей в графе, представленным списками предшествования $PPP_Eq[v]$.

Procedure *back_tracking*(k);

begin for $y \in PPP_Eq[x[k-1]]$ **do**

if $y = s$ **then**

write $(s, x[k-1], \dots, x[1]);$

else

begin $x[k] := y;$

back_tracking ($k + 1$);

end;

end;

{Головная процедура поиска с возвратом}

begin $x[1] := f;$

back_tracking(2);

end.

Заключение

Разработан трехэтапный алгоритм поиска в произвольном ориентированном графе всех путей, оптимальных в смысле асимметричного транзитивного критериального отношения предпочтения, в том числе путей, имеющих совпадающие критериальные оценки. Теоретически доказана корректность алгоритма. Проведенные численные эксперименты показали, что предложенный метод эффективно работает на ориентированных графах любого типа в достаточно большом диапазоне размерности. Предложенный алгоритм с минимальными изменениями может быть использован для решения произвольной дискретной задачи динамического программирования.

Литература

- 1 Тарасенко А.В., Егорова И.Л. Принцип оптимальности Беллмана в задаче оптимального распределения средств между предприятиями на расширение производства // Вестник университета. 2019. № 10. С. 132–138.
- 2 Параев Ю.И., Грекова Т.И., Полуэктова К.О. Оптимальное управление односекторной экономикой при случайном изменении фондовооруженности труда // Вестник томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2018. № 42. С. 23–29.
- 3 Скворцов Ю.С., Рындин Н.А., Амоа А.Ж.К. Модель динамического севооборота на основе уравнения Беллмана с конечным горизонтом // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2019. Т. 7. № 1 (24). С. 449–458.
- 4 Катаев А.В., Катаева Т.М. Сетевая бизнес-модель развития регионального промышленного комплекса в условиях цифровизации // Вестник Таганрогского института управления и экономики. 2019. № 2 (30). С. 26–28.
- 5 Si Y., Yang W., Zhou H. A simulation analysis on regional logistics development based on system dynamics: The case of Yunnan province // 5-th International Conference on Industrial Engineering and Applications (ICIEA). Singapore. 2018. P. 560–564.
- 6 Castellacci F., Natera J.M. The dynamics of national innovation systems: A panel cointegration analysis of the coevolution between innovative capability and absorptive capacity // Research Policy. 2013. V. 42. № 3. P. 579–594.
- 7 Uriona-Maldonado M., Grobbelaar S.S. Innovation system policy analysis through system dynamics modeling: A systematic review // Science and Public Policy. 2019. V. 46. № 1. P. 28–44.
- 8 Ferraz J.C., Coutinho L. Investment policies, development finance and economic transformation: Lessons from BNDES // Structural Change and Economic Dynamics. 2019. V. 48. № C. P. 86–102.
- 9 Valencic R., Wawrosz P. Limits of neoclassical utility theory and some possible ways how to overcome them // Journal of International Scientific Publications Volume. 2016. № 10. P. 23–31.
- 10 Бугаев Ю.В., Коробова Л.А. Использование аппарата двойственности в задаче о назначениях на сетевой модели // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2019): сб. тр. XII междунар. конф. 2019. С. 100–104.
- 11 Блинов И.В., Бугаев Ю.В., Чикунов С.В. Обобщение алгоритма Флойда-Уоршалла на случай нескольких критериев // Вестник Тамбовского государственного технического университета. 2009. Т. 15. № 4. С. 885–892.

References

- 1 Tarasenko A.V., Egorova I.L. Bellman's optimality principle in the problem of optimal distribution of funds between enterprises for the expansion of production. University Herald. 2019. no 10. pp. 132–138. (in Russian).
- 2 Paraev Yu.I., Grekova T.I., Poluektova K.O. Optimal management of a single-sector economy with a random change in the capital-labor ratio. Tomsk State University Bulletin. Management, computer engineering and computer science. 2018. no. 42. pp. 23–29. (in Russian).

- 3 Skvortsov Yu.S., Ryndin N.A., Amoa A.Zh.K.K. A dynamic crop rotation model based on the Bellman equation with a finite horizon. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2019. vol. 7. no. 1 (24). pp. 449–458. (in Russian).
- 4 Kataev A.V., Kataeva T.M. Network business model for the development of a regional industrial complex in the context of digitalization. *Bulletin of the Taganrog Institute of Management and Economics*. 2019. No. 2 (30). pp. 26–28. (in Russian).
- 5 Si Y., Yang W., Zhou H. A simulation analysis on regional logistics development based on system dynamics: The case of Yunnan province. 5 th International Conference on Industrial Engineering and Applications (ICIEA). Singapore. 2018. pp. 560–564.
- 6 Castellacci F., Natera J.M. The dynamics of national innovation systems: A panel cointegration analysis of the coevolution between innovative capability and absorptive capacity. *Research Policy*. 2013. vol. 42. no. 3. pp. 579–594.
- 7 Uriona-Maldonado M., Grobbelaar S.S. Innovation system policy analysis through system dynamics modeling: A systematic review. *Science and Public Policy*. 2019. vol. 46. no. 1. pp. 28–44.
- 8 Ferraz J.C., Coutinho L. Investment policies, development finance and economic transformation: Lessons from BNDES. *Structural Change and Economic Dynamics*. 2019. vol. 48. no. C. pp. 86–102.
- 9 Valencic R., Wawrosz P. Limits of neoclassical utility theory and some possible ways how to overcome them. *Journal of International Scientific Publications Volume*. 2016. no. 10. pp. 23–31.
- 10 Bugaev Yu.V., Korobova L.A. The use of the duality apparatus in the assignment problem on a network model. *Modern methods of applied mathematics, control theory and computer technology (PMTUKT 2019): Sat. tr XII international conf.* 2019. pp. 100–104. (in Russian).
- 11 Blinov I.V., Bugaev Yu.V., Chikunov S.V. A generalization of the Floyd-Warshall algorithm to the case of several criteria. *Bulletin of the Tambov State Technical University*. 2009. vol. 15. no. 4. pp. 885–892. (in Russian).

Сведения об авторах

Юрий В. Бугаев д.ф.-м.н., профессор, кафедра высшей математики и информационных технологий, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия, y_bugaev52@mail.ru
[ID https://orcid.org/0000-0002-1043-7682](https://orcid.org/0000-0002-1043-7682)

Людмила А. Коробова к.т.н., доцент, кафедра высшей математики и информационных технологий, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия, lyudmila_korobova@mail.ru
[ID https://orcid.org/0000-0003-1349-732X](https://orcid.org/0000-0003-1349-732X)

Ирина Ю. Шурупова к.ф.-м.н., преподаватель, кафедра математики, Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия» им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, ул. Старых Большевиков, ул. Старых Большевиков, 54 «А», г. Воронеж, 394064, Россия, i_shur@mail.ru
[ID https://orcid.org/0000-0002-0992-2998](https://orcid.org/0000-0002-0992-2998)

Вклад авторов

Все авторы в равной степени принимали участие в написании рукописи и несут ответственность за плагиат

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about authors

Yuri V. Bugaev Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor, higher mathematics and information technology department, Voronezh State University of Engineering Technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, 394036, Russia, y_bugaev52@mail.ru
[ID https://orcid.org/0000-0002-1043-7682](https://orcid.org/0000-0002-1043-7682)

Lyudmila A. Korobova Cand. Sci. (Engin.), associate professor, higher mathematics and information technology department, Voronezh State University of Engineering Technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, 394036, Russia, lyudmila_korobova@mail.ru
[ID https://orcid.org/0000-0003-1349-732X](https://orcid.org/0000-0003-1349-732X)

Irina Yu. Shurupova Cand. Sci. (Phys.-Math.), lecturer, math department, Military Training and Scientific Center of the Air Force "Air Force Academy" named after prof. N.E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarina, st. Old Bolsheviks, 54 "A", Voronezh, 394064, Russia, i_shur@mail.ru
[ID https://orcid.org/0000-0002-0992-2998](https://orcid.org/0000-0002-0992-2998)

Contribution

All authors are equally involved in the writing of the manuscript and are responsible for plagiarism

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила 05/02/2020	После редакции 17/02/2020	Принята в печать 26/02/2020
Received 05/02/2020	Accepted in revised 17/02/2020	Accepted 26/02/2020