Вестник ВГУИТ/ Proceedings of VSUET ISSN 2226-910X E-ISSN 2310-1202
DOI: http://doi.org/10.20914/2310-1202-2020-2-285-294 Оригинальная статья/Research article
УДК 360 Open Access Available online at vestnik-vsuet.ru

Динамическая модель развития, использующая временную потребительскую шкалу

Марина Л. Лапшина [1] marina_lapshina@mail.ru 0000-0002-5057-1069
Оксана О. Лукина [2] oks.lukina@gmail.com 0000-0003-2658-1512
Дмитрий Д. Лапшин [3] lapshin_vrn@mail.ru 0000-0001-5412-3434
Светлана В. Будкова [2] marina_lapshina@mail.ru

1 Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, ул. Тимирязева, 8, г. Воронеж, 394087, Россия
2 Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия
3 ГУМРФ имени адмирала С.О. Макарова, Воронежский филиал, Ленинский пр-т, 174л, г. Воронеж, 394033, Россия

Аннотация. В работе представлены исследования линейных моделей экономической динамики типа Неймана-Гейла, с учетом их возможной стационарности, приведен анализ существующих классификационных подходов к понятию оптимальности, приведены их достоинства и сравнительные характеристика, замечено, что модель первого типа - открытая - связывает понятие оптимальности с максимизацией дисконтированной суммарной полезности. Первый подход рассматривает замкнутую систему, технологическое описание которой включает в себя воспроизводство всех необходимых для развития ресурсов, в том числе трудовых. Такая система не имеет никаких внешних целей, ее естественная самоцель - развитие с максимальным темпом. Это наиболее абстрактная и идеализированная схема, но зато именно она позволила выработать такие фундаментальные понятия, как равновесие, луч (неймановский) сбалансированного роста. Позднее аппарат замкнутой модели пополнился понятиями «прямой и обратный операторы Беллмана», «эффективный функционал» («потенциал») модели и т.д. Второй подход предполагает явный учет потребления. Здесь описание становится открытым, потребление выводится из «технологии» и описывается с помощью функции полезности. Предлагается новый подход к понятию «оптимальная стратегия развития», приведен подробный анализ соответствующей модели. Статья состоит из трех разделов. 1 – постановочная часть; 2 – анализ модели с поясняющими примерами; 3 – сопряженная (двойственная) модель. Последний раздел содержит основной результат о связи оптимальных траекторий прямой и двойственной задач. В работе представлен обзор литературных источников в предметной области, а также дана экономическая интерпретация полученных результатов.

Ключевые слова: модель, функция, продукт, класс, шкала, последовательность, траектория

Dynamic development model using a temporary consumer scale

Marina L. Lapshina [1] marina_lapshina@mail.ru 0000-0002-5057-1069
Oksana O. Lukina [2] oks.lukina@gmail.com 0000-0003-2658-1512
Dmitriy D. Lapshin [3] lapshin_vrn@mail.ru 0000-0001-5412-3434
Svetlana V. Budkova [2] marina_lapshina@mail.ru

1 Voronezh State Forestry University named after G.F. Morozova, st. Timiryazev, 8, Voronezh, 394087, Russia
2 Voronezh State University of Engineering Technologies, Revolution Av., 19 Voronezh, 394036, Russia
3 GUMRF named after Admiral S.O. Makarova, Voronezh branch, Leninsky Prospekt, 174l, Voronezh, 394033, Russia

Abstract. The paper presents studies of linear models of economic dynamics of the Neumann-Gale type, taking into account their possible stationarity, presents an analysis of existing classification approaches to the concept of optimality, presents their advantages and comparative characteristics, it is noted that the first type model - open - connects the concept of optimality with discounted maximization total utility. The first considers a closed system, the technological description of which includes the reproduction of all the resources necessary for development, including labor. Such a system has no external goals; its natural end in itself is development at the maximum pace. This is the most abstract and idealized scheme, but on the other hand it was it that made it possible to develop such fundamental concepts as equilibrium, a ray of (Neumann) balanced growth. Later, the apparatus of the closed model was replenished with the concepts of “direct and inverse Bellman operators”, “effective functional” (“potential”) of the model, etc. The second approach involves explicit accounting for consumption. Here the description becomes open, consumption is derived from the "technology" and described using the utility function. A new approach to the concept of “optimal development strategy” is proposed, a detailed analysis of the corresponding model is given. The article consists of three sections. 1 - staging part; 2 - analysis of the model with illustrative examples; 3 - conjugate (dual) model. The last section contains the main result on the connection of the optimal trajectories of the direct and dual problems. The paper provides an overview of literary sources in the subject area, as well as an economic interpretation of the results.

Keywords: model, function, product, class, scale, sequence, trajectory

Введение

Хорошо известны два подхода к понятию оптимальности. Первый рассматривает замкнутую систему, технологическое описание которой включает в себя воспроизводство всех необходимых для развития ресурсов, в том числе трудовых. Такая система не имеет никаких внешних целей, ее естественная самоцель – развитие с максимальным темпом. Это наиболее абстрактная и идеализированная схема, но зато именно она позволила выработать такие фундаментальные понятия, как равновесие, луч (неймановский)

Для цитирования
Лапшина М.Л., Лукина О.О., Лапшин Д.Д., Будкова С.В. Динамическая модель развития, использующая временную потребительскую шкалу // Вестник ВГУИТ. 2020. Т. 82. № 2. С. 285–294. doi:10.20914/2310-1202-2020-2-285-294

For citation
Lapshina M.L., Lukina O.O., Lapshin D.D., Budkova S.V. Dynamic development model using a temporary consumer scale. *Vestnik VGUIT* [Proceedings of VSUET]. 2020. vol. 82. no. 2. pp. 285–294. (in Russian). doi:10.20914/2310-1202-2020-2-285-294

сбалансированного роста. Позднее аппарат замкнутой модели пополнился понятиями «прямой и обратный операторы Беллмана», «эффективный функционал» («потенциал») модели и т. д.

Модель первого типа – открытая – связывает понятие оптимальности с максимизацией дисконтированной суммарной полезности.

$$\sum_{t=0}^{T} \mu^t U(c_t) \to \max. \qquad (1)$$

При этом субъекты потребления – трудовые ресурсы – выводятся из технологического описания, потребление теряет производственный характер, функция U интерпретируется как полезность непроизводственного потребления. Моделями такого типа охватываются ситуации, когда трудовые ресурсы не являются фактором, лимитирующим рост производства. Уязвимое место – выбор значения коэффициента дисконтирования μ. Этот выбор трудно объективировать, но от него существенно зависит соотношение уровней потребления разных «поколений». При малых μ все будет быстро «проедено» и потомкам ничего не остается; при больших μ возникает так называемый эффект отложенного потребления, когда $U(c_t) \simeq 0$ при t, не слишком близких к концу планового периода T.

Модель второго типа – полуоткрытая – описывает ситуации, в которых трудовые ресурсы лимитируют рост производства, и ее технология включает соответствующие ограничения. При этом рост трудовых ресурсов задается вне технологии, экзогенно, в простейшем случае $N_t = N_0 \lambda^t$. В качестве критерия оптимальности здесь вступает функционал суммарного (недисконтированного) душевого потребления

$$\sum_{t=0}^{T} \frac{1}{N_0 \lambda^t} U(c_t) \to \max \qquad (2)$$

Важнейшим теоретическим результатом этой модели является теорема о магистрали в потреблении, утверждающая, что оптимальная траектория проходит (при больших T) вдоль так называемого золотого луча, на котором достигается равномерный, с темпом λ, сбалансированный рост.

Предлагаемая нами модель в описательной части содержит черты всех названных подходов. Ее принципиальная особенность в нетрадиционной постановочной части – формулировка критерия оптимальности.

Описание модели развития непроизводственного потребления с нормативной временной шкалой

1. Экономическая система описывается традиционно с помощью гейловской технологии Z – выпуклого замкнутого конуса в R_+^{2n}, удовлетворяющего стандартным условиям [1]. В равносильной форме технология может быть задана производственным отображением ω пространства «продуктов» R_+^{2n} в себя $\omega(x) = \{y \in R_+^n \mid (x,y) \in Z\}, \quad x \in R_+^n$; в паре (x,y) x – исходное состояние; y – одно из состояний, доступных через единицу времени. Считается, что возможные траектории развития системы определяются технологией ω полностью; существенно, что трудовые ресурсы являются также одной из компонент вектора состояния. Это означает, что трудовые ресурсы наряду с остальными продуктами воспроизводятся в системе и используются в процессе производства. В этом смысле модель замкнута, и к ней применимы все понятия и результаты, относящиеся к замкнутым линейным моделям Неймана–Гейла [2].

Пусть, далее, на пространстве продуктов R_+^n определена функция полезности $U : R_+^n \to R_+$ значение $U(c)$ интерпретируется в данной работе как полезность вектора непроизводственного потребления $c \in R_+^n$. Остановимся на этом несколько подробнее.

В описываемой модели трудовые ресурсы – это люди (население), выступающие одновременно и как работники, и как “чистые потребители”. Воспроизводство трудовых ресурсов требует затрат по поддержанию некоторого жизненного уровня работников (питание, жилье, социальная защита, образование, здравоохранение и т. п.), а также для повышения их квалификации. Эти затраты суть производственное потребление, и они считаются включенными в описание технологии Z. Но, те же люди рассматриваются как потребители со своими чисто человеческими “прихотями” – склонностью к предметам роскоши, путешествиям, спорту, увлечениями (хобби) и вообще желанием просто жить и творить, не заботясь о куске хлеба. Такого рода потребление – непроизводственное, оно находится вне экономики и является по отношению к ней “внешней” нагрузкой [3, 4]. В то же время именно оно и составляет смысл жизни; с этой точки зрения функция U описывает высшие “вечные” ценности человеческого бытия. Вместе с тем предполагается, что непроизводственное потребление c “черпается” из тех же источников, что и производственное, т. е. $c \in R_+^n$, причем $0 \le c \le x$, где x – текущее состояние системы. Таким образом, траектории системы суть последовательности $\varsigma := \{x_t, c_t\}, \quad t = 0,1,.....,$ удовлетворяющие условиям x_0 задано, $0 \le c_t \le x_t$,

$$x_{t+1} \in \omega(x_t - c_t), t = 0,1,... \qquad (3)$$

Следующей предпосылкой модели, существенно упрощающей ее анализ, является предположение о постоянном, экзогенно заданном, темпе роста населения

$$N_t = N_t \lambda^t, \lambda > 0. \quad (4)$$

Подчеркнем, что N_t – это физический объем населения (количество потребителей). Трудовые ресурсы, измеряемые в каких-либо стандартных единицах производительности, могут расти быстрее за счет повышения квалификации (возрастающая со временем производительность человека-работника).

Итак, рассматриваемая система описывается тройкой $\{Z(\text{или } \omega), U, \lambda\}$. Функцию U будем предполагать принадлежащей классу W монотонных линейно-однородных (первой степени) функций над R^n_+. Кроме того, предполагается, что U всегда выпукла вверх, т. е. $U \in \hat{W}$, где $\hat{W} \subset W$ – подкласс выпуклых вверх функций.

Критерий развития. Пусть $\rho = \{\rho_t, t = 0,1,...\}$ – некоторая последовательность неотрицательных чисел, мыслимая как заданная временная шкала потребления. С каждой траекторией $\varsigma := \{x_t, c_t\}$ свяжем число

$$\theta =: \theta(\zeta) = \min_{t \ge 0} \frac{1}{\rho_t} \frac{U(c_t)}{N_t} \min_{t \ge 0} \max \left\{ s \,|\, \frac{1}{\rho_t} \frac{U(c_t)}{N_t} \ge s \right\}. \quad (5)$$

Оно может интерпретироваться как уровень полезности душевого потребления, измеренный в шкале ρ, гарантированный всем "поколениям" $t = 0,1,...$ Выражение (5) вскрывает и смысл шкалы ρ: она задает соотношение полезностей потребления разных поколений [14]; ее можно назвать нормативной шкалой дисконтирования полезности.

Обозначим через $Tx(x)$ пучок траекторий (3), выходящих из начальной точки $x_0 = x$, и поставим задачу

$$\theta(\zeta) \to \max_{\varsigma \in Tr(x)} =: I(x) \quad (6)$$

Из содержательного смысла модели ясно, что в "правильной" (регулярной) модели на оптимальной траектории задачи (6) приведенный уровень душевого потребления будет постоянен на всей траектории, т. е. $\frac{1}{\rho_t} \frac{U(c_t)}{N_t} \overset{t}{\equiv} I(x)$.

В самом деле, если бы для некоторого t_1 этот уровень был выше $I(x)$ (ниже он быть не может по определению), то можно было бы его понизить, увеличив потребление всех остальных поколений $t = t_1$ но это противоречит условию оптимальности, и поэтому невозможно.

3. Основная стационарная модель. Исходя из общей концепции развития сформулируем основную модель.

Пусть:

1) численность населения N_t удовлетворяет закону роста (4), причем начальное значение принимается за единицу измерения, т. е. $N_0 \equiv 1$.

2) полезность дисконтируется с постоянным коэффициентом, т. е. $\rho_t = \rho^t$, где $\rho = const > 0$ - плановый темп роста душевого потребления.

При этих предпосылках, учитывая еще линейную однородность функции U, получим критерий (6) в форме

$$\theta(\varsigma) = \min_{t \ge 0} \delta^{-t} U(c_t) \to \max_{\varsigma \in Tr(x)} =: I(x), \;\; \delta := \lambda\rho. \quad (7)$$

В отличие от общего случая (6) задача (7) стационарна: функция I является решением стационарного (однородного во времени) уравнения Беллмана

$$\Phi(x) := \max_{0 \le c \le x} \min[U(c), \;\; \frac{1}{\delta} \Gamma\Phi(x - c)], \Phi \in W, \quad (8)$$

где

$$\Gamma\Phi(x) := \max_{y \in \omega(x)} \Phi(y), \quad \Phi \in W, \quad x \in R^n_+. \quad (9)$$

Уравнение (8) является основным, его решение определяет для каждого состояния $x \in R^n_+$ уровень полезности *I(x)*, оптимальный вектор потребления $c = C(x)$, максимизирующий правую часть (8) при $\Phi = I$, и оптимальный ход

$$Y(x) := Arg \max_{y \in \omega(x - C(x))} \quad (10)$$

Траектория $\varsigma \in Tr(x)$ задачи (8) строится по правилу

$$x_0 = x, c_t := C(x_t), x_{t+1} := T(x_t), t = 0,1,... \quad (11)$$

Траекторию ς, на которой для всех t выполнены соотношения

$$I(x_t) = U(c_t) = \frac{1}{\delta} \Gamma I(x_t - c_t) = \frac{1}{\delta} I(x_{t+1})$$

назовем равномерно сбалансированной (РС-траектория) (существование РС-траекторий будет показано ниже). На РС-траекториях

$$I(x_t) = U(c_t) = \delta^t I(x_0) \, \forall t, \quad (12)$$

т. е. удельная душевая полезность $\lambda^{-t} U(C_t)$ растет во времени со строго заданным плановым темпом ρ. Еще раз подчеркнем, что в стационарной модели значения $I(x)$, $C(x), Y(x)$ зависят только от состояния $x \in R^n_+$, но не от момента времени, в который это состояние достигнуто.

Исходя из соотношения $I(x) = U(C(x))$ назовем функцию $I(\bullet)$ нормативным индексом полезности (НИП), он полностью определяется тройкой $\{\omega, U, \delta\}$. Этот термин подчеркивает общий нормативный характер модели.

Анализ стационарной модели

Прежде всего, необходимо сделать одно уточнение. Уравнение (8) может иметь много решений, в частности тривиальным является $\Phi \equiv 0$. Но во множестве всех решений существует максимальное $\tilde{\Phi}$, т. е. такое, что $\Phi \le \tilde{\Phi}$ для любого решения Ф. Неравенство $\Phi_1 \ge \Phi_2$ означает, естественно, что $\Phi_1(x) \ge \Phi_2(x) \forall x \in R_+^n$.

В самом деле, если рассматривать правую часть (8) как оператор $L: W \to W$, действующий на функцию Ф, то этот оператор, очевидно, монотонен $L\Phi_1 \ge L\Phi_2$ если $\Phi_1 \ge \Phi_2$, поэтому последовательность

$$\Phi_0 := \infty, \quad \Phi_{k+1} := L\Phi_k, k = 0,1,... \tag{13}$$

убывает и, таким образом, сходится к некоторой функции $\tilde{\Phi}$. Предельная функция входит в класс W[5], поэтому $\tilde{\Phi}$ – решение уравнения (8). Сопоставляя любое другое решение Ф с членами последовательности (13), заключаем, ввиду монотонности $\Phi \le \Phi_0 \Rightarrow \Phi \le \Phi_k \ \forall k \Rightarrow \Phi \le \tilde{\Phi}$, т. е. решение $\tilde{\Phi}$ максимально.

Из содержательного смысла задачи ясно, что именно максимальное решение будет нормативным индексом, определенным формулой (7), т. е. $I = \tilde{\Phi}$. Это рассуждение доказывает одновременно, что НИП существует и единствен; кроме того, так как в (13) $\Phi_1 = U$, то $I \le U$.

Утверждение 1. НИП I – выпуклая вверх функция, $I \in \hat{W}$, он нетривиален ($I \ne 0$) тогда и только тогда, когда $\delta < \alpha$, где $\alpha = \alpha_\omega$ есть неймановский темп роста технологии ω. Отсюда вытекает экономически очевидное следствие: равномерно дисконтированное душевое потребление $\frac{1}{\lambda^t}U(C_t)$ может возрастать ($\rho > 1$) тогда и только тогда, когда темп роста населения λ строго меньше темпа роста технологии $\alpha, \lambda < \alpha$.

Примеры. Чтобы лучше прочувствовать модель, рассмотрим простые примеры.

Пример 1. Пусть технология ω задана формулой

$$\omega(x) := \{y \in R_+^n \mid \pi y \le \alpha \wedge_a(x)\}, x \in R_+^n, \tag{14}$$

где при положительном векторе $a \in R_+^n$

$$\Lambda_a(x) := \min_i \frac{x_i}{a_i}, x \in R_+^n \tag{15}$$

(i – номер компоненты); $\pi \in R_+^n$ – положительный вектор цен, нормированный условием $\pi a = 1$. В [6] показано, что (14) является “бюджетной” аппроксимацией леонтьевской технологии

$$\omega_a(x) := \{y \in R_+^n \mid Ay \le x\}, x \in R_+^n,$$

где $A(n \times n)$ – матрица Леонтьева прямых затрат, причем α, a, π в (14) суть $r^{-1}(r = r(A))$ - спектральный радиус матрицы) и соответственно правый и левый собственные векторы. В модели (14) оператор Беллмана (9) действует по формуле

$$\Gamma\Phi(x) := \max_{\pi y \le \alpha\Lambda_a(x)} \Phi(y) = \alpha\Lambda_a(x)\gamma, \tag{16}$$

где

$$\gamma = \gamma(\Phi) := \max_{\pi y \le 1} \Phi(y). \tag{17}$$

Пусть, далее, функция полезности U аналогична (15), но с некоторым другим вектором b, т. е. $U = \Lambda_b$, причем для удобства нормируем b условием $\pi b = 1$. В силу (16) уравнение (8) приобретает вид

$$\Phi(x) = \max_{c \le x} \min[\Lambda_b(c), \mathrm{E}\Lambda_a(x-c)], \mathrm{E} := \frac{\alpha}{\delta}\gamma(\Phi), \tag{18}$$

и, следовательно, его решение определено правой частью с точностью до параметра Е. При фиксированном Е значение правой части (18)

$$\max_{c \le x} \max\{s \mid c \ge sb, x - c \ge \frac{s}{\mathrm{E}}a\} = \mathrm{ax}\{s \mid x \ge \frac{s}{\mathrm{E}}a + sb\} =$$

$$= \max\{s \mid x \ge s(\frac{1}{\mathrm{E}}a + b)\} = \Lambda_{(\frac{1}{\mathrm{E}}a+b)}(x);$$

таким образом, $\Phi = \Lambda_{a/\mathrm{E}+b}$. Для нахождения Е воспользуемся (17)

$$\frac{\delta\mathrm{E}}{\alpha} = \gamma(\Phi) = \max_{\pi y = 1} \Lambda_{(\frac{1}{\mathrm{E}}a+b)}(y) = \frac{1}{\pi(\frac{1}{\mathrm{E}}a + b)} = \frac{\mathrm{E}}{1+\mathrm{E}}$$

откуда (при $\delta < \alpha$) $\mathrm{E} = (\alpha/\delta) - 1$.

Итак, окончательно, в модели (14) с функцией полезности $U = \Lambda_b$ (и при условии $\pi a = \pi b = 1$)

$$I = \Lambda_e, e = \frac{a}{\mathrm{E}} + b, \mathrm{E} = \frac{\alpha}{\delta} - 1 \tag{19}$$

Пример 2. (общая сепарабельная модель). Сепарабельная технология общего вида

$$\omega(x) = \{y \in R_+^n \mid g(y) \le \alpha G(x)\}, x \in R_+^n, \tag{20}$$

задается парой “бюджетных” функций g, $G \in W$, выпуклых соответственно вниз и вверх, и скаляром $\alpha > 0$. Предполагается, что функция g, G взаимно нормированы

$$\max_{x \in R_+^n} \frac{G(x)}{g(x)} = \max_{g(x) \le 1} G(x) = 1; \quad (21)$$

тогда α – неймановский темп роста технологии (20).

Как и в примере 1. $\Gamma\Phi(x) = \alpha G(x)\gamma$, $\gamma = \gamma(\Phi) := \max_{g(y) \le 1} \Phi(y)$ поэтому основное уравнение (8) приобретает вид

$$\Phi(x) = \max_{c \le x} \min[U(c), \mathrm{E}G(x-c)], \mathrm{E} := \frac{\alpha}{\delta}\gamma(\Phi), \quad (22)$$

и, следовательно, опять решение Ф определено правой частью с точностью до скаляра E. Положим $\Psi := \Phi / \mathrm{E}$, тогда функция Ψ дается выражением

$$\Psi(x) = \max_{c \le x} \min[\frac{1}{\mathrm{E}}U(c), G(x-c)], \mathrm{E} := \Psi_{\mathrm{E}}(x), \quad (23)$$

при подходящем значении E, которое определяется условием $\gamma(\Psi) = \frac{1}{\mathrm{E}}\gamma(\Phi) = \frac{\delta}{a}$, т. е.

$$\max_{g(y) \le 1} \Psi_{\mathrm{E}}(y) = \frac{\delta}{\alpha}. \quad (24)$$

Ясно, что Ψ_{E} убывает по $\mathrm{E} \in (0, \infty)$, причем $\Psi_{\mathrm{E}=0} = G, \Psi_{\mathrm{E}=\infty} = 0$, поэтому с учетом (21) при $\delta < \alpha$ значение E, удовлетворяющее условию (24), существует и единственно.

Итак, в сепарабельной модели (20) НИП I строится следующим образом [15]: 1) находим значение E, удовлетворяющее условию (24), в котором параметрическая функция Ψ_{E} определена в (23); 2) полагаем $I := \mathrm{E}\Psi_{\mathrm{E}}$.

3. Гипотеза о магистрали. Обратимся к анализу оптимальных РС-траекторий сепарабельной модели. Переходное отображение (10) имеет вид

$$Y(x) = \underset{g(y) \le \alpha G(x - C(x))}{Arg \max} I(y) = \alpha G(x - C(x))\hat{x}, x \in R_+^n$$

где вектор $\hat{x} = \underset{g(y) \le 1}{Arg \max} I(y)$ не зависит от x, при этом в силу равномерной сбалансированности имеем из (22) $G(x - C(x)) = \frac{1}{\mathrm{E}} I(x)$, следовательно, $Y(x) = \frac{\alpha}{\mathrm{E}} I(x)\hat{x}, x \in R_+^n$.

Таким образом, из любого состояния $x \in R_+^n$ система за один шаг выходит на луч $l := \{s\hat{x} \mid s \ge 0\}$ в точку, пропорциональную значению НИП, и далее движется по лучу l. Отметим, что темп движения по лучу равен δ, ибо с учетом (24), $Y(\hat{x}) = \frac{\alpha}{\mathrm{E}} I(\hat{x})\hat{x} = \alpha\Psi(\hat{x})\hat{x} = \delta\hat{x}$.

Это означает, что луч l – магистраль сепарабельной модели, причем жесткая [10]: выход на магистраль происходит сразу, на первом шаге. Экономически вектор $\hat{x}$ и соответствующий ему вектор потребления $\hat{c} = C(\hat{x})$ образуют сбалансированную пару $(\hat{x}, \hat{c})$, обеспечивающую нормативный темп роста δ $I(\hat{x}) = U(\hat{c}) = \frac{1}{\delta} I(\hat{y})$, $\hat{y} = \delta\hat{x} \in Y(\hat{x} - \hat{c})$.

В теореме о магистрали в потреблении (в полуоткрытой модели) подобная пара названа “золотым дуплетом” [7, 8].

Необходимыми и достаточными условиями сбалансированности пары $(\hat{x}, \hat{c})$ являются

$$I(\hat{x}) = U(\hat{c}), \delta\hat{x} \in \omega(\hat{x} - \hat{c}). \quad (25)$$

Возникают два вопроса: 1) существует ли сбалансированная пара (25) в общей модели (8), 2) если такая пара существует, будет ли луч $l = \{s\hat{x}\}$ магистрально (аттрактором) для оптимальных РС-траекторий? Ответ на первый вопрос положительный.

Утверждение 2. В модели (8) пара $(\hat{x}, \hat{c})$, сбалансированная в смысле (25), существует (возможно, не единственная).

Второй вопрос остается открытым, в этом состоит гипотеза о магистрали.

Сопряженное (двойственное) уравнение

В этом разделе будет получено уравнение, сопряженное с (8), в котором основной переменной выступает не вектор продуктов x, а цены $\rho \in R_+^n$. Траектории прямой и двойственной задач оказываются тесно связанными.

1. Некоторые факты из теории сопряженных функций. Для $\Phi \in \hat{W}$ сопряженная функция Φ^* определяется формулой

$$\Phi^*(p) := \min_{x \in R_+^n} \frac{p(x)}{\Phi(x)} = \min_{x \in D} px, \ p \in R_+^n, \quad (26)$$

где

$$D(\Phi) := \{x \in R_+^n \mid \Phi(x) \ge 1\}, \Phi \in \hat{W} \quad (27)$$

множество $D(\Phi)$ выпукло. Функция Φ^* также входит в $\hat{W}$, поэтому имеет смысл второе сопряжение, и выполняется равенство

$$\Phi^{**} = \Phi \quad \forall \Phi \in \hat{W}, \quad (28)$$

т. е. функции Φ и Φ^* взаимно сопряжены.

Отображение

$$p \to \underset{x \in D(x)}{Arg \min} = \{x \mid \Phi(x) = 1,\ px = \Phi^*(p)\} =: \\ =: Grand\ \Phi^*(p) \qquad (29)$$

определяет множество обобщенных градиентов функции $\Phi^* \in \hat{W}$ в точке p; оно линейно однородно нулевой степени, причем когда p пробегает пространство R_+^n, вектор $x = grad\Phi*(p)$ пробегает всю линию уровня $\Phi(x) = 1$. В силу (28) имеем аналогично

$$x \to \underset{p \in D(\Phi^*)}{Arg \min} = \left\{p \mid \Phi^*(p) = 1\right\},\ px = \Phi(x)\} = \\ = Grand\ \Phi(x),$$

Обозначим через $N_x(\Phi)$ конус векторов p, нормальных к линии уровня функции Φ в точке x

$$N_x(\Phi) = \{p = sGrandD\,\Phi(x) \mid s \ge 0\} = p \in R_+^n \mid px = \\ = \Phi^*(p)\Phi(x)\},\ x \in R_+^n \qquad (30)$$

и отметим принцип взаимности

$$p \in N_x(\Phi) \Leftrightarrow x \in N_p(\Phi^*) \Leftrightarrow px = \Phi^*(p)\Phi(x) \qquad (31)$$

Векторы x, p, связанные соотношениями (31), будем называть Φ – взаимными. Экономически условия взаимности означают, что при функции полезности Φ и ценах p вектор x – вектор спроса [9].

2. Оператор равномерного дележа. Введем в рассмотрение оператор S, ставящий в соответствие каждой паре функций $\Phi_1, \Phi_2 \in \hat{W}$ функцию S

$$S[\Phi_1, \Phi_2](x) := \max_{x_1, x_2 \ge 0} \min[\Phi(x_1), \Phi_2(x_2)], \quad x \in R_+^n;$$

легко убедиться, что $S \in \hat{W}$. Операция S получает интерпретацию дележа, если считать, что Φ_1, Φ_2 – функции полезности двух участников, x – вектор, подлежащий дележу. Совместная полезность $S(x)$ есть значение функционала в задаче

$$\Phi(x_1) \ge s,\ \Phi(x_2) \ge s,\ x_1, x_2 \ge 0,\ x_1 + x_2 \le x;\ s \to \max;$$

она оказывается, грубо говоря, вдвое меньше каждой из индивидуальных полезностей [11].

Очевидно, что всегда существует равномерный оптимальный дележ, т. е. такой, что

$$\Phi(x_1) = \Phi(x_2) = S(x) \qquad (32')$$

Менее очевидно существование равномерно сбалансированного РС-дележа, т. е. удовлетворяющего кроме (32') условию

$$x_1 + x_2 = x \qquad (32'')$$

Лемма I. Имеют место равенства

$$S^* = \Phi_1^* + \Phi_2^*, \qquad (33)$$

$$Grand\ S^* = Grand\ \Phi_1^* + Grand\ \Phi_2^*. \qquad (34)$$

Из леммы следует, что РС-дележ вектора x существует и может быть реализован следующим образом с помощью произвольного вектора цен $p \in N_x(S)$. Обозначим $x' := x / S(x)$, тогда $S(x') = 1$ и, согласно (29), (31), $x' = grad\ S^*(p)$. В силу (34) найдутся векторы $x_1' = Grand\ \Phi_1^*(p),\ x_2' = Grand\ \Phi_2^*(p),$ такие, что $x_1' + x_2' = x'$. Для этих векторов, согласно (29), будут выполнены равенства $\Phi_1(x_1') = \Phi_2(x_2') = I$. Поэтому пара $(x_1, x_2) := S(x)(x_1', x_2')$ образует РС-дележ вектора x.

Лемма 2. Пусть $x_1 + x_2 = x$ есть РС-дележ, и $p \in N_x(S)$. Тогда $p \in N_{xi}(\Phi_i),\quad i = 1, 2.$

Замечание. Результаты п. 2 имеют самостоятельное значение. Они непосредственно переносятся на случай дележа между m участниками $(m \ge 1)$ с оператором

$$S[\Phi_1, ..., \Phi_m](x) := \max_{x_i \ge 0} \min[\Phi_1(x_1), ..., \Phi_m(x_m)],\ x \in R_+^n.$$

3. Сопряженное уравнение. Применив результаты п. 2 к основному уравнению (8), которое можно записать в виде

$$\Phi = S[U, \frac{1}{\delta}\Gamma\Phi], \qquad (35)$$

получим

$$\Phi^* = U^* + (\frac{1}{\delta}\Gamma\Phi)^* = U^* + \delta(\Gamma\Phi)^*. \qquad (36)$$

Операция (ΓΦ)* выражается в терминах двойственной модели Неймана – Гейла [12], которая задается отображением

$$\omega^*(p) := \{q \in R_+^n \mid qy \le px\ \forall (x, y) \in Z\},\ p \in R_+^n, \qquad (37)$$

порождающим соответствующий оператор Беллмана $\Gamma^*\Phi^*(p) := \max\limits_{q \in \omega^*(p)} \Phi^*(q).$

Отметим, что двойственный темп роста α^* связан с прямым темпом α соотношением $\alpha^* = \alpha^{-1}$. Нетрудно проверить равенство

$$(\Gamma\Phi)^* = \Gamma^*\Phi^* \quad \forall \Phi \in \hat{W}, \qquad (38)$$

используя которое, получаем из (36)

$$\Phi^* = U^* + \delta\Gamma^*\Phi^*, \quad \Phi^* \in \hat{W}. \qquad (39)$$

Это и есть сопряженное уравнение относительно функции Ф • (U • находится по (26)). Как и прямое уравнение, оно может иметь много решений. Нас интересует минимальное решение, получающееся как предел возрастающей последовательности $\Phi_0^* := 0,\ \Phi_{k+1}^* := L^*\Phi_k^*$, $k = 0,1,...$ где L^* – оператор правой части (39). Эта последовательность сходится, так как она сопряжена сходящейся последовательности (13); ее предел – I^*.

Отметим, что существование РС-дележа для (35) означает существование равномерно сбалансированных траекторий [11] для (8).

4. Связь между траекториями прямой и двойственной задач. Траекторией, порожденной решением I^*, назовем последовательность

$$p_0 - \text{задано},\ p_{t+1} := \arg\max_{q\in\omega^*(p_t)} I^*(q), \quad t = 0,1,... \quad (40)$$

Утверждение. Пусть $\{x_t, c_t\}$ есть РС-траектория задачи (8) и вектор цен p_0 I– взаимен с начальной точкой x_0. Тогда траектория (40) двойственна к данной РС-траектории в следующем смысле [13]: при всех $t = 0,\ 1,...$ пары $\{x_t, p_t\}$ I-взаимны, пары $\{c_t, p_t\}$ U-взаимны и выполняется равенство

$$p_{t+1}x_{t+1} = p_t(x_t - c_t). \quad (41)$$

Из утверждения с учетом (29), (30), (12) следуют соотношения

$$\begin{aligned} a)x_t \in Arg\min_{I(x)\ge I(x_t)} p_t x = Arg\min_{x\in D} p_t x = \\ = \delta^t I(x_0) Grad I^*(p_t), \end{aligned} \quad (42)$$

$$a)c_t \in Arg\min_{U(c)\ge U(c_t)} p_t c = \delta^t I(x_0) Grad U^*(p_t),$$

однако, поскольку правые части в (42) неоднозначны, они, вообще говоря, не позволяют по траектории $\{p_t\}$ восстановить траекторию $\{x_t, c_t\}$.

5. Экономическая интерпретация. Равенство (41) выражает экономический “закон сохранения стоимости” [16]: в производственном периоде $(t, t+1)$ оценка конечного продукта x_{t+1} совпадает (в оптимальных ценах) с оценкой вектора $z_t := x_t - c_t$, направляемого в производство. Многократно итерируя (41), получим

$$p_t x_t = p_0 x_0 - \sum_{k=0}^{t-1} p_k x_k; \quad (43)$$

это – “финансовое сальдо”: остаточная на момент Г стоимость продуктов равна первоначальной стоимости за вычетом суммарного (за весь предшествующий период) потребления. Учитывая, что $p_t \sim (\alpha^*)^t = \alpha^{-t}$ (это следует из (40)), $x^t \sim \delta^t$ и поэтому $x_t p_t \sim \left(\dfrac{\delta}{\alpha}\right)^t \to 0$ при $t \to \infty$, можно перейти в (43) к предельному равенству

$$p_0 x_0 = \sum_{t=0}^{\infty} p_t x_t \quad (44)$$

с очевидной интерпретацией. В терминах сопряженных функций (44) имеет вид $I^*(p_0) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t U^*(p_t);$ это равенство получается из определения траектории (40) путем итерирования основного уравнения (39) и предельного перехода, аналогичного переходу (41)–(43)–(44) [10, 11].

Добавим, что если перейти к ценам $\tilde{p}_t$, нормированным условием $I^*(p) = 1$, т. е. положить $\tilde{p}_t := p_t / I^*(p_t)$ то из I-взаимности пары $\{x_t, p_t\}$ следует $\tilde{p}_t = grad\ I(x_t)$, $\tilde{p}_t x_t = I(x_t) = \delta^t I(x_0)$.

В нормированных ценах оценка состояния x_t совпадает со значением НИП.

Заключение

В работе обосновано практическое использование линейных моделей специального типа, построенных с учетом классических подходов к реализации вопроса оптимальности, а также, приведены результаты сравнительных исследований моделей 2-х типов, обосновывающие использование модели первого типа для выработки ключевых понятий, таких как равновесие, луч сбалансированного роста. Модель второго типа позволяет изменить статус понятия потребление, который будет выражен с использованием функции полезности. В работе предложен качественно новый подход к понятию «оптимальная стратегия развития». Предложенные методы и модели получили хорошую практическую апробацию и могут быть использованы не только для теоретических исследований, но и для минимизации временных затрат при практической оценке экономической ситуации на предприятиях с учетом особенностей современного состояния рынка.

Приложение

1. Доказательство утверждения 1. Сначала докажем, что $I \neq 0$ только при $\delta < \alpha$. Имеем на траектории (11) $I(x_t) \leq \frac{1}{\delta} I(x_{t+1})$, откуда следует, что если $I \neq 0$, то траектория $\{x_t\}$ растет с темпом, не меньшим δ. Так как максимально возможный темп роста – α, то при $\delta < \alpha \quad I \equiv 0$. Если $\delta = \alpha$, то в предположении, что технология ω регулярна, т. е. обладает магистральным лучом с положительным направляющим (неймановским) вектором x^*, последовательность $\alpha^{-1} x_t$ сходится к некоторой точке γx^*. Но движение вдоль магистрального луча возможно только при нулевом потреблении, поэтому и в данном случае $I \equiv 0$. Если же $\delta < \alpha$, то при $x_0 > 0$ всегда существует траектория развития с равномерно отделенным от нуля потреблением; поэтому здесь $I(x) > 0$ при $x > 0$.

Для доказательства выпуклости *I*, запишем оператор *L* правой части (8) в следующем виде (предполагая, что $\Phi \in \hat{W}$)

$$L\Phi(x) = \max_{c \leq x} \min_{h \in [0,1]} [(1-h)U(c) + h\frac{1}{\delta}\Gamma\Phi(x-c)] = \min_h L_h \Phi(x), \quad (45)$$

где $L_h\Phi(x) = \max_{c \leq x} [(1-h)U(c) + h\frac{1}{\delta}\Gamma\Phi(x-c)]$

(перестановка max и min допустима в силу [1], так как $\Phi \in \hat{W} \Rightarrow \Gamma\Phi \in \hat{W} \Rightarrow [...] \in \hat{W}$. В [3] показано, что оператор L_h сохраняет свойство выпуклости; но тогда, согласно (45), и оператор *L* сохраняет свойство выпуклости. Поскольку в последовательности (13) $\Phi_0 \in \hat{W}$ то $\Phi_k \in \hat{W} \ \forall k$, поэтому $I = \lim \Phi_k \in \hat{W}$.

2. Доказательство утверждения 2. Оптимальная стратегия дается отображением

$$x \to (C(x), Y(x)) = Arg \max_{(c,y) \in Q(x)} I(y),$$

где

$$Q(x) := \{(c,y) \mid U(c) \geq I(x), y \in (x-c) \subset R_+^{2n} \quad (46)$$

так как $Q(x)$ выпукло и функция *I* выпукла вверх, то при любом $x \in R_+^n$ множество $(C(x), Y(x)) \subset R_+^{2n}$ – выпуклый компакт. Положим

$$\sigma := \{x \in R_+^{2n} \mid ex = 1\}, \quad e := (1,1,...,1) \in R^n$$

и рассмотрим отображение $\tilde{Y} : \tilde{\sigma} \to \sigma$

$$\tilde{Y}(x) := \{\tilde{y} \mid \tilde{y} = y / ey, \quad y \in Y(x)\}, x \in \sigma$$

при каждом $x \in \sigma \tilde{Y}(x)$ – непустое выпуклое множество. По теореме Какутани отображение $\tilde{Y}$ имеет неподвижную точку $\hat{x} \in \sigma$. Это означает, что $E\hat{x} \in \sigma Y(\hat{x})$ при некотором $E > 0$. В силу равномерной сбалансированности $I(\hat{x}) = \frac{1}{\delta} I(E\hat{x})$, откуда $E = \delta$. Согласно (46), найдется $\hat{c}$ такое, что выполняются условия (25).

3. Доказательство леммы 1. Воспользуемся обозначением (27). Имеем

$$\begin{aligned} &x \in D(S) \Leftrightarrow S(x) \geq 1 \Leftrightarrow \{\exists x_1, x_2 \in R_+^n \mid \Phi_1(x_1) \geq 1, \\ &\Phi_2(x_2) \geq 1, \quad x_1 + x_2 \leq x\} \Leftrightarrow \exists x_1 \in D(\Phi_1), x_2 \in D(\Phi_2) \mid, \\ &x_1 + x_2 \leq x\} \Leftrightarrow \exists x_1 \in D(\Phi_1), x_2 \in D(\Phi_2) \mid x_1 + x_2 = x\}. \end{aligned} \quad (47)$$

Это означает, что множество $D(S)$ состоит из тех и только тех точек, которые могут быть представлены как сумма точек из $D(\Phi_1)$ и $D(\Phi_2)$ т. е. $D(S) = D(\Phi_1) + D(\Phi_2)$. Отсюда получаем

$$S^*(p) = \min_{x \in D(S)} px = \min_{\substack{x_1 \in D(\Phi_1) \\ x_2 \in D(\Phi_2)}} p(x_1 + x_2) = \\ = \Phi_1^*(p) + \Phi_2^*(p), \quad p \in R_+^n,$$

и (33) доказано. Равенство (34) следует из (33) как вариант обшей теоремы Моро – Рокафеллара [7].

4. Доказательство леммы 2. Для любых x_t, p имеем из (26) $px_i \geq \Phi_i(x_i)\Phi_i^*(p) \quad i = 1, 2.$

Складывая эти равенства для РС-дележа, удовлетворяющего равенствам (32), получим с учетом (33)

$$px \geq S(x)(\Phi_1^*(p) + \Phi_2^*(p)) = S(x)S^*(p) \ \forall x, p. \quad (48)$$

По условию леммы $p \in N_x(S)$, поэтому в (48) имеет место равенство, но оно возможно только в том случае, если в (47) – также равенства, что и требуется.

5. Доказательство утверждения 3. Оно опирается на следующую вспомогательную лемму.

Лемма 3. Пусть функция $\Phi \in \hat{W}$ и четверка векторов $p, z, q, y \in R_+^n$ связаны соотношениями $а) q = \arg_{q' \in \omega^*(p)} \max \Phi^*(q') \quad б) q = \arg_{y' \in \omega(z)} \max \Phi^*(y')$ в) векторы *z* и *p* (ГФ) – взаимны.

Тогда

1) $pz = qy$, 2) *y* и *q* *Ф*-взаимны.

Доказательство. Из а), б) следует $\Gamma^* \Phi^*(p) = \Phi^*(q), \ \Gamma\Phi(z) = \Phi(y)$. Затем, в силу в), (38), (26), имеем

$$pz = (\Gamma\Phi)^*(p)\Gamma\Phi(z) = \Gamma^*\Phi^*(p)\Phi(y) = \\ = \Phi^*(q)\Phi(y) \leq qy. \quad (49)$$

Но согласно (37) $\{q \in \omega^*(p), y \in \omega(z)\} \Rightarrow \Rightarrow qy \leq pz.$

Эти два противоположных неравенства означают равенство 1). Поскольку при этом в правой части (49) тоже равенство, то в силу (31) справедливо 2). Лемма доказана.

Переходим к основной части. Достаточно доказать справедливость индуктивной импликации $\{(x_t, p_t)$ I-взаимны$\} \Rightarrow \{(c_t, p_t)$ - взаимны; $\{(x_{t+1}, p_{t+1})$ I-взаимны и выполнено равенство (41)$\}$. (50)

Начало индукции обеспечено условием (x_0, p_0) I-взаимности.

Итак, пусть (x_t, p_t) I-взаимны. Разбиение $x_t = c_t + z_t$, где $z_t := x_t - c_t$ образует PC-дележ для оператора (35), ибо $\{x_t, c_t\}$ – PC-траектория. Поэтому в силу леммы 2 c_t U-взаимно с p_t и z_t I-взаимно с p_t. Кроме того, по построению траекторий для четверки векторов $p = p_t$, $z = z_t$ $q = p_{t+1}$, $y = x_{t+1}$ и функции $\Phi = I$ выполнены все условия леммы 3, применяя которую, приходим к (50). Доказательство закончено.

Литература

1 Миненко С.Н., Казаков О.Л., Смирнов Г.Б. Экономико-математическое моделирование. М: МГИУ, 2016. 136 с.

2 Светуньков С.Г., Светуньков И.С. Производственные функции комплексных переменных: Экономико-математическое моделирование производственной динамики. М.: Ленанд, 2019. 170 с.

3 Стронгин Р. Г. Исследование операций. Модели экономического поведения. М.: Интернет-университет информационных технологий, Бином. Лаборатория знаний, 2016. 208 с.

4 Токарев, В. В. Модели и решения. Исследование операций для экономистов, политологов и менеджеров. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018. 408 с.

5 Редькин Г.М. Нестационарное анизотропное математическое моделирование неоднородностей систем минерального сырья. М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2017. 500 с.

6 Лапшина М.Л., Лапшин Д.Д., Князев А.В., Писарева С.В. и др. Моделирование ситуации неплатежей на основе средств дифференциального исчисления в системе интеграции предприятий // МОИТ. 2019. Т. 7. № 3.

7 Лукина О.О. Комплексный подход к развитию инновационной деятельности с учетом синергетического эффекта // Вестник ВГУИТ. 2018. № 3. С. 423-428.

8 Иванов С. А. Моделирование процессов коммуникации в научном сообществе. Устойчивые статистические распределения в коммуникационных системах. М.: Либроком, 2016. 120 с.

9 Дубина И.Н. Основы теории экономических игр. М.: Огни, 2015. 304 с.

10 Бродецкий Г.Л., Гусев Д.А. Экономико-математические методы и модели в логистике. Процедуры оптимизации. М.: Academia, 2017. 288 с.

11 Юдович В.И. Математические модели естественных наук. М.: Лань, 2015. 336 с.

12 Prebisch R. Towards a dynamic development policy for Latin America //ECLAC Thinking, Selected Texts (1948-1998). Santiago: ECLAC, 2016. P. 255-275.

13 Dagger T.S., Sweeney J.C., Johnson L.W. A hierarchical model of health service quality: scale development and investigation of an integrated model // Journal of service research. 2007. V. 10. №. 2. P. 123-142.

14 Petrick J. F. Development of a multi-dimensional scale for measuring the perceived value of a service // Journal of leisure research. 2002. V. 34. №. 2. P. 119-134.

15 Schweizer M., Kotouc A.J., Wagner T. Scale development for consumer confusion // Advances in consumer Research. 2006. V. 33. № 1. P. 184-190.

16 Forsythe S. et al. Development of a scale to measure the perceived benefits and risks of online shopping // Journal of interactive marketing. 2006. V. 20. №. 2. P. 55-75.

References

1. Minenko S.N., Kazakov O.L., Smirnov G.B. Economic and mathematical modeling. Moscow, MGIU, 2016. 136 p. (in Russian).

2. Svetunkov S.G., Svetunkov I.S. Production functions of complex variables: Economic and mathematical modeling of production dynamics. Moscow, Lenand, 2019. 170 p. (in Russian).

3. Strongin R. G. Research operations. Models of economic behavior. M.oscow, Internet University of Information Technology, Binom. Knowledge Laboratory, 2016. 208 p. (in Russian).

4. Tokarev VV Models and solutions. Operational research for economists, political scientists and managers. Moscow, FIZMATLIT, 2018 .408 p. (in Russian).

5. Redkin G.M. Unsteady anisotropic mathematical modeling of heterogeneities of mineral raw materials systems. Moscow, Publishing house of the Association of construction universities, 2017. 500 p. (in Russian).

6. Lapshina M.L., Lapshin D.D., Knyazev A.V., Pisareva S.V. Modeling the situation of non-payments on the basis of differential calculus in the system of enterprise integration. MOIT. 2019. vol. 7. no. 3. (in Russian).

7. Lukina O.O. An integrated approach to the development of innovative activities, taking into account the synergistic effect. Proceedings of VSUET. 2018. no. 3. pp. 423-428. (in Russian).

8. Ivanov S.A. Modeling of communication processes in the scientific community. Stable statistical distributions in communication systems. Moscow, Librocom, 2016. 120 p. (in Russian).

9. Dubina I.N. Fundamentals of the theory of economic games. Moscow, Ogni, 2015. 304 p. (in Russian).

10. Brodetsky G.L., Gusev D.A. Economic and mathematical methods and models in logistics. Optimization Procedures. Moscow, Academia, 2017. 288 p. (in Russian).

11. Yudovich V. I. Mathematical models of natural sciences. Moscow, Lan', 2015. 336 p. (in Russian).

12. Prebisch R. Towards a dynamic development policy for Latin America. ECLAC Thinking, Selected Texts (1948-1998). Santiago: ECLAC, 2016. pp. 255-275.

13. Dagger T.S., Sweeney J.C., Johnson L.W. A hierarchical model of health service quality: scale development and investigation of an integrated model. Journal of service research. 2007. vol. 10. no. 2. pp. 123-142.

14. Petrick J. F. Development of a multi-dimensional scale for measuring the perceived value of a service. Journal of leisure research. 2002. vol. 34. no. 2. pp. 119-134.

15. Schweizer M., Kotouc A.J., Wagner T. Scale development for consumer confusion. Advances in consumer Research. 2006. vol. 33. no. 1. pp. 184-190.

16. Forsythe S. et al. Development of a scale to measure the perceived benefits and risks of online shopping. Journal of interactive marketing. 2006. vol. 20. no. 2. pp. 55-75.

Сведения об авторах

Марина Л. Лапшина д.т.н., профессор, кафедра автоматизации производственных процессов, Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, ул. Тимирязева, 8, г. Воронеж, 394087, Россия, marina_lapshina@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-5057-1069

Оксана О. Лукина к.э.н., доцент, кафедра теории экономики и учетной политики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, пр-т Революции, 19, г. Воронеж, 394036, Россия, oks.lukina@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-2658-1512

Дмитрий Д. Лапшин к.т.н., доцент, кафедра математики, информационных систем и технологий, ГУМРФ имени адмирала С.О. Макарова, Ленинский пр-т, 174л, г. Воронеж, 394033, Россия, lapshin_vrn@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-5412-3434

Светлана В. Будкова к.э.н., доцент, кафедра экономики и менеджмента, ГУМРФ имени адмирала С.О. Макарова, Ленинский пр-т, 174л, г. Воронеж, 394033, Россия, marina_lapshina@mail.ru

Information about authors

Marina L. Lapshina Dr. Sci. (Engin.), professor, automation of production processes department, Voronezh State Forestry University named after G.F. Morozova, st. Timiryazev, 8, Voronezh, 394087, Russia, marina_lapshina@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-5057-1069

Oksana O. Lukina Cand. Sci. (Econ.), associate professor, theory of economics and accounting policy department, Voronezh State University of Engineering Technologies, Revolution Avenue, 19, Voronezh, 394036, Russia, oks.lukina@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-2658-1512

Dmitriy D. Lapshin Cand. Sci. (Engin.), associate professor, mathematics, information systems and technologies department, GUMRF named after Admiral S.O. Makarova, Leninsky Prospect, 174L, Voronezh, 394033, Russia, lapshin_vrn@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-5412-3434

Svetlana V. Budkova Cand. Sci. (Econ.), associate professor, economics and management department, GUMRF named after Admiral S.O. Makarova, Leninsky Prospect, 174L, Voronezh, 394033, Russia, marina_lapshina@mail.ru

Вклад авторов

Все авторы в равной степени принимали участие в написании рукописи и несут ответственность за плагиат

Contribution

All authors are equally involved in the writing of the manuscript and are responsible for plagiarism

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила 12/05/2020 **После редакции** 21/05/2020 **Принята в печать** 29/05/2020

Received 12/05/2020 **Accepted in revised** 21/05/2020 **Accepted** 29/05/2020