

УДК 66.011

Профессор Ю.И. Шишацкий, инженер С.Ю. Плюха,  
аспирант С.С. Иванов  
(Воронеж. гос. ун-т инж. технол.) кафедра промышленной энергетики.  
тел. (473) 279-98-22  
E-mail: d.pluxa@yandex.ru

Professor Yu.I. Shishatskii, engineer S.Yu. Plyukha,  
graduate S.S. Ivanov  
(Voronezh state university of engineering technologies) Department of industrial energetic.  
phone (473) 279-98-22  
E-mail: d.pluxa@yandex.ru

## Построение математической модели экстрагирования подсырной сывороткой из люпина в форме пластины

## Creation of mathematical model of extraction by cheese whey from a lupine in the form of a plate

*Реферат.* Изложены предпосылки для построения модели. При постановке задачи обосновано рассмотрение частицы люпина как неограниченной пластины. Сформулированы основные допущения, выписаны краевые условия. Получены частичные решения дифференциального уравнения, а также общее решение для текущего значения концентрационного напора  $C'(x,y)$ . Распределение концентрации является симметричным относительно оси ординат. Выписано конечное выражение для поля концентраций при экстрагировании плоской пластины в безразмерном виде. Показано, что распределение концентрации достаточно точно описывается первым членом ряда. Сделан вывод, что для любого момента времени при заданных граничных условиях поле концентраций имеет вид симметричной кривой с максимумом на оси пластины ( $X=0$ ). Для каждого последующего момента времени будет своя кривая, монотонно убывающая к поверхности пластины. Доказано, что возможно определить характер изменения концентрации в теле при заданном значении  $Bi_m$ . Рассмотрен случай, когда  $Bi_m$  стремится к бесконечности при заданных физических параметрах, толщине пластины и организации высокой интенсивности отвода экстрактивных веществ от поверхности. Для этого случая получены уравнения относительно безразмерной концентрации и числа Фурье. Выписано также уравнение для определения конечного времени экстрагирования. Показано, что полученные решения уравнений модели находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными.

*Summary.* Prerequisites for creation of model are stated. At a problem definition consideration of a particle of a lupine as unlimited plate is proved. The main assumptions are formulated, regional conditions are written out. Partial solutions of the differential equation, and also the common decision for the current value of a concentration pressure  $C'(x,y)$ . Distribution of concentration is symmetric concerning ordinate axis. Final expression for a field of concentration at extraction of a flat plate in a dimensionless look is written out. It is shown that distribution of concentration is rather precisely described by the first member of a row. The conclusion is drawn that for any timepoint under the set boundary conditions the field of concentration has an appearance of a symmetric curve with a maximum on a plate axis ( $X=0$ ). For each subsequent timepoint there will be the curve which is monotonously decreasing to a plate surface. It is proved that it is possible to define nature of change of concentration in a body at a preset value the case when strives for infinity at the set physical parameters, thickness of a plate and the organization of high intensity of branch of extractive substances from a surface is considered. For this case the equations of rather dimensionless concentration and Fourier's number are received. Also the equation for definition of final time of extraction is written out. It is shown that the received solutions of the equations of model are found in a good consent with experimental data.

*Ключевые слова:* математическая модель, плоская неограниченная пластина, кривая изменения концентрации.

*Keywords:* mathematical model, flat unlimited plate, concentration change curve.

Предпосылками для построения модели послужило следующее:

1. Исследование кинетики процесса извлечения экстрактивных веществ из частиц люпина в форме сферы, цилиндра и пластины показало предпочтительность последней формы: выход целевого компонента был выше [3]. Это обусловило выбор формы частицы для математического описания процесса экстрагирования.

2. Люпин как материал растительного происхождения с клеточной структурой считаем изотропным, то есть с однородной структурой и одинаковой диффузионной проводимостью во всех направлениях. При этом  $d \ll l$ , где  $d$  – размер клетки;  $l$  – определяющий размер тела.

Сформулируем задачу. Частица люпина рассматривается как неограниченная пластина, поскольку её ширина  $b$  и длина  $l$  существенно превышают толщину  $\delta$ :  $b/\delta = 5$ ;  $l/\delta = 10$ . В этом случае неограниченная пластина представляет собой тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями, и в ней устанавливается одномерный диффузионный поток в направлении минимального размера.

Общая площадь поверхности частицы  $F_{\text{поверх}} = 2F_1 + 2F_2 + 2F_3$ , где  $F_1, F_2$  – площади торцевых поверхностей по длине и ширине;  $F_3$  – площадь боковой поверхности. В этом случае  $(2F_1 + 2F_2)/(2F_1 + 2F_2 + 2F_3) = 0,23$ , а отношение  $\delta/l = 0,1$ . С учётом изложенного размерность области решения задачи может быть понижена.

Итак, в одномерной постановке задачи дифференциальное уравнение молекулярной диффузии запишется в виде [7]

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где  $C$  – текущая концентрация диффундирующего вещества в порах, кг/м<sup>3</sup>;  $\tau$  – время, с;  $D$  – коэффициент диффузии, м<sup>2</sup>/с;  $x$  – координата, м.

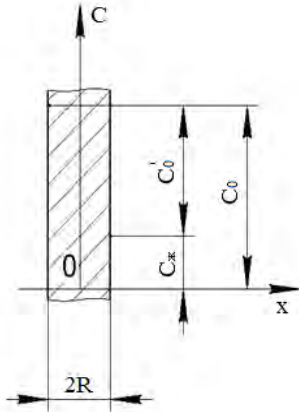


Рисунок 1. К концентрации окружающей среды и плоской неограниченной пластины (при  $\tau = 0$ ; задано  $C_0 = const$  и  $C_0' = const$ )

Дадим пояснения к рисунку 1:  $C_0, C_{\text{ж}}$  – концентрация в порах в начальный момент времени и концентрация окружающей среды, кг/м<sup>3</sup>;  $2R$  – толщина пластины, м.

Запишем значения начального  $C_0'$  и текущего  $C'$  концентрационных напоров (кг/м<sup>3</sup>):  $C_0' = C_0 - C_{\text{ж}}$ ;  $C' = C - C_{\text{ж}}$ . Тогда безразмерная избыточная концентрация  $\Theta = C'/C_0'$ .

Сформулируем допущения. В начальный момент ( $\tau = 0$ ) концентрация в пластине распределена равномерно и равна  $C = C_0 = const$ . Концентрация окружающей среды постоянна

$C_{\text{ж}} = const$ . На обеих поверхностях отвод экстрактивных веществ осуществляется при постоянном во времени коэффициенте массоотдачи  $\beta = const$ . Отсчет концентрации пластины для любого момента времени проводится от концентрации окружающей среды. Изменение концентрации происходит только по координате  $Ox$ .

Тогда уравнение (1) запишется иначе:

$$\frac{\partial C'}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 C'}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Формулировка начальных условий при ( $\tau = 0$ ) очевидна:

$$C' = C'_0 = C_0 - C_{\text{ж}}; \quad \mu(x, 0) = \mu_0, \quad (3)$$

где  $\mu$  – вязкость жидкости в капилляре, Па·с;  $\mu_0$  – химический потенциал, соответствующий концентрации  $C_0$ .

При заданных условиях процесса экстрагирования задача становится симметричной и начало координат целесообразно поместить на оси пластины (рисунок 1).

Не вызывает сомнения постановка граничных условий на оси и на поверхности пластины, которые записываются в виде:

$$\begin{cases} x = 0; \quad \left(\frac{\partial C'}{\partial x}\right)_{x=0} = 0, \\ x = R; \quad \left(\frac{\partial C'}{\partial x}\right)_{x=R} = -\frac{\beta}{\lambda_m} C'_{x=R}. \end{cases} \quad (4)$$

Первое условие характеризует отсутствие концентрационного потока, второе – массоотдачу с поверхности.

В уравнениях (4):  $\beta$  – коэффициент массоотдачи, м/с;  $\lambda_m$  – коэффициент массопроводности, м<sup>2</sup>/с.

Уравнение (2) в совокупности с краевыми условиями (3) и (4) однозначно формулируют задачу: найти распределение концентрации по толщине пластины в любой момент времени.

Приведем решение задачи поставленной задачи. Решение дифференциального уравнения (2) ищем в виде произведения двух функций, из которых одна выписана как функция  $\tau$ , а другая – как  $\delta$ , то есть:  $C' = C'(\tau, x) = \varphi(\tau) \cdot \psi(x)$  [1].

Подстановка и разделение переменных позволяют записать:

$$\varphi'(\tau) + Dk^2\varphi(\tau) = 0; \quad \psi''(x) + k^2\psi(x) = 0,$$

где  $\varphi(\tau), \psi(x)$  – переменные;  $k$  – постоянные.

После интегрирования частные решения запишутся в виде:

$$\varphi(\tau) = C_1 e^{-Dk^2\tau}; \quad \psi(x) = C_2 \sin(kx) + C_3 \cos(kx).$$

Тогда общее решение уравнения (2) принимает вид:

$$C'(x, \tau) = [C_2 \sin(kx) + C_3 \cos(kx)] \cdot C_1 e^{-Dk^2\tau} \quad (5)$$

Распределение концентрации является симметричным относительно оси ординат, следовательно, должно описываться чётной функцией  $f(x) = f(-x)$ . Такой функцией является  $\cos(kx)$ , а  $\sin(kx)$  есть нечётная функция  $x$  и поэтому исключается из решения [5].

Уравнение (5) удовлетворяет исходному (2) при любых значениях постоянных  $C_1, C_2, C_3$  и  $k$ .

В результате решения характеристического уравнения  $ctg\mu = \frac{\mu}{Bi_m}$ , где  $\mu = kR$  с

учётом граничных условий (4) получим систему уравнений, в которой каждому найденному значению корня  $\mu$ , будет соответствовать своё частное распределение концентрации:

$$\left\{ \begin{array}{l} C'_1 = A_1 \cos\left(\mu_1 \frac{x}{R}\right) e^{-\mu_1^2 \frac{D\tau}{R^2}}; \\ C'_2 = A_2 \cos\left(\mu_2 \frac{x}{R}\right) e^{-\mu_2^2 \frac{D\tau}{R^2}}; \\ \dots\dots\dots \\ C'_n = A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{D\tau}{R^2}}. \end{array} \right. \quad (6)$$

Частные решения (6) будут удовлетворять дифференциальному уравнению при любых значениях постоянных  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , однако ни одно из этих решений не будет соответствовать действительному распределению концентрации в начальный момент времени. Поэтому путем наложения бесконечного числа таких распределений при соответствующем выборе величин  $A_n$  представляется возможным воспроизвести любую действительную концентрационную зависимость в начальный момент времени. С учётом изложенного общее решение выражается суммой бесконечного ряда всех частных решений:

$$C' = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{D\tau}{R^2}}.$$

Применяя разложение частной функции в ряд Фурье и опуская промежуточные рассуждения, из начальных условий (3) определяются выражения для постоянной  $A_n$ :

$$A_n = C' \frac{2 \sin \mu_n}{(\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n)}. \quad (7)$$

Видно, что  $A_n$  является только функцией корней характеристического уравнения, которые, в свою очередь, являются функцией массообменного критерия Био.

Запишем конечное выражение для поля концентраций при экстрагировании из плоской пластины:

$$\Theta = \sum_{n=0}^{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sin \mu_n}{(\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n)} \cos(\mu_n X) \exp(-\mu_n^2 Fo_m). \quad (8)$$

Уравнение (8) даёт возможность получить значение концентрации в любой точке пластины для любого момента времени.

Проведем анализ полученного решения. Поскольку  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  представляет собой ряд возрастающих чисел, то чем больше  $\mu$ , тем меньше роль последующего члена ряда по сравнению с предыдущим. В то же время, чем больше число  $Fo_m$ , тем члены ряда будут убывать быстрее с увеличением номера  $n$ .

Большим числом исследований [2, 4, 6] показано, что уже при  $Fo_m \geq 0,3$  ряд становится настолько быстросходящимся, что распределение концентрации достаточно точно описывается первым членом ряда:

$$\Theta = \frac{2 \sin \mu_1}{(\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1)} \cos(\mu_1 X) \exp(-\mu_1^2 Fo_m). \quad (9)$$

Обозначим  $D_1 = \frac{2 \sin \mu_1}{(\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1)}$ .

Величина  $D_1$  является только функцией числа  $Bi_m$  и заранее может быть рассчитана и табулирована. Кроме того, если рассматривать концентрацию для определенных значений безразмерной координаты, например, для оси и поверхности пластины ( $X = 0$  и  $X = 1$ , соответственно), то второй множитель уравнения (9) тоже зависит только от числа  $Bi_m$ . Тогда решение имеет вид:

$$\Theta_{X=0} = N(Bi_m) \exp(-\mu_1^2 Fo_m); \quad (10)$$

$$\Theta_{X=1} = P(Bi_m) \exp(-\mu_1^2 Fo_m). \quad (11)$$

Функции  $N(Bi_m)$  и  $P(Bi_m)$  заранее рассчитаны и представлены в справочниках в виде таблиц в зависимости от числа  $Bi_m$ , а безразмерные избыточные концентрации для оси и поверхности пластины могут быть построены в виде номограмм. С этой целью следует прологарифмировать уравнения (10) и (11), тогда они будут представлять собой семейство прямых линий:

$$\ln \Theta_{X=0} = \ln N(Bi_m) - \mu_1^2 Fo_m, \quad (12)$$

$$\ln \Theta_{X=1} = \ln P(Bi_m) - \mu_1^2 Fo_m. \quad (13)$$

Как следует из (9), для любого момента времени при заданных граничных условиях поле концентрации имеет вид симметричной кривой с максимумом на оси пластины ( $X=0$ ). Для каждого последующего момента времени будет своя кривая, монотонно убывающая к

поверхности пластины. При этом касательные к кривым в точках поверхности ( $X = \pm 1$ ) проходят через две направляющие точки  $+A$  и  $-A$ , расположенные на расстоянии  $\pm X_0$  от поверхности пластины,  $X_0 = 1/Bi_m$ .

Проведём доказательство этого важного свойства, для чего рассмотрим поле концентраций для произвольного момента времени  $Fo_m > 0$ . Умножив граничное условие (4) на  $R/C'_0$  при  $x = \pm R$ , получим:

$$-\left[ \frac{\partial \left( \frac{C'}{C'_0} \right)}{\partial \left( \frac{x}{R} \right)} \right]_{x=R} = \frac{\beta R}{\lambda_m} \left( \frac{C'}{C'_0} \right)_{x=R}.$$

В безразмерных переменных имеем:

$$\left( \frac{\partial(\Theta)}{\partial(X)} \right)_{X=1} = -Bi_m \Theta_{X=1}.$$

Тогда:

$$-\left( \frac{\partial(\Theta)}{\partial(X)} \right)_{X=1} = \frac{\Theta_{X=1}}{X_0} = tg \varphi, \quad X_0 = \frac{1}{Bi_m}. \quad (14)$$

Таким образом, касательные ко всем концентрационным кривым в точке пересечения с поверхностью пластины и при неизменных граничных условиях всегда будут проходить через точку  $A$ . Тогда возможно определить характер изменения концентрации в теле при заданном значении массообменного числа  $Bi_m$ .

Рассмотрим случай, когда  $Bi_m$  стремится к бесконечности. Тогда концентрация поверхности пластины теоретически сразу становится равной концентрации окружающей среды, в которую помещена пластина. Это следует из уравнения (14): при  $Bi_m$ , стремящемся к бесконечности,  $X_0 = 1/Bi_m = 0$ . Следовательно, точка пересечения касательных к концентрационным кривым находится на поверхности пластины. Из  $Bi_m = (R/\lambda_m)/(1/\beta)$  следует:  $Bi_m$  стремится к бесконечности при заданных физических параметрах и толщине пластины тогда, когда  $\beta$  стремится к бесконечности, то есть когда организована высокая интенсивность отвода экстрактивных веществ от поверхности. В нашем случае эффект достигается с помощью низкочастотных механических колебаний и тогда процесс экстрагирования определяется физическими свойствами и размерами частиц люпина. При этом  $\mu_n = (2n-1)(\pi/2)$ , а коэффициент ряда описывается уравнением (9):

$$D_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)}.$$

Тогда решение задачи будет иметь вид:

$$\Theta = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} \cos \left( (2n-1) \frac{\pi}{2} X \right) \cdot \exp \left[ - \left( \frac{2n-1}{2} \right)^2 \pi^2 Fo_m \right], \quad (15)$$

а уравнение с концентрацией экстрактивных веществ на оси пластины ( $X=0$ ) примет вид:

$$\Theta_{X=0} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} \exp \left[ - \left( \frac{2n-1}{2} \right)^2 \pi^2 Fo_m \right]. \quad (16)$$

При  $X=1$   $\Theta_{X=1}=0$ , поскольку:

$$\cos \left( (2n-1) \frac{\pi}{2} X \right) = 0.$$

Ранее было отмечено, что при  $Fo_m \geq 0,3$  ряд (9) быстро сходится и ошибка не превышает 1 %, если отбросить все члены ряда, кроме первого. При этих условиях уравнение (16) можно переписать так:

$$\Theta_{X=0} = \frac{4}{\pi} \exp \left[ - \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 Fo_m \right]. \quad (17)$$

После логарифмирования уравнения (17) и решения его относительно числа Фурье, имеем:

$$Fo_m = \frac{4}{\pi^2} \ln \left( \frac{4}{\pi} \frac{1}{\Theta_{X=0}} \right). \quad (18)$$

Конечное время экстрагирования  $\tau_\kappa$ , то есть продолжительность процесса, получаем, учитывая, что  $Fo_m = D\tau/R^2$ :

$$\tau_\kappa = \left( \frac{2R}{\pi} \right)^2 \frac{1}{D} \ln \left( \frac{4}{\pi} \frac{1}{\Theta_{X=0}} \right). \quad (19)$$

Покажем, что модель адекватна экспериментальным данным.

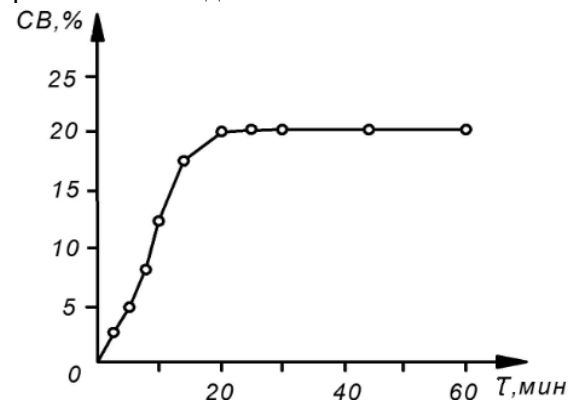


Рисунок 2. Зависимость извлечения экстрактивных веществ из люпина подсырной сывороткой от времени при параметрах механических колебаний: частота колебаний 50 Гц, амплитуда 10 мм,  $t = 50$  °С, форма частицы люпина - пластина, – расчёт.

Из рисунка 2 видно, что полученные решения уравнений модели находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. 632 с.
- 2 Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М.: АСТ Астрель, 2006. 991 с.
- 3 Иванов С.С., Шишацкий Ю.И., Плюха С.Ю. Кинетика извлечения экстрактивных веществ из люпина // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. 2014. №1. С. 36-39.
- 4 Лобасова М.С., Финников К.А., Миллоvidoва Т.А. Теплообмен [Электронный ресурс]. Красноярск: ИПК СФУ, 2009. 295 с.
- 5 Холодниок М., Клич М., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных математических моделей. М.: Мир, 1991. 398 с.
- 6 Островский Г.М. Новый справочник химика и технолога. Процессы и аппараты химических технологий, Ч. 2. СПб.: НПО «Профессионал», 2006. 916 с.
- 7 Романков П.Г., Фролов В.Ф. Массообменные процессы химических технологий (системы с дисперсной твердой фазой). Л.: Химия, 1990. 384 с.

REFERENCES

- 1 Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. Chislennyye metody [Numerical's boosters methods]. Moscow, Laboratoriya bazovyykh znaniy, 2001. 632 p. (In Russ.).
- 2 Vygodskii M.Ya. Spravochnik po vysshei matematike [Directory on higher mathematics]. Moscow: AST, Astrel', 2006. 991 p. (In Russ.).
- 3 Ivanov S.S., Shishatskii Yu.I., Pluykha S.Yu. Kinetic of extraction extracts substances from lupin. *Vestnik VGUIT*. [The bulletin of the Voronezh state university of engineering technologies], 2014, no. 1, pp. 36-39. (In Russ.).
- 4 Lobasova M. S., Finnikov K.A., Millovidova T.A. Teplomassoobmen [Heat and mass transfer]. Krasnoyarsk, IPK SFU, 2009. 295 p. (In Russ.).
- 5 Holodniok M., Klich M., Kubichek M., Marek M. Metody analiza nelineynykh matematicheskikh modelei [Methods of the analysis of nonlinear mathematical models]. Moscow, Mir, 1991. 398 p. (In Russ.).
- 6 Ostrovskii M. Novyi spravochnik khimika i tekhnolog. Protsessy i apparaty khimicheskikh tekhnologii [The new directory of the chemist and the technologist. Processes and devices of chemical technologies]. Saint-Petersburg, NPO «Professional», 2006. 916 p. (In Russ.).
- 7 Romankov P.G., Frolov V.F. Massoobmennyye protsessy khimicheskikh tekhnologii (sistemy s dispersnoi tverdoi fazoi) [Mass exchange processes of chemical technologies (system with a disperse firm phase)]. Leningrad, Khimiya, 1990. 384 p. (In Russ.).