УДК 62-278 : 621.184.64

Профессор Х.Р. Блягоз, профессор А.А. Схаляхов,
(Майкопский гос. технол. ун-т) кафедра технологий, машин и оборудования пищевых производств, тел. (8772) 57-00-11
профессор Е.П. Кошевой, доцент А.Г. Верещагин
(Кубанский гос. технол. ун-т) кафедра машин и аппаратов пищевых производств, тел. (861) 275-22-79

Описание сопряженной задачи теплообмена в половолоконных мембранах

Рассмотрена постановка задачи теплопереноса от ламинарного потока жидкости внутри половолоконной трубы к наружным стенкам, интенсивно охлаждаемым внешней средой для случая, когда конвективный перенос тепла внутри потока сопоставим с тепловым сопротивлением стенок трубы.

In this article the formulation of the problem of heat transfer from the laminar flow of fluid within the hollow-tube to the outer walls, intensely cooled by the external environment for the case when the convective heat transfer within the flow is comparable to the thermal resistance of the pipe walls has been considered.

Ключевые слова: мембрана, теплообмен, жидкость, стенка, сопряженная задача переноса.

Теплообменники с использованием непроницаемых полипропиленовых половолоконных мембран [1] имеют высокую удельную поверхность теплообмена и могут эффективно применяться в некоторых областях промышленности. Однако низкая теплопроводность и соотношение размера отверстия и толщины стенки мембран оказывает существенное влияние на описание процесса теплообмена.

Поставлена задача переноса тепла от ламинарного потока жидкости внутри трубы к наружным стенкам трубы, интенсивно охлаждаемым внешней средой для случая, когда размеры потока текущей жидкости сопоставимы с размерами трубы, а конвективный перенос тепла внутри потока сопоставим с тепловым сопротивлением стенок трубы.

В данном случае рассматривается задача описания теплопереноса в потоке и стенке трубы как сопряженная. В этом случае перенос тепла в жидкости описывается следующим дифференциальным уравнением конвективного переноса [2]:

$$\frac{\partial T_{\text{ж}}(r,x,\tau)}{\partial \tau} + w_{\text{ж}}(r)\cdot\frac{\partial T_{\text{ж}}(r,x,\tau)}{\partial x} = a_{\text{ж}}\cdot\left[\frac{\partial^2 T_{\text{ж}}(r,x,\tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial T_{\text{ж}}(r,x,\tau)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_{\text{ж}}(r,x,\tau)}{\partial x^2}\right], \quad (1)$$

где $w_{\text{ж}}(r)$ – скорость потока жидкости в трубе в направлении x движения жидкости. В случае установившегося ламинарного гидродинамического режима эта величина определяется уравнением

$$w_{\text{ж}} = \frac{P_{\text{нач}} - P_{\text{кон}}}{4\cdot\mu_{\text{ж}}\cdot L_{\text{тр}}}\cdot\left(R_{\text{тр}}^2 - r^2\right), \quad (2)$$

где $P_{\text{нач}}$ и $P_{\text{кон}}$ – давления соответственно в начальном и конечном сечениях; $\mu_{\text{ж}}$ – динамическая вязкость жидкости; $L_{\text{тр}}$ – длина трубы.

Переменные r и x меняются в пределах области существования решения по x ($0 \le x \le L_{\text{тр}}$) и по r ($0 \le r \le R_{\text{тр}}$).

Дифференциальное уравнение теплопроводности для полого цилиндра имеет вид [3]

$$\frac{\partial T_{\text{тр}}(r,x,\tau)}{\partial \tau} = a_{\text{тр}}\cdot\left[\frac{\partial^2 T_{\text{тр}}(r,x,\tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial T_{\text{тр}}(r,x,\tau)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_{\text{тр}}(r,x,\tau)}{\partial x^2}\right]. \quad (3)$$

В отличие от уравнения (1) в нем отсутствует конвективная составляющая, и область существования решения по радиусу r ограничена стенками трубы ($R_{\text{тр}} \le r \le R_{\text{ст}}$).

Для уравнения (1) имеет место граничное условие симметрии:

$$\frac{\partial T_{\text{ж}}(0,x,\tau)}{\partial r} = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) показывает, что имеет место осевая симметрия теплового поля относительно оси x, направление которой совпадает с направлением потока жидкости в трубе. Начальное условие для жидкости следующее:

$$T_{\text{æ}}\left(r,x,0\right)=T_{\text{í à÷}}. \qquad (5)$$

Уравнение (5) показывает, что в начальный момент времени жидкость в трубе нагрета до температуры среды ($T_{нач}$). Начальные условия для трубы соответствуют граничным условиям для жидкости внутри этой трубы:

$$T_{\text{òð}}\left(r,x,0\right)=T_{\text{í à÷}}. \qquad (6)$$

Из уравнения (6) следует, что стенки трубы в начальный момент времени имеют ту же температуру, что и жидкость внутри трубы. Это соответствует случаю, когда по трубе достаточно долго течет нагретая жидкость и температурное поле в жидкости и стенках трубы выравнивается.

Граничными условиями для трубы являются условия первого рода:

$$T_{\text{òð}}\left(R_{\text{ñò}},x,\tau\right)=T_{\text{êî í}}. \qquad (7)$$

Уравнение (7) показывает, что в начале переходного процесса поверхность трубы мгновенно охлаждается до температуры ($T_{кон}$). Условием сопряжения тепловых полей жидкости и стенки трубы считаем условие идеального теплового контакта, определяемое уравнениями равенства температур на границе:

$$T_{\text{òð}}\left(R_{\text{òð}},x,\tau\right)=T_{\text{æ}}\left(R_{\text{òð}},x,\tau\right). \qquad (8)$$

Тепловые потоки на внутренней поверхности трубы между трубой и жидкостью определяются уравнением:

$$\lambda_{\text{æ}}\cdot\frac{\partial T_{\text{æ}}\left(R_{\text{òð}},x,\tau\right)}{\partial r}=\lambda_{\text{òð}}\cdot\frac{\partial T_{\text{òð}}\left(R_{\text{òð}},x,\tau\right)}{\partial r}, \qquad (9)$$

где $\lambda_ж$ – коэффициент теплопроводности жидкости; $\lambda_{тр}$ – коэффициент теплопроводности трубы.

Для решения задачи (1)–(9) методом конечных разностей [4], который основан на замене производных их приближенным значением, выраженным через разности значений функций в отдельных дискретных точках – узлах сетки.

Вначале рассмотрим стационарное температурное поле, которое является предельным случаем задачи (1)–(9) при времени переходного процесса $\tau\to\infty$. В этом случае производные по времени обращаются в ноль.

Для потока жидкости в трубе это соответствует следующему соотношению:

$$w_{\text{æ}}\left(r\right)\cdot\frac{\partial T_{\text{æ}}\left(r,x\right)}{\partial x}=$$
$$=a_{\text{æ}}\cdot\left[\frac{\partial^2 T_{\text{æ}}\left(r,x\right)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial T_{\text{æ}}\left(r,x\right)}{\partial r}+\frac{\partial^2 T_{\text{æ}}\left(r,x\right)}{\partial x^2}\right]. \qquad (10)$$

Уравнение (10) получено из уравнения (1), и для его решения используются следующие граничные условия:

$$\frac{\partial T_{\text{æ}}\left(0,x\right)}{\partial r}=0. \qquad (11)$$

Уравнение (11) – условие симметрии.

$$T_{\text{æ}}\left(r,0\right)=T_{\text{í à÷}}. \qquad (12)$$

Уравнение (12) – поршневое течение жидкости на входе в трубу.

Для стенок трубы уравнение (3) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 T_{\text{òð}}\left(r,x\right)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial T_{\text{òð}}\left(r,x\right)}{\partial r}+\frac{\partial^2 T_{\text{òð}}\left(r,x\right)}{\partial x^2}=0. \qquad (13)$$

Граничным условием для этого уравнения является условие на внешней поверхности трубы:

$$T_{\text{òð}}\left(R_{\text{ñò}},x\right)=T_{\text{êî í}} \qquad (14)$$

На внутренней стенке трубы имеет место условие сопряжения, определяемое уравнениями, полученными из (8) и (9):

$$T_{\text{òð}}\left(R_{\text{òð}},x\right)=T_{\text{æ}}\left(R_{\text{òð}},x\right). \qquad (15)$$

Уравнение (15) – условие сопряжения тепловых полей

$$\lambda_{\text{æ}}\cdot\frac{\partial T_{\text{æ}}\left(R_{\text{òð}},x\right)}{\partial r}=\lambda_{\text{òð}}\cdot\frac{\partial T_{\text{òð}}\left(R_{\text{òð}},x\right)}{\partial r}. \qquad (16)$$

Уравнение (16) – условие сопряжения тепловых потоков на внутренней стенке трубы.

Таким образом, система уравнений (10)-(16) определяет стационарное температурное поле установившегося теплового режима сопряженной задачи теплопереноса между движущейся жидкостью и трубой, наружная стенка которой интенсивно охлаждается до конечной температуры внешней среды.

С практической точки зрения задача (10)-(16) интересна для расчета длины трубы, которая позволяет получить требуемую температуру охлаждения жидкости на выходе их аппарата. В этом случае определяем одномерную сетку по текущему радиусу (r). Для упрощения последующих выкладок узлы сетки определяем с равномерным шагом (Δh), значение которого определяется из условий сходимости и устойчивости явной схемы решения задачи. Дополнительным условием выбора шага сетки является положение одного из узлов сетки точно на границе жидкости и внутренней сетки трубы, а также последнего узла сетки на внешней поверхности трубы.

Рассмотрим пример численного решения задачи (10)-(16) для случая, когда число узлов сетки по оси течения потока изменяется от 0 до Max X ($0 \geq I \geq$ Max X) с шагом (Δx), где Max X – варьируемый параметр числа шагов, обеспечивающий требуемый нагрев жидкости. Число шагов по текущему радиусу изменяется от 0 до Max R ($0 \geq j \geq$ Max R), где Max R – варьируемый параметр числа шагов перпендикулярно оси потока от центра (0) к внешней стенке трубы (Max R). Положение внутренней стенки трубы определяется точкой (jR), для которой выполняются неравенства ($3 \geq jR >$ Max R). Минимальное число точек внутри потока жидкости равно трем, для корректного учета условий симметрии и сопряжения рассматриваемой задачи.

Рассмотрим разностные схемы этой стационарной задачи в области потока жидкости и стенки трубы.

В данном случае сетка определяется в пространстве решений по номерам узлов определяемым матрицей ($t_{i,j}$), где i =0,1,…,Max X; j=0,1,…,jR. Для внутренних узлов сетки разностный аналог уравнения (10) имеет вид:

$$w_{\text{æ}}(\Delta h\cdot j)\cdot\frac{t_{i+1,j}-t_{i-1,j}}{2\cdot\Delta x}-a_{\text{æ}}\cdot\frac{t_{i+1,j}-2\cdot t_{i,j}+t_{i-1,j}}{\Delta x^2}=$$
$$=a_{\text{æ}}\cdot\left[\frac{t_{i,j+1}-2\cdot t_{i,j}+t_{i,j-1}}{\Delta h^2}+\frac{1}{\Delta h\cdot j}\cdot\frac{t_{i,j+1}-t_{i,j-1}}{2\cdot\Delta h}\right]. \qquad (17)$$

С учетом (2) разностная схема (17) приобретает вид:

$$\frac{P_{\text{íà÷}}-P_{\text{êîí}}}{4\cdot\mu_{\text{æ}}\cdot L_{\text{òð}}}\left[R_{\text{òð}}^2-(\Delta h\cdot j)^2\right]\cdot\frac{t_{i+1,j}-t_{i-1,j}}{2\cdot\Delta x}-a_{\text{æ}}\cdot\frac{t_{i+1,j}-2\cdot t_{i,j}+t_{i-1,j}}{\Delta x^2}=$$
$$=a_{\text{æ}}\cdot\left[\frac{t_{i,j+1}-2\cdot t_{i,j}+t_{i,j-1}}{\Delta h^2}+\frac{1}{\Delta h\cdot j}\cdot\frac{t_{i,j+1}-t_{i,j-1}}{2\cdot\Delta h}\right] \qquad (18)$$

Разностная схема (18) определяет изменение температурного поля для внутренних узлов сетки потока жидкости. В то же время для точек на оси потока необходимо учесть условие симметрии (11). В этом случае в уравнении (10) слагаемое:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial T_{\text{æ}}(r,x)}{\partial r}=0\cdot \qquad (19)$$

Следовательно, с учетом (19) расчетная схема (18) для оси потока приобретает вид:

$$\frac{P_{\text{íà÷}}-P_{\text{êîí}}}{4\cdot\mu_{\text{æ}}\cdot L_{\text{òð}}}\left[R_{\text{òð}}^2-(\Delta h\cdot j)^2\right]\cdot\frac{t_{i+1,j}-t_{i-1,j}}{2\cdot\Delta x}-a_{\text{æ}}\cdot\frac{t_{i+1,j}-2\cdot t_{i,j}+t_{i-1,j}}{\Delta x^2}=$$
$$=a_{\text{æ}}\cdot\left[\frac{t_{i,j+1}-2\cdot t_{i,j}+t_{i,j-1}}{\Delta h^2}\right]. \qquad (20)$$

Для получения расчетной схемы с учетом условия симметрии (20) подставим в него индекс (j=0):

$$\frac{\left(P_{\text{íà÷}}-P_{\text{êîí}}\right)}{4\mu_{\text{æ}}L_{\text{òð}}}\cdot R_{\text{òð}}^2\frac{\left(t_{i+1,0}-t_{i-1,0}\right)}{2\Delta x}-$$
$$-a_{\text{æ}}\frac{\left(t_{i+1,0}-2t_{i,0}+t_{i-1,0}\right)}{\Delta x^2}=a_{\text{æ}}\cdot\left(\frac{2t_{i,1}-2t_{i,0}}{\Delta h^2}\right). \qquad (21)$$

На стенке трубы скорость потока жидкости равна нулю (условие «прилипания»), следовательно, в уравнении (18) при (j=jR) конвективный член отсутствует:

$$-\frac{t_{i+1,jR}-2t_{i,jR}+t_{i-1,jR}}{\Delta x^2}=$$
$$=\left(\frac{t_{i,jR+1}-2t_{i,jR}+t_{i,jR-1}}{\Delta h^2}+\frac{1}{\Delta h\times jR}\times\frac{t_{i,jR+1}-t_{i,jR-1}}{2\Delta h}\right). \qquad (22)$$

В уравнение (22) входят значения температурного поля границы ($t_{i,jR}$) и стенки трубы ($t_{i,jR+1}$). Эти величины должны учитывать условия сопряжения тепловых потоков (16). Для учета условия сопряжения используем разностную схему этого уравнения:

$$\lambda_{\text{ж}}\cdot\frac{t_{i,jR}-t_{i,jR-1}}{\Delta h}=\lambda_{\text{тр}}\cdot\frac{t_{i,jR+1}-t_{i,jR}}{\Delta h} \qquad (23)$$

Выражая из уравнения (23) температуру в точке ($t_{i,jR+1}$):

$$t_{i,jR+1}=\frac{\lambda_{\text{ж}}\cdot t_{i,jR}+\lambda_{\text{тр}}\cdot t_{i,jR}-\lambda_{\text{ж}}\cdot t_{i,jR-1}}{\lambda_{\text{тр}}} \qquad (24)$$

получаем расчетную схему для температурного поля в точке сопряжения:

$$-\frac{t_{i-1,jR}-2t_{i,jR}+t_{i+1,jR}}{\Delta x^2}=$$
$$=\frac{\left(t_{i,jR}-t_{i,jR-1}\right)\left(\lambda_{\text{æ}}+\lambda_{\text{òð}}+2jR\lambda_{\text{æ}}-2jR\lambda_{\text{òð}}\right)}{2jR\Delta h^2\lambda_{\text{òð}}}. \qquad (25)$$

Таким образом, уравнения (18), (21), и (25) образуют систему разностных уравнений для расчета температурного поля потока жидкости внутри трубы.

Для разностной схемы температурного поля стенок трубы сетка определяется в пространстве решений по номерам узлов, определяемым матрицей ($t_{i,j}$), где i=0,1,…,Max X; j=jR, jR+1,…,Max R. Для внутренних узлов сетки разностный аналог уравнения (13) имеет вид:

$$\frac{t_{i,j+1}-2t_{i,j}+t_{i,j-1}}{\Delta h^2}+\frac{1}{\Delta hj}\frac{t_{i,j+1}-t_{i,j-1}}{2\Delta h}+$$
$$+\frac{t_{i+1,j}-2t_{i,j}+t_{i-1,j}}{\Delta x^2}=0. \qquad (26)$$

Используем уравнение (26) для слоя на внутренней поверхности трубы ($j=jR$):

$$\frac{t_{i,jR+1}-2t_{i,jR}+t_{i,jR-1}}{\Delta h^2}+\frac{1}{\Delta hjR}\frac{t_{i,jR+1}-t_{i,jR-1}}{2\Delta h}+$$
$$+\frac{t_{i+1,jR}-2t_{i,jR}+t_{i-1,jR}}{\Delta x^2}=0. \qquad (27)$$

В уравнении (27) присутствует температура точки, находящейся в потоке жидкости ($t_{i,jR-1}$). Для ее аппроксимации используем уравнение (23), из которого выразим ($t_{i,jR-1}$):

$$\frac{t_{i-1,jR}-2t_{i,jR}+t_{i+1,jR}}{\Delta x^2}-\frac{\left(t_{i,jR}-t_{i,jR+1}\right)\left(\lambda_{\text{æ}}-\lambda_{\text{ðð}}\right)}{\Delta h^2\lambda_{\text{æ}}}-$$
$$-\frac{\left(t_{i,jR}-t_{i,jR+1}\right)\left(\lambda_{\text{æ}}+\lambda_{\text{ðð}}\right)}{2j\Delta h^2\lambda_{\text{æ}}}=0. \qquad (28)$$

Для упрощения дальнейших алгебраических преобразований без потери общности решаемой задачи нормируем температурные поля на отрезке (0…1). В этом случае $t_{0,j}=1$ для $j=0,1,2,3,\ldots$, Max R-1 и $t_{0,\text{Max}R}=0$ и уравнение (26) для внешней границы трубы (j=Max R-1) приобретет вид:

$$\frac{t_{i,\text{Max}R}-2t_{i,\text{Max}R-1}+t_{i,\text{Max}R-2}}{\Delta h^2}-\frac{t_{i,\text{Max}R}-t_{i,\text{Max}R-2}}{2\Delta h^2-2\text{Max}R\cdot\Delta h^2}+$$
$$+\frac{t_{i-1,\text{Max}R-1}+t_{i+1,\text{Max}R-1}-2t_{i,\text{Max}R-1}}{\Delta x^2}=0. \qquad (29)$$

Учитывая значение нормированного температурного поля на внешней границе трубы, имеем из (29) следующую расчетную схему:

$$\frac{0-2t_{i,\text{Max}R-1}+t_{i,\text{Max}R-2}}{\Delta h^2}-\frac{0-t_{i,\text{Max}R-2}}{2\Delta h^2-2\text{Max}R\cdot\Delta h^2}+$$
$$+\frac{t_{i-1,\text{Max}R-1}+t_{i+1,\text{Max}R-1}-2t_{i,\text{Max}R-1}}{\Delta x^2}=0. \qquad (30)$$

Таким образом, уравнения (26), (28), и (30) образуют систему разностных уравнений для расчета температурного поля стенки трубы.

В конечных разностях сформулирована задача сопряженного теплопереноса потока в трубчатой мембране.

ЛИТЕРАТУРА

1. Схаляхов, А.А. Теплообмен в теплообменниках с полимерными половолоконными мембранами [Текст] / А.А. Схаляхов, А.Г. Верещагин, В.С. Косачев, Е.П. Кошевой // Известия ВУЗов. «Пищевая технология». -2009. -№ 2-3.

2. Протодьяконов, И.О. Явления переноса в процессах химической технологии [Текст] / И.О. Протодьяконов, Н.А. Марцулевич, А.В. Марков. - Л.: Химия, 1981. – 264 с.

3. Лыков, А.В. Теория теплопроводности [Текст] / А.В. Лыков. - М.: Высшая школа, 1967. -600 с.

4. Самарский, А.А. Теория разностных схем [Текст] / А.А. Самарский. - М.: ГРФМЛ “Наука”, 1983. – 616 с.