

Математическая модель процесса ультрафильтрационного концентрирования вторичного молочного сырья в трубчатом мембранных аппаратах с фильтрующими элементами типа БТУ 05/2

Дмитрий А. Родионов	¹	dimok-407@mail.ru	 0000-0001-6686-2007
Сергей И. Лазарев	¹	sergey.lazarev.1962@mail.ru	 0000-0003-0746-5161
Дмитрий Н. Протасов	¹	dnprotasov.75@mail.ru	 0000-0002-6779-316X
Олег А. Абоносимов	¹	abontam@inbox.ru	 0000-0002-5105-7782
Константин К. Полянский	²	kaf-kit@vfreu.ru	 0000-0003-0617-3271

¹ Тамбовский Государственный Технический Университет, ул. Советская, 106, г. Тамбов, 392000, Россия

² Воронежский филиал РЭУ им. Г. В. Плеханова, г. Воронеж, 394000, Россия

Аннотация. Для качественного применения ультрафильтрационных процессов концентрирования и очистки пищевых растворов требуется как экспериментальные исследования, так и математическое описание процессов мембранного процесса разделения растворов с позиций разработки расчетных математических моделей. В данной работе путем аналитического решения уравнений, то есть методом конечных разностей решены математические уравнения. Для получения системы, решались уравнения неразрывности потока, уравнения конвективной диффузии, уравнений Навье-Стокса и уравнения расхода с граничными условиями с целью построения математической модели процесса ультрафильтрационного концентрирования белка в подсырной сыворотке при производстве сычужных сыров. В результате аналитического решения уравнений получена система математических уравнений, позволяющих строить профиль изменения скоростей течения раствора по сечению межмембранного канала и определять концентрацию белка в подсырной сыворотке по длине трубчатого ультрафильтрационного элемента БТУ 05/2 промышленного типа. Полученная математическая модель позволяет теоретически описывать процесс ультрафильтрационного концентрирования белка в подсырной сыворотке по всей длине мембранного канала трубчатого элемента при ламинарном и переходном режимах течения раствора. Полученная система математических уравнений позволяет находить численные значения массового расхода подсырной сыворотки, дают возможность рассчитать удельный выходной поток при изменении трансмембранного давления и рассчитывать концентрации растворенных веществ во вторичном молочном сырье на левой и правой ультрафильтрационной мембране межмембранного канала. Проведена адекватность разработанной математической модели путем сравнения расчетных и экспериментальных данных по удельному выходному потоку при изменении трансмембранного давления в межмембранном канале от 0,1 до 0,25 МПа при ультрафильтрационном концентрировании подсырной сыворотке. Отклонение расчетных данных найденных по математической модели от экспериментальных исследований, полученных на полупромышленной ультрафильтрационной установке трубчатого типа БТУ 05/2 с применением полупроницаемых мембран, у которых активный слой выполнен из фторопласта, полосульфона и полиэфирсульфона, не превышало 10%.

Ключевые слова: математическая модель, мембрана, ультрафильтрация, адекватность модели, молочное сырье, подсырная сыворотка

Mathematical model of the process of ultrafiltration concentration of secondary milk raw materials in tubular membrane devices with filtering elements of BTU 05/2 type

Dmitriy A. Rodionov	¹	dimok-407@mail.ru	 0000-0001-6686-2007
Sergei I. Lazarev	¹	sergey.lazarev.1962@mail.ru	 0000-0003-0746-5161
Dmitriy N. Protasov	¹	dnprotasov.75@mail.ru	 0000-0002-6779-316X
Oleg A. Abonosimov	¹	abontam@inbox.ru	 0000-0002-5105-7782
Konstantin K. Polyansky	²	kaf-kit@vfreu.ru	 0000-0003-0617-3271

¹ Tambov State Technical University, Sovetskaya., 106 Tambov, 392000, Russia

² Voronezh branch of REU named after G.V. Plekhanov, st. Karl Marx, 67A, Voronezh, 394000, Russia

Abstract. For the qualitative application of ultrafiltration processes for the concentration and purification of food solutions, both experimental studies and a mathematical description of the processes of the membrane separation process of solutions from the standpoint of the development of computational mathematical models are required. In this work, by analytical solution of equations, that is, by the method of finite differences, mathematical equations are solved. To obtain the system, the flow continuity equations, convective diffusion equations, Navier-Stokes equations and flow equations with boundary conditions were solved in order to build a mathematical model of the process of ultrafiltration protein concentration in cheese whey in the production of rennet cheeses. As a result of the analytical solution of the equations, a system of mathematical equations was obtained that allows one to construct a profile of changes in the flow rates of the solution along the cross-section of the intermembrane channel and to determine the protein concentration in cheese whey along the length of the tubular ultrafiltration element BTU 05/2 of industrial type. The obtained mathematical model makes it possible to theoretically describe the process of ultrafiltration protein concentration in cheese whey along the entire length of the membrane channel of the tubular element under laminar and transient regimes of solution flow. The resulting system of mathematical equations makes it possible to find the numerical values of the mass flow rate of cheese whey, make it possible to calculate the specific output flow when the transmembrane pressure changes and to calculate the concentration of solutes in the secondary milk raw materials on the left and right ultrafiltration membrane of the intermembrane channel. The adequacy of the developed mathematical model was carried out by comparing the calculated and experimental data on the specific output flow when the transmembrane pressure in the intermembrane channel changes from 0.1 to 0.25 MPa with ultrafiltration concentration of cheese whey. The deviation of the calculated data found by the mathematical model from experimental studies obtained on a semi-industrial tubular ultrafiltration plant BTU 05/2 using semipermeable membranes, in which the active layer is made of fluoroplastic, hemisulphone and polyethersulfone, did not exceed 10%.

Keywords: mathematical model, membrane, ultrafiltration, model adequacy, raw milk, cheese whey

Для цитирования

Родионов Д.А., Лазарев С.И., Протасов Д.Н., Абоносимов О.А., Полянский К.К. Математическая модель процесса ультрафильтрационного концентрирования вторичного молочного сырья в трубчатом мембранных аппаратах с фильтрующими элементами типа БТУ 05/2 // Вестник ВГУИТ. 2021. Т. 83. № 1. С. 36–43. doi:10.20914/2310-1202-2021-1-36-43

For citation

Rodionov D.A., Lazarev S.I., Protasov D.N., Abonosimov O.A., Polyansky K.K. Mathematical model of the process of ultrafiltration concentration of secondary milk raw materials in tubular membrane devices with filtering elements of BTU 05/2 type. *Vestnik VGUET* [Proceedings of VSUET]. 2021. vol. 83. no. 1. pp. 36–43. (in Russian). doi:10.20914/2310-1202-2021-1-36-43

This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

Введение

Рассматривается задача оптимального планирования проекта. Для управления техническими системами и технологическими процессами применяются методы математического моделирования и оптимизации технологических процессов производства. При построении системы автоматического управления мембранным процессом рекомендуется использовать усовершенствованную математическую модель, позволяющую прогнозировать параметры мембранного разделения.

В работе [1] авторы описывают процесс ультрафильтрации молочной сыворотки для выделения белков с отдельным отводом части потока концентрата и математические модели этого процесса. Приведена формула расчета коэффициента обогащения концентрата. Построена математическая модель процесса уменьшения производительности мембраны из-за блокирования пор сгустками геля.

Авторами [2], на основе балансных соотношений разработана эмпирическая модель процесса ультрафильтрационного концентрирования и деминерализации подсырной сыворотки с учетом величины осмотического давления вторичного раствора молочной сыворотки, позволяющая рассчитывать значения концентрации и объемы пермеата и ретентата в промежуточных камерах и на выходе из плоскокамерного ультрафильтрационного аппарата.

Для описания процесса ультрафильтрации с учетом гелеобразования в условиях периодической очистки мембраны авторы [3] Строили математическую модель следующим образом: 1) толщина образующегося слоя геля δ считается постоянной вдоль мембраны и меняется только с течением времени; 2) свойства геля считаются постоянными; 3) количество пор мембраны, засоряемых за время dt , пропорционально плотности потока; 4) Механическая очистка поверхности мембраны приводит как к частичному удалению слоя геля, так и к частичной очистке пор мембраны; 5) время, затрачиваемое на очистку поверхности мембраны, не учитывается; считается, что изменение характеристик процесса, связанное с очисткой, происходит скачкообразно.

Авторами [4] разработана математическая модель процесса электрогиперфильтрационного разделения промышленных растворов, позволяющая рассчитывать объемные расходы ретентата, а следовательно, и пермеата, по камерам и текущий объем раствора в промежуточной емкости.

В своей работе [5] авторами представлена математическая модель массопереноса многокомпонентных растворов в баромембранных аппаратах рулонного типа. Результатом полученной математической модели является распределение полей концентраций веществ в межмембранном канале.

При моделировании процесса мембранного концентрирования белков молочного сырья авторы [6] Пришли к следующим выводам увеличение концентрации раствора до наибольшего значения состоит в увеличении скорости отвода растворителя, что можно гарантировать только при стабильно высокой селективности мембраны. На практике выполнения этого условия добиться достаточно тяжело, что объясняется наличием концентрационной поляризации, которая начинает проявлять свое негативное влияние достаточно быстро при концентрировании растворов высокомолекулярных соединений. Таким образом, значения параметров β_1 , β_2 зависят от вида и конструктивных особенностей оборудования, а также селективности мембраны в нем.

Авторы в работе [7] предложили математическую модель плоского обратноосмотического канала с двумя полупроницаемыми стенками. В своей работе решают взаимосвязанные системы уравнений, включающая уравнения гидродинамики и конвективной диффузии с соответствующими граничными условиями. Получили распределение скоростей и концентраций растворенного вещества по длине и высоте межмембранного канала. Показали возрастание концентрации в примембранной области по длине межмембранного канала. Авторами проведена проверка адекватности математической модели.

Для прогнозирования процессов разделения эмульсий, выбора оптимальных условий проведения этих процессов необходимы соответствующие математические описания. В связи с этим авторами [8] разработана комбинированная краевая задача для непрерывного процесса конвективной диффузии в пространстве между непроницаемой стенкой и мембраной и молекулярной диффузии в мембране в виде аналитического решения соответствующей системы дифференциальных уравнений нестационарной диффузии для переноса вещества в движущейся жидкости и в мембране, обеспечивающей из-за своих свойств селективной проницаемости разделение веществ.

В работе [9] авторами Получены зависимости для описания работы мембранного модуля. С использованием полученных зависимостей проведено сравнение противоточной и прямоточной схем контактирования. При достаточно

длинных мембранах различие между схемами контактирования незначительно.

Авторами [10] представлена математическая модель, учитывающая эффекты температурной и концентрационной поляризации, депрессию пара над раствором. Для пленочных мембран МФФК2, МФФК3, МФФК4 экспериментально определен и проанализирован коэффициент паропроводности. Получены уравнения для расчета температур горячей и холодной поверхностей мембраны, необходимые для определения эффекта температурной поляризации. Предложено модифицированное уравнение паропроводности, с выделением эффекта депрессии пара над раствором и концентрационной поляризации. Для мембранной дистилляции морской воды экспериментально определен и проанализирован параметр, отражающий данный эффект. Разработана методика инженерного расчета мембранно-дистилляционного аппарата.

Автором в работе [11] предлагается модель для расчета концентраций кубовых красителей в разделяемой сточной воде в зависимости от увеличения сопротивления и слоя геля. Результаты экспериментальных данных и расчетных значений имеют отклонение в пределах 2,7–3,1 %.

В работе [12] Предложена новая модель процесса мембранного концентрирования, дополненная не учтенными ранее входными воздействиями, возмущающими воздействиями, выходными параметрами и обратной связью. Это позволяет оперативно вносить необходимые изменения в значения возмущающих воздействий в результате несоответствия полученных значений выходных параметров диапазонам допустимых значений параметров, либо приближения к границам этих диапазонов. Проведен анализ дальнейших перспектив развития математического моделирования мембранных процессов с использованием элементов теории автоматического управления.

Авторами [13] предложена методика моделирования процессов мембранного концентрирования жидких пищевых сред на основе передаточных функций. Проведена структурная и параметрическая идентификация модели процесса концентрирования в мембранном аппарате с отводом примембранного пограничного слоя. Экспериментально подтверждена адекватность модели.

В работе [14] предложена математическая модель процесса мембранного концентрирования молочных сред в ультрафильтрационном аппарате с отводом поляризационного слоя, разработанная на основе методов информационного моделирования и методики, включающей: анализ процесса как объекта моделирования и выявление основных входных и выходных параметров

объекта, выбор вида входных воздействий, структурную идентификацию объекта моделирования, выбор критерия близости (функции невязки), определение значений параметров модели (параметрическую идентификацию), проверку адекватности и непротиворечивости модели. Описаны устройство и принцип работы ультрафильтрационного аппарата с отводом поляризационного слоя. Математическая модель процесса мембранного концентрирования реализована программными средствами. Приведены результаты оценки адекватности и непротиворечивости модели экспериментальным данным, на основе которых сделаны выводы о точности математической модели.

Математическое описание мембранных процессов разделения, рассмотренных в работах [1–20], не полностью учитывает кинетику мембранного процесса, включающую диффузионные, осмотические и гидродинамические процессы. Поэтому целью данной работы является, разработать математическую модель, основанную на решении уравнений конвективной диффузии, на основе уравнения Навье-Стокса и уравнения неразрывности потока. Проверить адекватность разработанной математической модели путем сравнения расчетных и экспериментальных данных по кинетическим зависимостям.

Результаты и обсуждение

Математическая запись задачи:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right); \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right); \quad (3)$$

$$U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}. \quad (4)$$

Начальные условия:

$$C(0, y) = C_{\text{вх}}. \quad (5)$$

Граничные условия для уравнений гидродинамики:

$$U(x, +R) = 0; U(x, -R) = 0. \quad (6)$$

Граничные условия с учетом модифицированного выражения для уравнения конвективной диффузии, скорость фильтрации:

$$\left(1 + \left(\frac{1}{k_1 \cdot \varepsilon} - 1 \right) \left[1 - \exp J \left(-\frac{k_2}{D_0} - k_3 \right) \right] \right)^{-1} \times \\ \times C(x, R) \cdot V(x, R) = D \frac{\partial C(x, R)}{\partial y} \quad ; (7)$$

$$\left(1 + \left(\frac{1}{k_1 \cdot \varepsilon} - 1\right) \left[1 - \exp J \left(-\frac{k_2}{D_0} - k_3\right)\right]\right)^{-1} \times \\ \times C(x, -R) \cdot V(x, -R) = D \frac{\partial C(x, -R)}{\partial y} \quad (8)$$

Рассмотрим решения уравнений гидродинамики:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right); \quad (9)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right); \quad (10)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \quad (11)$$

Так как мы рассматриваем стационарный процесс, то можно записать

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial V}{\partial \tau} = 0. \quad (12)$$

Тогда система уравнений примет вид:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right); \quad (13)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right); \quad (14)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \quad (15)$$

По высоте в сечении канала давление не изменяется, то есть

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (16)$$

В итоге система уравнений гидродинамики имеет вид:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right); \quad (17)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right); \quad (18)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \quad (19)$$

Уравнений гидродинамики примет вид:

$$\nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (20)$$

Граничные условия:

$$U(x, R)=0; U(x, -R)=0. \quad (21)$$

Решать данное уравнение будем относительно $P=f(x)$, т. к. давление изменяется только вдоль канала.

Тогда, учитывая, что $\mu = \nu \cdot \rho$, имеем:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}; \quad (22)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) y + C_1; \quad (23)$$

$$U = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) y^2 + C_1 y + C_2; \quad (24)$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Найдем C_1 и C_2 из уравнений (23–24):

$$U(x, R) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) R^2 + C_1 R + C_2 \quad (25)$$

$$U(x, R) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) R^2 + C_1 R + C_2 = 0; \quad (26)$$

$$U(x, -R) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) R^2 - C_1 R + C_2 = 0; \quad (27)$$

$$\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) R^2 + 2C_2 = 0; \quad (28)$$

$$C_2 = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) R^2; \quad (29)$$

$$-\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) R^2 + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) R^2 + C_1 R = 0; \quad (30)$$

$$C_1 = 0. \quad (31)$$

Интегрируя по dx и подставляя значения граничных условий $U(x, R)=0, U(x, -R)=0$ получим решение данного дифференциального уравнения в виде:

$$U(x, y) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) y^2 - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) R^2; \quad (32)$$

или

$$U(x, R) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) (R^2 - y^2); \quad (33)$$

Далее определим расход жидкости через канал как:

$$Q = b \int_{-R}^R U(x, R) dy = \\ = -b \int_{-R}^R \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) (R^2 - y^2) dy = \quad (34)$$

$$= -\frac{b}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \int_{-R}^R (R^2 - y^2) dy$$

$$Q = \frac{b}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \left[R^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_{-R}^{+R} = \quad (35)$$

$$= -\frac{b}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \left[R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3} \right]$$

$$Q = -\frac{2bR^3}{3\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right), \quad (36)$$

где b высота межмембранного канала.

Рассматриваем дифференциальное уравнение для водопроницаемости с учетом осмотического потока (рисунок 1):

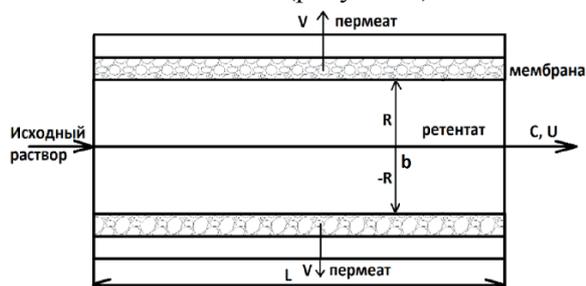


Рисунок 1. Схема основных потоков в баромембранном процессе

Figure 1. Diagram of the main flows in the baromembrane process

Тогда

$$J = \kappa \cdot (\Delta P - \Delta V_p) = \kappa \cdot (P_0 - P(x) - \Delta \pi), \quad (37)$$

где J – выходной удельный поток; κ – эмпирические коэффициенты; ΔP – перепад рабочего давления в межмембранном канале до и после мембраны; ΔV_p – удельный поток растворителя за счет перепада давления до и после мембраны, которые определяются по следующей зависимости.

$$\Delta V_p = B \cdot \exp(n \cdot \Delta C) \cdot \exp\left(\frac{A}{T}\right). \quad (38)$$

Тогда дифференциальное уравнение для изменения расхода в межмембранном канале с учетом осмотического потока:

$$Q_{x+dx} - Q_x = dQ = bJdx \quad (39)$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -b \cdot J \quad (40)$$

Приравняем уравнения для расходов (36) и (40) получим:

$$-\frac{2bR^3}{3\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) = -b \cdot J \quad (41)$$

Граничные условия:

$$\Delta P(0) = \Delta P_0; \quad (42)$$

$$\Delta P(L) = \Delta P_k; \quad (43)$$

Далее, обозначив $3\mu/2R^3 = a$ и $3\mu J/2R^3 = \varpi$, получим дифференциальное уравнение для перепада давления в виде:

$$\frac{\partial^2 \Delta P}{\partial x^2} - a\Delta P + \varpi = 0 \quad (44)$$

Решение данного дифференциального уравнения в общем виде будет:

$$P \rightleftharpoons (x) = C_1 \cdot e^{\sqrt{a} \cdot x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{a} \cdot x} + \frac{\varpi}{a} \quad (45)$$

Найдем постоянные интегрирования C_1 и C_2 в начальный $P(0) = P_0$

И конечный момент

$$P(L) = P_k \quad (46)$$

$$P_0 = C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0 + \frac{\varpi}{a} \quad (47)$$

$$P_0 = C_1 + C_2 + \frac{\varpi}{a} \quad (48)$$

$$C_2 = P_0 - C_1 - \frac{\varpi}{a} \quad (49)$$

$$P_k = C_1 \cdot e^{\sqrt{a} \cdot L} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{a} \cdot L} + \frac{\varpi}{a}. \quad (50)$$

$$P_k = C_1 \cdot e^{\sqrt{a} \cdot L} + \left(P_0 - C_1 - \frac{\varpi}{a} \right) \cdot e^{-\sqrt{a} \cdot L} \quad (51)$$

$$P_k = C_1 \cdot e^{\sqrt{a} \cdot L} + P_0 \cdot e^{-\sqrt{a} \cdot L} - C_1 \cdot e^{-\sqrt{a} \cdot L} - \frac{\varpi}{a} e^{-\sqrt{a} \cdot L} \quad (52)$$

$$C_1 = \frac{P_k - P_0 \cdot e^{-\sqrt{a} \cdot L} + \frac{\varpi}{a} e^{-\sqrt{a} \cdot L}}{e^{\sqrt{a} \cdot L} - e^{-\sqrt{a} \cdot L}} \quad (53)$$

$$C_2 = P_0 - \frac{P_k - P_0 \cdot e^{-\sqrt{a} \cdot L} + \frac{\varpi}{a} e^{-\sqrt{a} \cdot L}}{e^{\sqrt{a} \cdot L} - e^{-\sqrt{a} \cdot L}} - \frac{\varpi}{a} \quad (54)$$

Подставим найденные C_1 и C_2 в (45) и получим выражение для расчета давления по длине канала:

$$P(x) = \frac{P_k - P_0 \cdot e^{-\sqrt{a} \cdot L} + \frac{\varpi}{a} e^{-\sqrt{a} \cdot L}}{e^{\sqrt{a} \cdot L} - e^{-\sqrt{a} \cdot L}} \cdot e^{\sqrt{a} \cdot x} + \left(P_0 - \frac{P_k - P_0 \cdot e^{-\sqrt{a} \cdot L} + \frac{\varpi}{a} e^{-\sqrt{a} \cdot L}}{e^{\sqrt{a} \cdot L} - e^{-\sqrt{a} \cdot L}} - \frac{\varpi}{a} \right) \cdot e^{-\sqrt{a} \cdot x} \quad (55)$$

Подставив найденные значения давления в межмембранном канале в формулы для проницаемости мембран (55), рассчитаем значение продольной составляющей скорости потока.

Подставим найденные значения $P = f(x)$ в уравнения для определения продольной (37) и поперечной скоростей (34), обозначив $f_1(x) = \kappa \cdot (\Delta P - \Delta \pi)$ и $f_2(x, y) = (2\mu)^{-1} (\partial P / \partial x) (R^2 - y^2)$, получим следующую систему уравнений, решением которой является распределение поля концентрации вещества в межмембранном канале:

$$f_2(x, y) \frac{\partial C}{\partial x} + f_1(x) \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (56)$$

$$C(0, y) = C_{исх}; \quad (57)$$

$$\left(1 + \left(\frac{1}{k_1 \cdot \varepsilon} - 1 \right) \left[1 - \exp J \left(-\frac{k_2}{D_\delta} - k_3 \right) \right] \right)^{-1} \times \times C(x, R) \cdot f_1(x) = D \frac{\partial C(x, R)}{\partial y} \quad (58)$$

$$\left(1 + \left(\frac{1}{k_1 \cdot \varepsilon} - 1\right) \left[1 - \exp J \left(-\frac{k_2}{D_0} - k_3\right)\right]\right)^{-1} \times$$

$$\times C(x, -R) \cdot f_2(x) = D \frac{\partial C(x, -R)}{\partial y} ; (59)$$

Для проверки адекватности математической мы сравнивали экспериментальные данные с теоретическими результаты экспериментальных данных представлены на рисунке 2.

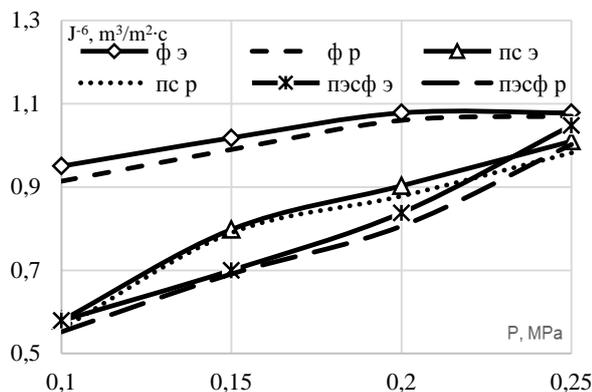


Рисунок 2. Кинетические зависимости выходного удельного потока от трансмембранного давления для ультрафильтрационных мембран типа BTU05/2 с материалом активного слоя Фторопласт (Ф), Полисульфон (ПС), Полиэфирсульфон (ПЭСФ)

Figure 2. Kinetic dependences of the output specific flux on the transmembrane pressure for ultrafiltration membranes of BTU05 / 2 type with the material of the active layer Ftoroplast (F), Polysulfon (PS), Polyethersulfone (PESF)

Проверка адекватности предложенной математической модели проводилась средствами имитационного моделирования в РТС Mathcad. Реализуемая расчет основных характеристик ультрафильтрационного процесса концентрирования подсырной сыворотки. В РТС Mathcad были заданы параметры и условия ультрафильтрационных процессов, реализованных ранее в лабораторных условиях. Полученные экспериментальные значения выходного удельного потока от трансмембранного давления для ультрафильтрационных мембранам типа BTU05/2 с мембранами из фторопласта (Ф), полисульфона (ПС) и полиэфирсульфон (ПЭСФ) были сопоставлены с результатами расчета (рисунок 2).

Заключение

Решение математической модели в системе РТС Mathcad показало высокий показатель сходимости, отклонения расчетных данных от экспериментальных не превышало 10% что является оптимальным показателем для инженерных расчетов.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-38-90036.

The reported study was funded by RFBR according to the research project № 20-38-90036.

Литература

- 1 Worsztynowicz P., Białas W., Grajek W. Integrated approach for obtaining bioactive peptides from whey proteins hydrolysed using a new proteolytic lactic acid bacteria // Food chemistry. 2020. V. 312. P. 126035. doi: 10.1016/j.foodchem.2019.126035
- 2 Лазарев С.И. и др. Эмпирическая модель ультрафильтрационного концентрирования белка в подсырной сыворотке // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2016. Т. 21. №. 2. С. 655-660. doi: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-655-660
- 3 Лобасенко Б.А., Семенов А.Г. Математическая модель ультрафильтрации с учетом гелеобразования в условиях периодической очистки мембраны // Техника и технология пищевых производств. 2010. № 3.
- 4 Лазарев К.С. и др. Математическая модель процесса электрогиперфильтрационного разделения промышленных растворов // Вестник тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. 2013. Т. 18. – №. 4-1.
- 5 Bär C., Mathis D., Neuhaus P., Dürr D. et al. Protein profile of dairy products: simultaneous quantification of twenty bovine milk proteins // International Dairy Journal. 2019. V. 97. P. 167-175. doi: 10.1016/j.idairyj.2019.01.001
- 6 Иванова С.А., Гарифулин Р.Ш., Чаплыгина Т.В. Моделирование процесса мембранного концентрирования белков молочного сырья // Техника и технология пищевых производств. 2011. № 1.
- 7 Mansor E.S., Ali E.A., Shaban A.M. Tight ultrafiltration polyethersulfone membrane for cheese whey wastewater treatment // Chemical Engineering Journal. 2021. V. 407. P. 127175. doi: 10.1016/j.cej.2020.127175
- 8 Вороненко Б.А., Пеленко В.В., Поляков С.В. Математическое описание мембранного разделения эмульсий // Научный журнал НИУ ИТМО. Серия «Процессы и аппараты пищевых производств». 2011. № 2.
- 9 Chamberland J. et al. Effect of membrane material chemistry and properties on biofouling susceptibility during milk and cheese whey ultrafiltration // Journal of Membrane Science. 2017. V. 542. P. 208-216. doi: 10.1016/j.memsci.2017.08.012
- 10 Рудобашта С.П., Махмуд С.Ю. Математическое моделирование процесса мембранной дистилляции // Известия высших учебных заведений. Химия и химическая технология. 2012. Т. 55. № 11.
- 11 Damar I., Cinar K., Gulec H. A. Concentration of whey proteins by ultrafiltration: Comparative evaluation of process effectiveness based on physicochemical properties of membranes // International Dairy Journal. 2020. V. 111. P. 104823. doi: 10.1016/j.idairyj.2020.104823
- 12 Лобасенко Б.А., Котляров Р.В., Сазонова Е.К. Математическое моделирование процесса мембранного концентрирования на основе кибернетического подхода // Фундаментальные исследования. 2016. № 2-1. С. 70-75.

- 13 Тимофеев А.Е., Лобасенко Б.А., Котляров Р.В. Разработка математической модели процесса мембранного концентрирования на основе передаточных функций // *Техника и технология пищевых производств*. 2013. Т. 28. № 1.
- 14 Лобасенко Б.А., Шушпанников А.С., Котляров Р.В. Разработка математической модели процесса мембранного концентрирования на основе методов информационного моделирования // *Современные проблемы науки и образования*. 2013. № 4. С. 89–89.
- 15 Corbatón-Báguena M.J., Álvarez-Blanco S., Vincent-Vela M.C. Evaluation of fouling resistances during the ultrafiltration of whey model solutions // *Journal of Cleaner Production*. 2018. V. 172. P. 358-367. doi: 10.1016/j.jclepro.2017.10.149
- 16 RedCorn R., Fatemi S., Engelberth A.S. Comparing end-use potential for industrial food-waste sources // *Engineering*. 2018. V. 4. № 3. P. 371-380. doi: 10.1016/j.eng.2018.05.010
- 17 Azad T., Ahmed S. Common milk adulteration and their detection techniques // *Food Contamination*. 2016. V.3. № 22. doi: 10.1186/s40550-016-0045-3
- 18 Vaziri M. et al. Hybrid of Adsorption and Nanofiltration Processes as a Capable Removal Method for HANs Removal // *South African Journal of Chemical Engineering*. 2021. V. 36. P. 1-7. doi: 10.1016/j.sajce.2020.12.002
- 19 Susanto H. et al. Preparation of low-fouling polyethersulfone ultrafiltration membranes by incorporating high-molecular-weight chitosan with the help of a surfactant // *South African Journal of Chemical Engineering*. 2020. V. 33. P. 133-140. doi: 10.1016/j.sajce.2020.07.003
- 20 Chollom M.N., Pikwa K., Rathilal S., Pillay V.L. Fouling mitigation on a woven fibre microfiltration membrane for the treatment of raw water // *South African Journal of Chemical Engineering*. 2017. V. 23. P. 1-9. doi: 10.1016/j.sajce.2016.12.003

References

- 1 Worsztynowicz P., Białas W., Grajek W. Integrated approach for obtaining bioactive peptides from whey proteins hydrolysed using a new proteolytic lactic acid bacteria. *Food chemistry*. 2020. vol. 312. pp. 126035. doi: 10.1016/j.foodchem.2019.126035
- 2 Lazarev S.I. and other Empirical model of ultrafiltration protein concentration in cheese whey // *Bulletin of the Tambov University. Series: Natural and technical sciences*. 2016. vol. 21. no. 2. pp. 655-660. doi: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-655-660 (in Russian).
- 3 Lobasenko B.A., Semenov A.G. Mathematical model of ultrafiltration taking into account gelation under conditions of periodic cleaning of the membrane. *Technics and technology of food production*. 2010. no. 3. (in Russian).
- 4 Lazarev K.S. et al. Mathematical model of the process of electrohyperfiltration separation of industrial solutions. *Bulletin of the Tambov University. Series: natural and technical sciences*. 2013. vol. 18. no. 4-1. (in Russian).
- 5 Bär C., Mathis D., Neuhaus P., Dürr D. et al. Protein profile of dairy products: simultaneous quantification of twenty bovine milk proteins. *International Dairy Journal*. 2019. vol. 97. pp. 167-175. doi: 10.1016/j.idairyj.2019.01.001
- 6 Ivanova S.A., Garifulin R.Sh., Chaplygina T.V. Modeling the process of membrane concentration of proteins of milk raw materials. *Technics and technology of food production*. 2011. no. 1. (in Russian).
- 7 Mansor E.S., Ali E.A., Shaban A.M. Tight ultrafiltration polyethersulfone membrane for cheese whey wastewater treatment. *Chemical Engineering Journal*. 2021. vol. 407. pp. 127175. doi: 10.1016/j.cej.2020.127175
- 8 Voronenko B.A., Pelenko V.V., Polyakov S.V. Mathematical description of membrane separation of emulsions. *Scientific journal of NRU ITMO. Series "Processes and Apparatus for Food Production"*. 2011. no. 2. (in Russian).
- 9 Chamberland J. et al. Effect of membrane material chemistry and properties on biofouling susceptibility during milk and cheese whey ultrafiltration. *Journal of Membrane Science*. 2017. vol. 542. pp. 208-216. doi: 10.1016/j.memsci.2017.08.012
- 10 Rudobashta S.P., Mahmud S.Yu. Mathematical modeling of the membrane distillation process. *News of higher educational institutions. Chemistry and chemical technology*. 2012. vol. 55. no. 11. (in Russian).
- 11 Damar I., Cinar K., Gulec H. A. Concentration of whey proteins by ultrafiltration: Comparative evaluation of process effectiveness based on physicochemical properties of membranes. *International Dairy Journal*. 2020. vol. 111. pp. 104823. doi: 10.1016/j.idairyj.2020.104823
- 12 Lobasenko B.A., Kotlyarov R.V., Sazonova E.K. Mathematical modeling of the membrane concentration process based on the cybernetic approach. *Fundamental research*. 2016. no. 2-1. pp. 70–75. (in Russian).
- 13 Timofeev A.E., Lobasenko B.A., Kotlyarov R.V. Development of a mathematical model of the membrane concentration process based on transfer functions. *Technics and technology of food production*. 2013. vol. 28. no. 1. (in Russian).
- 14 Lobasenko B.A., Shushpannikov A.S., Kotlyarov R.V. Development of a mathematical model of the membrane concentration process based on information modeling methods. *Modern problems of science and education*. 2013. no. 4. pp. 89–89. (in Russian).
- 15 Corbatón-Báguena M.J., Álvarez-Blanco S., Vincent-Vela M.C. Evaluation of fouling resistances during the ultrafiltration of whey model solutions. *Journal of Cleaner Production*. 2018. vol. 172. pp. 358-367. doi: 10.1016/j.jclepro.2017.10.149
- 16 RedCorn R., Fatemi S., Engelberth A.S. Comparing end-use potential for industrial food-waste sources. *Engineering*. 2018. vol. 4. no. 3. pp. 371-380. doi: 10.1016/j.eng.2018.05.010
- 17 Azad T., Ahmed S. Common milk adulteration and their detection techniques. *Food Contamination*. 2016. vol. 3. no. 22. doi: 10.1186/s40550-016-0045-3
- 18 Vaziri M. et al. Hybrid of Adsorption and Nanofiltration Processes as a Capable Removal Method for HANs Removal. *South African Journal of Chemical Engineering*. 2021. vol. 36. pp. 1-7. doi: 10.1016/j.sajce.2020.12.002
- 19 Susanto H. et al. Preparation of low-fouling polyethersulfone ultrafiltration membranes by incorporating high-molecular-weight chitosan with the help of a surfactant. *South African Journal of Chemical Engineering*. 2020. vol. 33. pp. 133-140. doi: 10.1016/j.sajce.2020.07.003
- 20 Chollom M.N., Pikwa K., Rathilal S., Pillay V.L. Fouling mitigation on a woven fibre microfiltration membrane for the treatment of raw water. *South African Journal of Chemical Engineering*. 2017. vol. 23. pp. 1-9. doi: 10.1016/j.sajce.2016.12.003

Сведения об авторах

Дмитрий А. Родионов аспирант, кафедра механики и инженерной графики, Тамбовский государственный технический университет, ул. Советская, 106, г. Тамбов, 392000, Россия, dimok-407@mail.ru

 <https://orcid.org/0000-0001-6686-2007>

Сергей И. Лазарев д.т.н., профессор, кафедра механики и инженерной графики, Тамбовский государственный технический университет, ул. Советская, 106, г. Тамбов, 392000, Россия, sergey.lazarev.1962@mail.ru

 <https://orcid.org/0000-0003-0746-5161>

Дмитрий Н. Протасов к.э.н., доцент, кафедра высшей математики, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, 394000, Россия, dnprotasov.75@mail.ru

 <https://orcid.org/0000-0002-6779-316X>

Олег А. Абоносимов д.т.н., профессор, кафедра механики и инженерной графики, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, ул. Советская 106, 392000, Россия, abontam@inbox.ru

 <https://orcid.org/0000-0002-5105-7782>

Константин К. Полянский д.т.н., профессор, кафедра коммерции и товароведения, Воронежский филиал Российского Экономического Университета имени Г.В. Плеханова, ул. Карла Маркса 67А, г. Воронеж, Россия, kaf-kit@vfreu.ru

 <https://orcid.org/0000-0003-0617-3271>

Вклад авторов

Дмитрий А. Родионов обзор литературных источников по исследуемой проблеме, провел эксперимент, выполнил расчёты

Сергей И. Лазарев написал рукопись, корректировал её до подачи в редакцию и несет ответственность за плагиат

Дмитрий Н. Протасов Олег А. Абоносимов Константин К. Полянский консультация в ходе исследования

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about authors

Dmitriy A. Rodionov postgraduate, mechanics and engineering graphics department, Tambov State Technical University, Sovetskaya., 106 Tambov, 392000, Russia, dimok-407@mail.ru

 <https://orcid.org/0000-0001-6686-2007>

Sergei I. Lazarev Dr. Sci. (Engin.), professor, mechanics and engineering graphics department, Tambov State Technical University, st. Sovetskaya., 106 Tambov, 392000, Russia, sergey.lazarev.1962@mail.ru

 <https://orcid.org/0000-0003-0746-5161>

Dmitriy N. Protasov Cand. Sci. (Econ.), associate professor, commerce and commodity department, Tambov State Technical University, st. Sovetskaya., 106 Tambov, 392000, Russia, dnprotasov.75@mail.ru

 <https://orcid.org/0000-0002-6779-316X>

Oleg A. Abonosimov Dr. Sci. (Engin.), mechanics and engineering graphics department, Tambov State Technical University, st. Sovetskaya., 106 Tambov, 392000, Russia, abontam@inbox.ru

 <https://orcid.org/0000-0002-5105-7782>

Konstantin K. Polyansky Dr. Sci. (Engin.), professor, commerce and commodity science department, Voronezh branch of REU named after G.V. Plekhanov, st. Karl Marx, Voronezh, 67A, Russia, kaf-kit@vfreu.ru

 <https://orcid.org/0000-0003-0617-3271>

Contribution

Dmitriy A. Rodionov review of the literature on an investigated problem, conducted an experiment, performed computations

Sergei I. Lazarev wrote the manuscript, correct it before filing in editing and is responsible for plagiarism

Dmitriy N. Protasov Oleg A. Abonosimov Konstantin K. Polyansky consultation during the study

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила 21/12/2020	После редакции 01/02/2021	Принята в печать 01/03/2021
Received 21/12/2020	Accepted in revised 01/02/2021	Accepted 01/03/2021