УДК66.045(045)

Аспирант К.А. Рашкин, профессор С.А. Бредихин,
(Московский гос. ун-т пищевых произ-в) кафедра процессов и аппаратов,
тел. 8-926-152-70-88
доцент В.М. Чесноков
(Московский гос. ун-т пищевых произ-в) кафедра высшей математики,
тел. (495) 676-48-13

Закономерности термообработки вязких продуктов в пластинчатом скребковом аппарате

Описывается конструкция используемых в настоящее время в промышленности скребковых теплообменных аппаратов пластинчатого типа и схема движения продукта в нем. Приводится расчетная схема, ставится и решается задача по аналитическому определению необходимой площади поверхности теплообмена с применением дифференциальных уравнений теплопереноса в движущихся жидких средах, записанных в цилиндрической системе координат при осесимметричном распределении температур.

The current work describesthe construction of scraperplate-typeheat exchangerscurrently usedin industryand thetraffic patternof the productin it. Ananalytical model is represented and it is also posed the problemofthe analyticaldetermination ofthe requiredarea of heat exchangewith the use ofdifferential equations ofheat transfer in amovingliquid media, written in cylindrical coordinates, for symmetrical temperature distribution,without taking into accountthe energy dissipation.

Ключевые слова: теплообмен, скребковые теплообменники, аналитическое исследование.

Пластинчатые скребковые аппараты широко используются для термообработки вязких пищевых продуктов. Закономерности термообработки были изучены в пластинчатом аппарате скребкового типа.

Основной частью скребкового аппарата является теплообменный элемент (рис. 1). Он представляет собой конструкцию из двух соосных сварных теплообменных пластин 1 вместе с лопастным ножом-мешалкой 3.

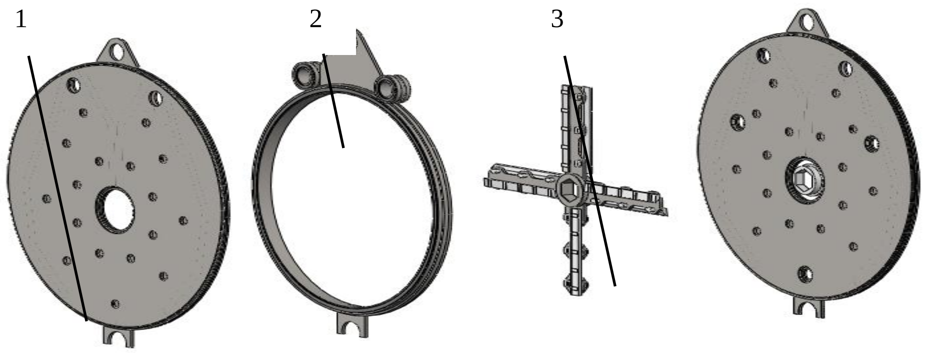

Рис. 1. Основные детали теплообменного элемента: 1 – сварная теплообменная пластина; 2 – уплотнительное кольцо; 3 – нож-мешалка

Набор последовательно соединенных теплообменных элементов образует теплопередающую поверхность аппарата для нагревания или охлаждения высоковязкого продукта. Внутри охлаждающего элемента поток продукта принудительно закручивается с помощью крестообразных вращающихся лопастей ножа-мешалки, захватывающих практически все пространство между дисками.

Продукт поступает в пространство между дисками как из центрального отверстия, так и из отверстий, расположенных на периферии дисков. При этом лопасти могут вращаться как по отношению к неподвижным дискам, так и совместно с одним из дисков по отношению к другому неподвижному диску.

Траектория течения продукта внутри теплообменного элемента сложная. В связи с этим изучение распределения температуры продукта в теплообменном элементе проведено на основе дифференциальных уравнений теплопереноса в движущихся жидких средах. Данные уравнения записаны для цилиндрической системы координат при осесимметричном распределении температуры без учета диссипации энергии

$$v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \quad (1)$$

где T – температура в точках продукта, ^{o}С; r, z – цилиндрические координаты точки продукта; v_r, v_z – проекции скорости точек продукта на оси r, z; a – коэффициент температуропроводности, м^2/с.

Полагаем, что осевая скорость продукта v_z значительно меньше радиальной v_r и окружной v_φ скоростей, поэтому в уравнении (1) положим $v_z \frac{\partial T}{\partial z} \approx 0$. Расчетная схема для определения температуры продукта при его течении в продуктовых каналах аппарата показана на рис. 2.

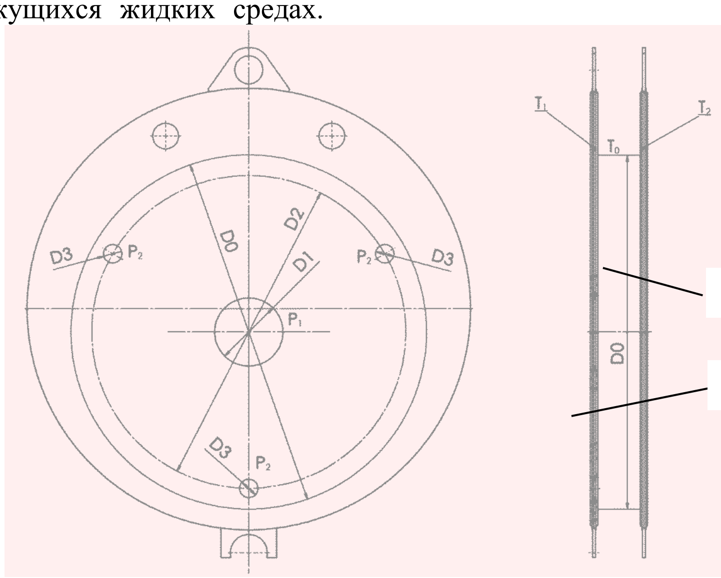

Рис. 2. Расчетная схема: 1 - теплообменные пластины; 2 - продукт; D0 - размер, ограничивающий продуктовую зону; D1 - диаметр входного отверстия; D2 - диаметр, на котором расположены выходные отверстия; P_1 - давление продукта на входе в теплообменный элемент; P2 - давление продукта на выходе из теплообменного элемента; T_0 - температура продукта; T_1 - температура пластины 1; T_2 - температура пластины 2

Для определения радиальной скорости воспользуемся дифференциальным уравнением стационарного осесимметричного течения несжимаемой вязкой жидкости, полагая в нем коэффициент вязкости μ и плотность продукта ρ не зависящими от температуры для данной пары дисков (охлаждающего элемента)

$$-\frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2}\right), \quad (2)$$

где p – давление в точках продукта, Па; ν – коэффициент кинематической вязкости продукта, м^2/с, равный

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (3)$$

Учитывая принудительное вращение продукта, примем, что его угловая скорость равна угловой скорости ω вращения лопастей, т. е.

$$v_\varphi \approx \omega r.$$

В силу этого два слагаемых в левой части уравнения (2) можно представить в следующем виде:

$$-\frac{v_\varphi^2}{r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}, \qquad (4)$$

где P - модифицированное давление, Па.

Модифицированное давление представляет разность между истинным давлением продукта и давлением, которое было бы в нем только при его вращении с угловой скоростью [1]. Оно равно

$$P=p-\frac{1}{2}\rho\,\omega^2\,r^2.$$

При условии постоянства расхода продукта через любое цилиндрическое сечение пространства между пластинами теплопередающего элемента будем искать решение уравнения (2) в виде

$$v_r=\frac{1}{r}\,f(z). \qquad (5)$$

Подстановка выражений (4) и (5) в (2) с учетом (3) дает

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial r}=\frac{1}{r}\,f''(z), \qquad (6)$$

где двумя штрихами обозначена вторая производная по координате z.

Чтобы дифференциальное уравнение (6) имело решение нужно

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial r}=\frac{1}{r}\psi(z). \qquad (7)$$

Интегрируя левую и правую части равенства (7) по координате r, получим для модифицированного давления выражение

$$P=(\mu\ln r)\psi(z)+\xi(z). \qquad (8)$$

Для определения произвольных функций $\psi(z)$ и $\xi(z)$ воспользуемся граничными условиями

$$\begin{aligned} &r=R_1, \quad P=P_1;\\ &r=R_2, \quad p=P_2, \end{aligned} \qquad (9)$$

где P_1 – модифицированное давление на входе продукта в междудисковое пространство; P_2 – модифицированное давление на выходе продукта. Эти давления равны

$$P_1=p_1-\frac{1}{2}\rho\,\omega^2\,R_1^2,$$

$$P_2=p_2-\frac{1}{2}\rho\,\omega^2 R_2^2,$$

где p_1, p_2 – истинные давления продукта во входном и выходном сечениях.

Подставив граничные условия (9) в равенство (8), получим систему двух алгебраических уравнений относительно искомых функций. Решив эти уравнения, найдем

$$\psi(z)=\frac{P_1-P_2}{\mu\ln\frac{R_1}{R_2}},$$

$$\xi(z)=\frac{P_1\ln R_2-P_2\ln R_1}{\ln\frac{R_1}{R_2}}. \qquad (10)$$

На основании (10) выражение для модифицированного давления (8) запишем в виде

$$P=\frac{P_1\ln\frac{r}{R_2}-P_2\ln\frac{r}{R_1}}{\ln\frac{R_1}{R_2}}.$$

Найдем двукратным интегрированием по z функцию $f(z)$ из (6) с учетом (7) и (10)

$$f(z)=\frac{P_1-P_2}{\mu\ln\frac{R_1}{R_2}}\left(\frac{z^2}{2}+C_1\,z+C_2\right), \qquad (11)$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования, которые находятся на основании (5) из условия прилипания продукта к стенкам дисков

$$\begin{aligned} &z=0,\ v_r(r,0)=0,\ f(0)=0;\\ &z=h,\ v_r(r,h)=0,\ f(h)=0 \end{aligned}, \qquad (12)$$

где h – расстояние между дисками. Подставив в равенство (11) граничные условия (12), найдем

$$C_1=-\frac{h}{2}, \quad C_2=0. \qquad (13)$$

Наконец, на основании (11) и (13) выражение радиальной скорости (5) примет вид

$$v_r=\frac{P_1-P_2}{2\mu\ln\frac{R_1}{R_2}}\frac{1}{r}\left(z^2-hz\right). \qquad (14)$$

Выразим радиальную скорость через секундный расход продукта q, используя формулу для расхода $q=2\pi r\int_0^h v_r\,dz$. Подставив сюда выражение v_r из (14) и интегрируя его по координате z, находим

$$\frac{P_1-P_2}{2\mu\ln\frac{R_1}{R_2}}=-\frac{3q}{\pi h^3}. \qquad (15)$$

Таким образом, с учетом (15) выражение радиальной скорости (14) примет вид

$$v_r=-\frac{3q}{\pi h^3}\frac{1}{r}\left(z^2-h\,z\right).$$

Перейдем к определению температуры в продукте по уравнению (1) с учетом $v_z \dfrac{\partial T}{\partial z} \approx 0$. Для этого подставим в левую часть данного уравнения выражение радиальной скорости из (14) или (15) и разделим его левую и правую части на коэффициент температуропроводности a. После этого получим

$$\frac{P_1 - P_2}{2\mu a \ln \dfrac{R_1}{R_2}} \frac{1}{r}\left(z^2 - hz\right)\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (16)$$

Поскольку точного аналитического решения данного уравнения получить нельзя, воспользуемся приближенным решением, заключающимся в частичном осреднении его конвективной части по области течения и использовании метода последовательных приближений. Для этого в левой части равенства (16) положим

$$\frac{P_1 - P_2}{2\mu a \ln \dfrac{R_1}{R_2}} \frac{1}{r}\left(z^2 - hz\right)\frac{\partial T}{\partial r} \approx \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\frac{1}{h}\int_0^h \frac{P_1 - P_2}{2\mu a \ln \dfrac{R_1}{R_2}}\left(z^2 - hz\right) dz = -\frac{\left(P_1 - P_2\right)h^2}{12\mu a \ln \dfrac{R_1}{R_2}} \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}. \quad (17)$$

Введем обозначение

$$A = -\frac{\left(P_1 - P_2\right)h^2}{12\,\mu a \ln \dfrac{R_1}{R_2}}, \quad (18)$$

или с учетом (15)

$$A = \frac{q}{2\pi h a}. \quad (18^*)$$

В дальнейшем для практических расчетов будем использовать формулу (18*), поскольку расход продукта может быть определен гораздо точнее, чем разность модифицированных давлений, т.к. в эту разность войдут потери давления на различные вредные сопротивления.

Подстановкой соотношения (17) с учетом (18) или (18*) в левую часть уравнения (16) придем к однородному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\left(1 - A\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (19)$$

Данное уравнение решаем при следующих граничных условиях:

$$r = R_1,\ T = T_1,\ z = 0, \qquad T = T_3,\ z = h,\ T = T_4, \quad (20)$$

где T_3 и T_4 − температура продукта на стенках дисков.

Решение линейного уравнения (19) найдем методом разделения переменных, добавив к его общему решению частное решение специального вида. Для этого положим

$$T(r,z) = R(r)\cdot Z(z) + T_3 + \frac{z}{h}\left(T_4 - T_3\right). \quad (21)$$

Подстановкой этого выражения T в (17) и разделением переменных получим для функций $R(r)$ и $Z(z)$ обыкновенные дифференциальные уравнения

$$Z'' + \lambda^2 Z = 0, \quad (22)$$

$$r R'' + R'\left(1 - A\right) - \lambda^2 r R = 0. \quad (23)$$

где λ^2 − константа разделения.

Решение уравнения (22) имеет вид

$$Z(z) = C_1 \cos\lambda z + C_2 \sin\lambda z. \quad (24)$$

В силу двух последних граничных условий (20) и выражения (21) функция $Z(z)$ должна обращаться в ноль при $z = 0$ и $z = h$. Отсюда следует

$$C_1 = 0, \quad \lambda = \frac{k\pi}{h}, \quad k = 1, 2, \ldots \infty, \quad (25)$$

т. е. общее решение уравнения (19) будет представлено рядом Фурье по синусам.

Уравнение (23) является уравнением Бесселя произвольного порядка, зависящего от константы A. Поскольку такие функции не табулированы, то дальше будем решать уравнение (19) методом последовательных приближений. Для этого проведем оценку порядка слагаемых в этом уравнении, приведя его к безразмерному виду. Напишем соотношения между размерными и безразмерными величинами

$$T = T_0 T', \quad r = R_0 r', \quad z = h z',$$

где T_0 − характерная размерная величина искомой функции; T' − безразмерная искомая функция; r' − безразмерная радиальная координата; R_0 − характерный радиальный размер; z' − безразмерная осевая координата. В качестве характерной осевой координаты взято расстояние h между дисками.

Перейдя в уравнении (19) к безразмерным величинам, получим

$$\frac{h^2}{R_0^2}\frac{\partial^2 T'}{\partial r'^2} + \frac{\left(1 - A\right)h^2}{R_0^2}\frac{1}{r'}\frac{\partial T'}{\partial r'} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z'^2} = 0. \quad (26)$$

Таким образом, в безразмерном уравнении (26) порядки слагаемых будут определяться только порядками коэффициентов в этих слагаемых. Для оценки порядка этих коэффициентов примем следующие порядки конструктивных параметров охладителя и обрабатываемого продукта:

$$h \sim 0{,}01ì\ ,\ R_1 \sim 0{,}01ì\ ,\ R_2 \sim 0{,}1ì\ ,$$

$$q \sim 10^{-4}\,ì^{\,3}/\text{с},\ \mu \sim 1Ï\ à\cdot ñ,\ a \sim 10^{-6}\,ì^{\,2}/\text{с}.$$

Коэффициент *A* во втором слагаемом, согласно (18*) будет иметь порядок 10^4, т. е. *A*>>1. Коэффициент в последнем слагаемом уравнения (26) имеет порядок 1. Принимая во внимание, что $\frac{h^2}{R_0^2} << \frac{Ah^2}{R_0^2} \sim 1$, оставим в уравнении (26), а значит и в уравнении (19) два последних слагаемых. На этом основании уравнение (19) для нулевого приближения при условии *A*>>1 примет вид

$$-\frac{A}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0\cdot \qquad (27)$$

Решим уравнение (27) методом разделения переменных, представив его решение в виде (21). После разделения переменных для функций $R(r)$ и $Z(z)$ получим обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{R'}{R} = -\frac{\lambda^2}{A}r\,, \qquad (28)$$

и (22), решением которого будет функция (24) при значениях констант (25). Решение уравнения первого порядка с разделяющимися переменными (28) запишем в виде

$$R(r) = C_3\, e^{-\frac{\lambda^2}{2A}r^2}\,, \qquad (29)$$

где C_3 − постоянная интегрирования. Таким образом, на основании (21), (24), (25) и (29) получим решение уравнения (27) в виде ряда

$$T(r,z) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{N}_k\, e^{-\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}r^2}\,\sin\frac{k\pi}{h}z + +T_3 + \frac{z}{h}(T_4 - T_3), \qquad (30)$$

где $C_к = C_2\, C_3$ и индекс *к* показывает, что эта константа будет зависеть от номера *к* собственных чисел λ из (25).

Найдем постоянные интегрирования $C_к$, используя первое граничное условие (20), т. е. $T(R_1, z) = T_1$. На основании этого условия и соотношения (30) получим уравнение для определения $C_к$:

$$T_1 - T_3 - \frac{z}{h}(T_4 - T_3) = = \sum_{k=1}^{\infty}\tilde{N}_k\, e^{-\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}R_1^2}\,\sin\frac{k\pi}{h}z. \qquad (31)$$

Используя формулу для определения коэффициентов ряда Фурье на интервале $0 \le z \le h$, найдем

$$C_k = \frac{2}{k\pi}\left[T_1 - T_3 - (T_1 - T_4)\cos k\pi\right]e^{\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}R_1^2}. \qquad (32)$$

Таким образом, распределение температуры в пространстве между дисками в нулевом приближении на основании (30) и (32) примет следующий вид:

$$T(r,z) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[T_1 - T_3 - (T_1 - T_4)\cos k\pi\right]e^{\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}(R_1^2 - r^2)} \times \times\sin\frac{k\pi}{h}z + T_3 + \frac{z}{h}(T_4 - T_3).$$

Для нахождения первого приближения решения уравнения (24) подставим найденное решение нулевого приближения в ранее отброшенное слагаемое $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$ этого уравнения.

После этого придем к неоднородному линейному уравнению в частных производных:

$$-\frac{A}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = = \frac{2\pi}{Ah^2}\sum_{k=1}^{\infty}k\begin{bmatrix}T_1 - T_3 - (T_1 - T_4)\\ \cos k\pi\end{bmatrix}\left(1 - \frac{k^2\pi^2}{Ah^2}r^2\right)e^{\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}(R_1^2 - r^2)}\sin\frac{k\pi}{h}z\,. \qquad (33)$$

Будем искать решение этого уравнения в таком же виде, как и решение уравнения (27) нулевого приближения, т. е.

$$T(r,z) = = \sum_{k=1}^{\infty}F_k(r)\sin\frac{k\pi}{h}z + T_3 - \frac{z}{h}(T_3 - T_4), \qquad (34)$$

где $F_k(r)$ - неизвестная пока функция, зависящая от координаты *r* и номера *к* собственных чисел λ из (25). Подстановкой выражения $T(r,z)$ из (34) в левую часть уравнения (33) и приравниванием коэффициентов при $\sin\frac{k\pi}{h}z$ в левой и правой частях уравнения (33) получим обыкновенное линейное уравнение первого порядка относительно функции $F(r)$:

$$\frac{A}{r}\frac{dF_k}{dr}+\frac{k^2\pi^2}{h^2}F_k=$$
$$=-\frac{2\pi k}{Ah^2}\left[T_1-T_3-\left(T_1-T_4\right)\cos k\pi\right]\times$$
$$\times\left(1-\frac{k^2\pi^2}{Ah^2}r^2\right)e^{\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}(R_1^2-r^2)}.$$

Решением этого уравнения является функция

$$F_k\left(r\right)=-\frac{2\pi k}{A^2h^2}\left[T_1-T_3-\left(T_1-T_4\right)\cos k\pi\right]\times$$
$$\times\left(\frac{r^2}{2}-\frac{k^2\pi^2}{4Ah^2}r^4\right)e^{\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}(R_1^2-r^2)}+C_k^*e^{-\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}r^2}. \qquad (35)$$

где C_k^* − постоянная интегрирования.

На основании (34) и (35) имеем

$$T\left(r,z\right)=-\frac{\pi}{A^2h^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{k\left[T_1-T_3-\left(T_1-T_4\right)\cos k\pi\right]\left(r^2-\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}r^4\right)e^{\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}(R_1^2-r^2)}+\right.$$
$$\left.+C_k^*e^{-\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}r^2}\right\}\sin\frac{k\pi}{h}z+T_3-\frac{z}{h}\left(T_3-T_4\right). \qquad (36)$$

Постоянную интегрирования C_k^* находим так же, как и постоянную $C_к$ для нулевого приближения, т. е. из условия $T\left(R_1,z\right)=T_1$. Точно так же, как и в равенстве (31), получим разложение функции, стоящей в левой части этого равенства в ряд Фурье по синусам. Из формулы для определения коэффициентов этого ряда находим:

$$C_k^*=-k\left[T_1-T_3-\left(T_1-T_4\right)\cos k\pi\right]\times$$
$$\times\left(\frac{2A^2h^2}{k^2\pi^2}+R_1^{\,2}-\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}R_1^{\,4}\right)e^{\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}R_1^2}.$$

Подставив данное выражение $C_к^*$ в правую часть равенства (36), приведем его к виду

$$T\left(r,z\right)=$$
$$=-\frac{\pi}{A^2h^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{k\left[T_1-T_3-\left(T_1-T_4\right)\cos k\pi\right]\left[r^2-R_1^2-\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}(r^4-R_1^4)-\frac{2A^2h^2}{k^2\pi^2}\right]\times\right.$$
$$\left.\times e^{\frac{k^2\pi^2}{2Ah^2}(R_1^2-r^2)}\sin\frac{k\pi}{h}z\right\}+T_3-\frac{z}{h}\left(T_3-T_4\right). \qquad (37)$$

Формула (37) представляет решение уравнения (19) при граничных условиях (20) в первом приближении. Эта формула может быть применена для расчета температуры продукта как при центральном, так и при периферийном способе подачи в пространство между дисками. В первом случае $R_1<R_2$, $P_1>P_2$, а во втором случае наоборот $R_1>R_2$, $P_1<P_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бэтчелор, Д. Введение в динамику жидкости [Текст] / Д. Бэтчелор. – М.: Мир, 1973. – 560 с.