УДК 681.322

Профессор В.К. Битюков, доцент А.Е. Емельянов
(Воронеж. гос. ун-т инж. технол.) кафедра информационных и управляющих систем.
тел. (473) 255-38-75
E-mail: emalexeg @ yandex.ru

Professor V.K .Bitiukov, associate Professor A.E. Emel'ianov
(Voronezhstate university of engineering technoogy) Department of information and control systems. phone (473) 255-38-75
E-mail: emalexeg @ yandex.ru

Использование случайного квантования при моделировании сетевых систем управления

Using the random of quantization in the simulation of networked control systems

Реферат. Сетевые системы управления используют сетевой канал для обмена данными между элементами. Такой подход обладает рядом преимуществ: снижение затрат на монтажные работы, легкость конфигурации системы, простота диагностики и обслуживания системы. Использование сетей в качестве канала передачи в системах управления создает новые проблемы. Сетевые характеристики делают анализ, моделирование и управление сетевыми системами управления более сложной и трудной задачей. При моделировании необходимо учесть следующие факторы: потеря пакета данных, случайное время передачи пакета по сетевому каналу, необходимость учета нахождения в канале одновременно нескольких пакетов данных при последовательной передаче. Попытки учета одновременно всех этих факторов приводят к значительному повышению размерности математической модели и, как следствие, к значительным вычислительным трудностям. Такие модели, как правило, находят широкое применение при научных исследованиях. Однако для инженерных расчетов требуются математические модели небольшой размерности, но обладающие при этом достаточной точностью. Рассмотрен сетевой канал передачи со случайной задержкой и потерей пакетов данных. Время случайной задержки моделируется законом распределения Эрланга соответствующего порядка. Вероятность потери пакета зависит как от частоты поступления пакетов данных в канал передачи, так и от параметров закона распределения Эрланга. Предложена модель канала в виде последовательного соединения дискретных элементов. Дискретные элементы производят независимое квантование входного сигнала. Для изменения вероятности потери пакета предложено использовать случайное квантование входного сигнала. Получена формула для определения вероятности потери пакета в процессе передачи.

Summary. Network control systems using a network channel for communication between the elements. This approach has several advantages: lower installation costs, ease of configuration, ease of diagnostics and maintenance. The use of networks in control systems poses new problems. The network characteristics make the analysis, modeling, and control of networked control systems more complex and challenging. In the simulation must consider the following factors: packet loss, packet random time over the network, the need for location records in a channel simultaneously multiple data packets with sequential transmission. Attempts to account at the same time all of these factors lead to a significant increase in the dimension of the mathematical model and, as a consequence, a significant computational challenges. Such models tend to have a wide application in research. However, for engineering calculations required mathematical models of small dimension, but at the same time having sufficient accuracy. Considered the networks channels with random delays and packet loss. Random delay modeled by appropriate distribution the Erlang. The probability of packet loss depends on the arrival rate of data packets in the transmission channel, and the parameters of the distribution Erlang. We propose a model of the channel in the form of a serial connection of discrete elements. Discrete elements produce independents quantization of the input signal. To change the probability of packet loss is proposed to use a random quantization input signal. Obtained a formula to determine the probability of packet loss during transmission.

Ключевые слова: сетевой канал, случайная задержка, вероятность потери пакета, случайные квантования.

Keywords: networks canal, random delay, packet loss probability, random quantization.

Сетевые системы управления используют сетевой канал для обмена данными между элементами. Такой подход обладает рядом преимуществ: снижение затрат на монтажные работы, легкость конфигурации системы, простота диагностики и обслуживания системы.

В отличие от традиционных цифровых систем управления, где сигналы передаются по идеальным каналам, задержки в процессе передачи являются незначительными или же постоянными, потери данных отсутствуют, в сетевых системах управления возникают новые проблемы.

Одним из узких мест при математическом моделировании сетевых систем управления является моделирование канала передачи данных. При моделировании необходимо учесть следующие факторы: потеря пакета данных, случайное время передачи пакета по сетевому каналу, необходимость учета нахождения в канале одновременно нескольких пакетов данных при последовательной передаче.

Попытки учета одновременно всех этих факторов приводят к значительному повышению размерности математической модели и, как следствие, к значительным вычислительным трудностям. Такие модели, как правило, находят широкое применение при научных исследованиях [1]. Однако для инженерных расчетов требуются математические модели обладающие меньшей размерностью, но обладающие при этом достаточной точностью.

При моделировании сетевого канала передачи данных предлагается представлять его с помощью совокупности n последовательно соединенных дискретных элементов. Конструктивные особенности данных дискретных элементов представлены в [2-4]. Предполагается, что квантователи этих дискретных элементов функционируют независимо друг от друга. Таким образом, происходит последовательная передача сигнала от одного дискретного элемента к другому. В этом случае закон распределения времени передачи пакета данных по каналу будет соответствовать закону Эрланга n-го порядка.

Целью данной работы является определение вероятности потери пакета данных в сетевой системе управления.

В данной работе предлагается способ моделирования канала передачи данных, позволяющий варьировать такт квантования в сетевой системе управления и вероятность потери пакета данных в широких пределах независимо друг от друга.

С этой целью предлагается в математической модели сетевой системы управления осуществлять для канала передачи квантование с вероятностью $P_{кв}$.

В работе рассмотрен случай, когда все квантователи подчиняются одному и тому же закону: квантование осуществляется случайным образом с интенсивностью λ и описывается экспоненциальным законом распределения:

$$f_к(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}, \qquad (1)$$

где $f_к(t)$ – плотность распределения вероятности времени между моментами квантования квантователя; t – время.

Предполагается, что на вход канала поступает пакет данных с периодом T_0 с вероятностью $P_{кв}$.

В случае если пакет данных успешно прошел все n квантователей, то передача считается успешной и информация поступает на дальнейшую переработку (например, в контроллер). Так как квантователи функционируют независимо друг от друга, то может случиться так, что пакет данных, который был передан позже, «догонит» передаваемый ранее пакет и «сотрет» его содержимое. Таким образом, данные этого пакета будут потеряны.

Вероятность потери пакета данных в сетевой системе управления можно представить следующим образом:

$$P = q + P_{кв} \cdot P_n, \qquad (2)$$

где P – вероятность потери пакета данных в сетевой системе управления; P_n – вероятность потери пакета данных в процессе передачи данных по каналу; q – вероятность потери пакета данных при квантовании:

$$q = 1 - P_{кв}. \qquad (3)$$

Для вероятности P_n можно записать:

$$P_n = P_{кв} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1} \cdot P_д(jT_0), \qquad (4)$$

где $P_д(jT_0)$ – вероятность потери пакета данных в процессе передачи при детерминированном квантовании с периодом (jT_0).

Вероятность $P_д$ для периода квантования (jT_0) можно представить следующим образом:

$$P_д(jT_0) = P_0(jT_0) + \sum_{k=1}^{n-1} P_k(jT_0) \cdot \sum_{i=0}^{n-k-1} P_{i,i+k}, \qquad (5)$$

где

$$P_0(jT_0) = e^{-\lambda \cdot j \cdot T_0},$$

$$P_k(jT_0) = \frac{(\lambda \cdot j \cdot T_0)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot j \cdot T_0},$$

$$P_{i,i+k} = \frac{1}{2^{(2i+k)}} \cdot \left(\frac{k}{2i+k}\right) \cdot C_{2i+k}^{i+k}.$$

После подстановки (5) в (4) имеем:

$$P_n = P_{кв} \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1} \cdot P_0(jT_0) + , \right.$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1}\cdot\sum_{k=1}^{n-1} P_k\left(jT_0\right)\cdot\sum_{i=0}^{n-k-1} P_{i,i+k}\Bigg). \qquad (6)$$

Второе слагаемое в скобках уравнения (6) можно преобразовать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1}\cdot\sum_{k=1}^{n-1} P_k\left(jT_0\right)\cdot\sum_{i=0}^{n-k-1} P_{i,i+k} =$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-k-1} P_{i,i+k}\cdot\sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1}\cdot P_k\left(jT_0\right). \qquad (7)$$

Тогда уравнение (6) можно представить следующим образом:

$$P_n = P_{кв}\cdot\left(\sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1}\cdot P_0\left(jT_0\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-k-1} P_{i,i+k}\cdot\sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1}\cdot P_k\left(jT_0\right)\right). \qquad (8)$$

Рассмотрим бесконечные суммы, стоящие в скобках в выражении (8):

$$S_0=\sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1}\cdot P_0\left(jT_0\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1}\cdot e^{-\lambda\cdot j\cdot T_0}=e^{-\lambda\cdot T_0}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\left(q\cdot e^{-\lambda\cdot T0}\right)^{j-1}. \qquad (9)$$

Введем следующее обозначение:

$$u=q\cdot e^{-\lambda\cdot T_0}. \qquad (10)$$

Тогда:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(q\cdot e^{-\lambda\cdot T0}\right)^{j-1}=\sum_{j=1}^{\infty}(u)^{j-1}=\left(\frac{1}{1-u}\right), \qquad (11)$$

– сумма бесконечно убывающей прогрессии $(u\langle 1)$.

Обозначим:

$$Q_0(u)=\frac{1}{1-u}. \qquad (12)$$

Тогда выражение (9) примет вид:

$$S_0=\frac{1}{q}\cdot u\cdot Q_0(u). \qquad (13)$$

Рассмотрим следующий член выражения (8):

$$S_1=\sum_{i=0}^{n-2} P_{i,i+1}\cdot\sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1}\cdot P_1\left(jT_0\right)=$$

$$\sum_{i=0}^{n-2} P_{i,i+1}\cdot\sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1}\cdot\left(\lambda\cdot j\cdot T_0\right)\cdot e^{-\lambda jT_0}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-2} P_{i,i+1}\cdot\left(\lambda\cdot T_0\right)\cdot e^{-\lambda\cdot T_0}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{\infty}\left(q^{j-1}\cdot j\cdot e^{-\lambda\cdot(j-1)\cdot T_0}\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-2} P_{i,i+1}\cdot\frac{\left(\lambda\cdot T_0\right)}{q}\cdot u\cdot\frac{d}{du}\left[\sum_{j=1}^{\infty}(u)^j\right]=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-2} P_{i,i+1}\cdot\frac{\left(\lambda\cdot T_0\right)}{q}\cdot u\cdot\frac{d}{du}\left[u\cdot\frac{1}{1-u}\right] \qquad (14)$$

Введем обозначение:

$$Q_1(u)=\frac{d}{du}\left[u\cdot Q_0(u)\right]. \qquad (15)$$

Тогда выражение (14) с учетом (15) примет вид:

$$S_1=\sum_{i=0}^{n-2} P_{i,i+1}\cdot\frac{\left(\lambda\cdot T_0\right)}{q}\cdot u\cdot Q_1(u). \qquad (16)$$

Аналогично имеем для произвольного члена второго слагаемого выражения (8):

$$S_m=\sum_{i=0}^{n-m-1} P_{i,i+m}\cdot\sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1}\cdot P_m\left(jT_0\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-m-1} P_{i,i+m}\cdot\frac{\left(\lambda\cdot T_0\right)^m}{m!\cdot q}\cdot u\cdot Q_m(u). \qquad (17)$$

Где:

$$Q_m(u)=\frac{d}{du}\left[u\cdot Q_{m-1}(u)\right]. \qquad (18)$$

Таким образом, выражение (7) можно представить следующим образом:

$$P_n=\left(\frac{P_{кв}\cdot u}{q}\right)\times$$

$$\times\left[Q_0(u)+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-k-1} P_{i,i+k}\cdot\frac{\left(\lambda\cdot T_0\right)^k}{k!}\cdot Q_k(u)\right]. \qquad (19)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. $n=1$.

$$P=q+\left(P_{кв}\right)^2\cdot\frac{e^{-\lambda\cdot T_0}}{\left(1-q\cdot e^{-\lambda\cdot T_0}\right)}. \qquad (20)$$

2. $n=2$.

$$P=q+\left(P_{кв}\right)^2\cdot\frac{e^{-\lambda\cdot T_0}}{\left(1-q\cdot e^{-\lambda\cdot T_0}\right)}\times$$

$$\times\left[1+\frac{\left(\lambda\cdot T_0\right)}{2\cdot\left(1-q\cdot e^{-\lambda\cdot T_0}\right)}\right]. \qquad (21)$$

3. $n=3$.

$$P=q+\left(P_{кв}\right)^2\cdot\frac{e^{-\lambda\cdot T_0}}{\left(1-q\cdot e^{-\lambda\cdot T_0}\right)}\times$$

$$\times\left[1+\frac{5\cdot\left(\lambda\cdot T_0\right)}{8\cdot\left(1-q\cdot e^{-\lambda\cdot T_0}\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\lambda\cdot T_0\right)^2\cdot\left(1+q\cdot e^{-\lambda\cdot T_0}\right)}{8\cdot\left(1-q\cdot e^{-\lambda\cdot T0}\right)^2}\right]. \qquad (22)$$

4. $n=4$.

$$P=q+\left(P_{кв}\right)^2\cdot\frac{e^{-\lambda\cdot T_0}}{\left(1-q\cdot e^{-\lambda\cdot T_0}\right)}\times$$

$$\times\left[1+\frac{11\cdot\left(\lambda\cdot T_0\right)}{16\cdot\left(1-q\cdot e^{-\lambda\cdot T_0}\right)}+\right.$$

$$+\frac{3\cdot\left(\lambda\cdot T_0\right)^2\cdot\left(1+q\cdot e^{-\lambda\cdot T_0}\right)}{16\cdot\left(1-q\cdot e^{-\lambda\cdot T0}\right)^2}+$$

$$+\frac{(\lambda \cdot T_0)^3 \cdot \left(1+4\cdot q\cdot e^{-\lambda \cdot T_0}+\left(q \cdot e^{-\lambda \cdot T_0}\right)^2\right)}{48 \cdot \left(1-q \cdot e^{-\lambda \cdot T_0}\right)^3}\Bigg] \quad (23)$$

Приведем численный пример.

Допустим, что реальный режим передачи данных в канале может быть аппроксимирован законом Эрланга 2-го порядка со следующими параметрами: $n = 2$; $\lambda = 300$ 1/с. Вероятность потери пакета данных в реальном канале: $P = 0{,}2$. Пусть, исходя из режима функционирования сетевой системы управления, такт квантования составляет $T_0 = 0{,}01$ с. Необходимо определить значение вероятности квантования в математической модели канала передачи для адекватного описания режима передачи в реальном канале.

Вероятность потери пакета данных в модели канала передачи при детерминированном квантовании:

$$P_{\min} = e^{-\lambda \cdot T_0} \cdot \left[1 + \frac{(\lambda \cdot T_0)}{2}\right] = 2{,}5 \cdot e^{-3} = 0{,}124.$$

Так как $P \rangle P_{\min}$, то возможна корректировка вероятности потери данных в канале передачи, путем имитации вероятностного квантования.

Произведем расчет этой вероятности.

Для $n = 2$:

$$P = q + (P_{кв})^2 \cdot \frac{e^{-\lambda \cdot T_0}}{\left(1 - q \cdot e^{-\lambda \cdot T_0}\right)} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{(\lambda \cdot T_0)}{2 \cdot \left(1 - q \cdot e^{-\lambda \cdot T_0}\right)}\right]. \quad (24)$$

Введем обозначения:

$z = \lambda \cdot T_0$; $a = e^{-\lambda \cdot T_0}$; $x = 1 - a \cdot q$.

Тогда уравнение (24) можно представить следующим образом:

$$P = \frac{(1-x)}{a} + \frac{(x-1+a)^2 \cdot (2 \cdot x + z)}{2 \cdot a \cdot x^2}.$$

Откуда:

$$(z + 2 \cdot a \cdot (2 - P) - 2) \cdot x^2 +$$

$$+ 2 \cdot (1-a) \cdot (1-a-z) \cdot x + (1-a)^2 \cdot z = 0. \quad (25)$$

Подставляя числовые значения в (25), имеем:

$$1{,}18 \cdot x^2 - 3{,}895 \cdot x + 2{,}7075 = 0$$

Откуда:

$$x \approx 0{,}9924.$$

Следовательно:

$$q \approx 0{,}15..$$

А вероятность квантования:

$$P_{кв} \approx 0{,}85.$$

Таким образом, допуская в математической модели канала передачи вероятностное квантование, мы получаем адекватную модель реального процесса передачи данных, в котором осуществляется детерминированное квантование.

ЛИТЕРАТУРА

1 Битюков В.К., Емельянов А.Е. Обобщенная математическая модель сетевой системы управления с передачей данных по каналу с конкурирующим методом доступа // Вестник ТГТУ. 2012. Том 18. № 2. С. 319 - 326.

2 Битюков В. К., Емельянов А.Е. О независимости стохастических процессов квантования в сетевых системах управления // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И. Вернадского. 2012. № 1(37). С.36 – 42.

3 Абрамов Г.В., Емельянов А.Е., Ивлиев М.Н. Математическое моделирование цифровых систем управления с передачей информации по каналу множественного доступа // Системы управления и информационные технологии. 2007. № 3 (29). С. 27 – 32.

4 Абрамов Г.В., Емельянов А.Е., Ивашин А.Л. Анализ области применимости асинхронной математической модели цифровой системы управления // Вестник ВГТА. 2010. № 2. С. 32-38.

REFERENCES

1 Bitiukov V. K., Emelianov A. E. Generalized mathematical model of network management system with data transmission through a channel with competing access method. *Vestnik TGTU*. [Bulletin of TGTU], 2012, vol. 18, no. 2, pp. 319 - 326. (In Russ.).

2 Bitiukov V. K., Emelianov A. E. On the independence of the quantization of stochastic processes in network management systems. *Voprosy sovremennoi nauki i praktiki*. [Questions modern science and practice. University V. I. Vernadsky], 2012, no. 1 (37), pp. 36 - 42. (In Russ.).

3 Abramov G.V., Emelianov A.E., Ivliev M.N. Mathematical modeling of digital control systems with transmission of information via multiple access. *Sistemy upravleniia i informatsionnye tekhnologii*. [Control Systems and Information Technology], 2007, no. 3 (29), pp. 27 - 32. (In Russ.).

4 Abramov G.V., Emelianov A.E., Ivashin A.L. Analysis of the range of validity of a mathematical model of asynchronous digital control system. *Vestnik VGTA*. [Bulletin of VSTA], 2010, no. 2. pp. 32-38.