

УДК 51.001.57

Профессор Г.В. Абрамов, аспирант Р.В. Данилов

(Воронеж. гос. ун-т инж. технол.), кафедра информационных технологий моделирования и управления», тел. (473) 255-25-50

Разработка математической модели сети, использующей конкурирующий доступ к среде передачи данных

Рассмотрена математическая модель сети, использующей конкурирующий доступ к среде передачи данных. Проведено теоретическое и экспериментальное исследование времени доставки информации, учитывающее образование очередей в коммутирующих устройствах. Проверка адекватности модели выполнена с использованием формальных статистических критериев Фишера и Стьюдента.

In this article we consider a mathematical model of a network that uses competitive environment, access to data. The authors have conducted theoretical and experimental investigation of the delivery time information, the formation of queues in the switching devices. Checking the adequacy of the model is performed using formal statistical tests of Fisher and Student.

Ключевые слова: сети, информационные системы, закон распределения, время обслуживания заявки, буфер коммутатора, вероятность обслуживания заявки.

Сетевая информационная инфраструктура промышленных предприятий, объединяющая технологическое оборудование, производственные участки, цеха до недавнего времени строилась в основном на базе закрытых фирменных протоколов, которые внедрялись их разработчиком исходя из соображений решения определенного класса задач. В результате в широкую инженерную практику сегодня внедрено несколько десятков сетевых протоколов реального времени, специально ориентированных на построение систем промышленной автоматизации. Сети на основе стандарта Ethernet до недавнего времени применялись в основном на верхних уровнях систем автоматизации. Однако в процессе решения задач комплексной автоматизации все чаще возникают вопросы интеграции MES, ERP/EAM систем с системами АСУТП, использования в них информации, получаемой с нижних уровней управления технологическими процессами.

Построение информационной сетевой части подобных комплексных систем на базе единой технологии Ethernet значительно упрощает структуру сети, улучшает ее стоимостные параметры, уменьшает количество циклов преобразования информации, что имеет своим прямым следствием увеличение надежности и быстродействия информационной системы в

© Абрамов Г.В., Данилов Р.В., 2012

целом. До недавнего времени в качестве недостатков технологии Ethernet назывались некоторые технические особенности, критически важные в сетях промышленного назначения, – высокая стоимость именно на уровне устройств и отсутствие гарантированного времени доставки сообщения от источника к получателю. Однако технология Ethernet непрерывно развивается, и сегодня аргументы о дороговизне и недетерминированности этой технологии построения сетей уже не соответствуют действительности. Решения на базе Ethernet используются для создания защищенных сетей: промышленных предприятий, энергетических компаний, тепловых пунктов, распределенных систем IP-наблюдения, систем контроля трафика и т.п.

Однако случайный метод доступа к среде передачи, на котором основывается Ethernet, вносит стохастичность времени передачи данных. При реализации необходимо учитывать не только неопределенность времени доставки данных (пакетов, заявок, сообщений), но и возможность потери информации. Эти проблемы можно решать при проектировании сети, выбирая конфигурацию с требуемыми параметрами времени доставки и размеров пакетов.

Основных причин стохастичности времени передачи данных в сети Ethernet две: коллизии в среде передачи данных и очереди в

коммутаторах. Известны модели, позволяющие рассчитывать время доставки с учетом возникновения коллизий [1].

Для моделирования времени доставки с учетом очередей была рассмотрена следующая сеть (рис.1):



Рис. 1. Схема сети

Примем следующие допущения:

- имеется n - источников заявок;
- в каждом источнике заявки формируются с интенсивностью λ ;
- коммутатор имеет буфер на N заявок;
- обработка заявок осуществляется с интенсивностью μ .

• когда очередь достигает уровня N , то вновь сформированная заявка остается в источнике до тех пор, пока не появится возможность отправить ее в буфер коммутатора;

• при этом последующая заявка в данном источнике не формируется. Если в рассматриваемой системе имеется несколько источников со сформированными заявками, то освобождающееся место в буфере коммутатора они занимают на конкретной основе с одинаковой вероятностью.

При этих допущениях для определения закона распределения времени обслуживания заявки от источников сформируем вектор, характеризующий состояние системы: (j, i) , где j - количество пакетов в очереди коммутатора, $j = 0, N$; i - количество источников, имеющих пакеты, $i = 0, n$.

На рис. 2 представлен граф Марковского процесса гибели и размножения с непрерывным временем.

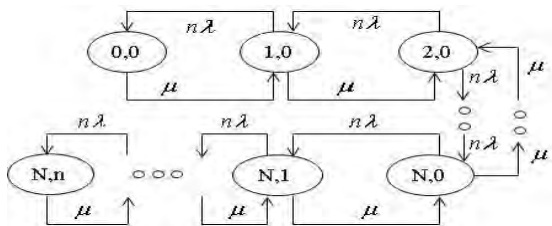


Рис. 2. Граф состояний системы

Составим для него систему уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} P_{0,0}(t) = -n\lambda P_{0,0}(t) + P_{1,0}(t) \\ P_{1,0}(t) = -(n\lambda + \mu)P_{1,0}(t) + \\ \quad n\lambda P_{0,0}(t) + \mu P_{2,0}(t) \\ \dots \\ P_{j,0}(t) = -(n\lambda + \mu)P_{j,0}(t) + \\ \quad n\lambda P_{j-1,0}(t) + \mu P_{j+1,0}(t) \\ \dots \\ P_{N,1}(t) = -((n-1)\lambda + \mu)P_{N,1}(t) + \\ \quad n\lambda P_{N,0}(t) + \mu P_{N,2}(t) \\ \dots \\ P_{N,i}(t) = -((n-i)\lambda + \mu)P_{N,i}(t) + \\ \quad (n-i+1)\lambda P_{N,i-1}(t) + \mu P_{N,i+1}(t) \\ \dots \\ P_{N,n}(t) = -\mu P_{N,n}(t) + \lambda P_{N,n-1}(t) \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим стационарные вероятности состояний системы, т.е. когда $P_{j,i}(t) = 0$ (т.е. левые части уравнений равны 0).

Тогда получим

$$P_{0,0} = \frac{1}{\left(\frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho}\right) + \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \rho^{N+n} A},$$

где $A = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{n}{\rho}\right)^i$; $\rho = \frac{n\lambda}{\mu}$.

Искомый закон распределения времени обслуживания заявки можно представить следующим образом:

$$f(t) = f_{1,0}(t) + \dots + f_{N,0}(t) + f_{N,1}(t) + \dots + f_{N,n}(t),$$

где $f_{j,0}(t)$ - закон распределения времени обслуживания заявки при условии, что в момент прихода в систему она заняла j -ю очередь в буфере; $f_{N,i}(t)$ - закон распределения времени обслуживания заявки при условии, что в момент прихода в систему $(i-1)$ источников имеют заявки и буфер полон.

Таким образом, $f_{j,0}(t)$ и $f_{N,i}(t)$ - это условные законы. Закон распределения $f_{j,0}(t)$ можно представить следующим образом:

$$f_{j,0}(t) = \tilde{P}_{j-1,0} \tilde{f}_j(t) \quad (2)$$

где $\tilde{P}_{j-1,0}$ - вероятность того, что в момент прихода заявки в систему находилась $(j-1)$ заявок, таким образом, пришедшая заявка заняла j -е место в очереди коммутатора; $\tilde{f}_j(t)$ - закон распределения времени обслуживания заявки, расположенной на j -м месте в буфере. Так как закон обслуживания коммутатора имеет экспоненциальный характер, то для $\tilde{f}_j(t)$ можно записать

$$\tilde{f}_j(t) = \frac{\mu(\mu t)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\mu t},$$

т.е. обслуживание будет происходить по закону Эрланга j -го порядка.

Для определения законов распределения $f_{N,i}(t)$ поступим следующим образом. Выделим из n источников один и определим для него время обслуживания заявки. Для этого введем следующий вектор: (N, I, k) , где

- N - говорит о том, что буфер занят ($N=N$);

- I - количество источников имеющих заявки, кроме выделенного, $i=1, (n-1)$;

- k - наличие или отсутствие заявки в выделенном устройстве, $k=0$ или $k=1$;

Рассмотрев часть графа, представленного на рис. 2, начиная с $(N,0) = (N,0,0)$, можно построить новый граф с учетом введения нового вектора состояния, и для этого графа составить уравнения Колмогорова. Если воспользоваться следующим равенством $P_{N,i} = P_{N,i-1,0} + P_{N,i,0}$, то получим уравнения, совпадающие с соответствующими уравнениями системы (1). Так как все источники в рассматриваемой системе одинаковы, то для стационарных вероятностей имеем:

$$P_{N,i-1,1} = \frac{i}{n} P_{N,i},$$

$$P_{N,i,0} = \frac{n-i}{n} P_{N,i},$$

$$P_{N,0,0} = P_{N,0}.$$

Закон распределения $f_{N,i}(t)$ можно записать следующим образом:

$$f_{N,i}(t) = \tilde{P}_{N,i-1,0} \cdot \tilde{f}_{N,i}(t),$$

где $\tilde{P}_{N,i-1,0}$ - вероятность того, что в момент поступления от выделенного устройства в систему уже $(i-1)$ устройств имеют заявки;

$\tilde{f}_{N,i}(t)$ - закон распределения времени обслуживания заявки, пришедшей i -й в систему, когда буфер был занят. Для нахождения данного закона построим новый граф, где состояния $(N,0,0), (N,1,0) \dots (N,n-1,0)$ будут поглощающими (концевыми) состояниями. Составив систему уравнений Колмогорова и решив их относительно соответствующих начальных условий, получим, что закон распределения в этом случае примет вид:

$$\begin{aligned} \bar{f}_{N,i}(t) = & \mu \tilde{P}_{N,0,1}(t) + \frac{1}{2} \mu \tilde{P}_{N,1,1}(t) + \dots + \\ & \frac{1}{n} \mu \tilde{P}_{N,n-1,1}(t) \end{aligned}$$

Данный закон распределения характеризует время ожидания заявки от момента поступления в систему до момента попадания в буфер коммутатора на N -е место. Таким образом, закон распределения, определяющий время от момента попадания заявки в систему до ее выхода, будет определяться композицией двух законов:

$$\tilde{f}_{N,i}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}_{N,i}(t) \frac{(\mu(\mu(t-\tau)))^{N-1}}{(N-1)!} e^{-\mu(t-\tau)} d\tau \quad (3)$$

Определив вероятности $\tilde{P}_{j-1,0}$ и

$\tilde{P}_{N,i-1,0}$, участвующие в выражения (2) и (3), получим искомый закон распределения:

$$f(t) = \frac{1}{P} \left[\sum_{j=1}^N \frac{P_{j-1,0} (\mu(\mu)^{j-1})}{((j-1)!)^\mu} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n-i}{n} P_{N,i} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}_{N,i}(t) f_N(t-\tau) d\tau \right] \quad (12)$$

где $P_{j-1,0}$ - это вероятность того, что в очереди имеется $j-1$ заявка, и не один источник не формирует заявок; N - размер очереди коммутатора; $P_{N,i}$ - вероятность того, что буфер заполнен и i источников в системе формируют заявки; $\bar{f}_{N,i}(t)$ - закон распределения, характеризующий время ожидания заявки от момента поступления в систему до момента попада-

ния в буфер коммутатора на N -е место; $f_N(t - \tau)$ - закон Эрланга N -го порядка.

Для анализа и проверки адекватности модели была проведена серия экспериментов по определению времени доставки пакетов.

Проверка адекватности модели проводилась с использованием статистических критериев Фишера и Стьюдента.

Разработанная математическая модель позволяет исследовать влияние основных параметров сети (размер пакетов, загруженность канала и размер буфера коммутатора) на время доставки пакетов.

Один из важнейших параметров – это определение количества устройств на участке сети. Анализ результатов моделирования для 5, 10, 15 и 20 устройств при использовании пакетов размером 1000 байт с интенсивностью отправки 1000 пакетов в секунду и размером буфера 512 кбайт показал, что при увеличении количества устройств, увеличивается скорость доставки пакетов и уменьшается вероятность их доставки. Это объясняется тем, что увеличение объема передаваемой информации ведет к увеличению пропускной способности коммутатора, т.к. шины коммутаторов более производительны, чем сеть Ethernet. Следует обратить внимание на снижение вероятности доставки пакетов при увеличении загрузки сети. Так, установившаяся вероятность доставки при работе 5 устройств близка к 1, а при работе 20 – вероятность составляет 0,92, (рис. 3, 4).

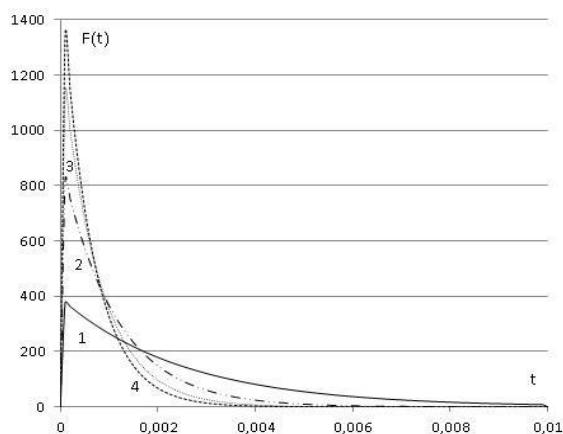


Рис. 3. Плотность распределения времени доставки пакетов: 1 - 5 устройств; 2 - 10 устройств; 3 - 15 устройств; 4 - 20 устройств

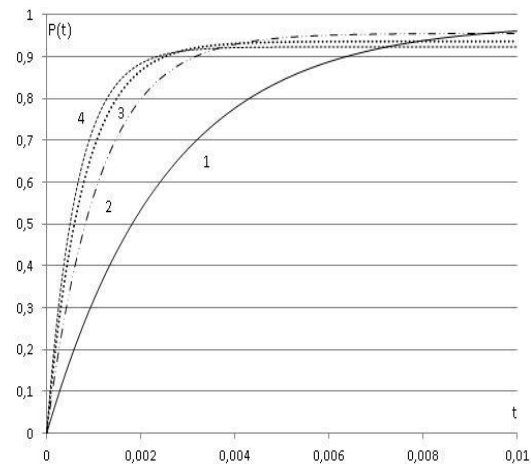


Рис. 4. Вероятность доставки пакетов: 1 - 5 устройств; 2 - 10 устройств; 3 - 15 устройств; 4 - 20 устройств

Проведенные исследования показали, что технологии Ethernet можно использовать для систем реального времени и управления различным оборудованием, включая системы мониторинга и управления энергопотреблением в зданиях и сооружениях. Разработанная математическая модель позволяет рассчитывать параметры сети или накладывать на них ограничения для достижения заданного времени доставки. Для достижения необходимой вероятности доставки пакетов в заданный промежуток времени можно рассчитать основные параметры сети.

Работа выполнена в рамках ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технического комплекса России на 2007-2013 гг.»

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамов, Г.В. Определение закона распределения времени обслуживания заявки информационной системы с множественным доступом к каналу передачи [Текст] / Г.В. Абрамов, А.Е. Емельянов, К.Ч. Колбая // Системы управления и информационные технологии. - 2008. - № 3 (33). - С. 49-51.
2. Конахович, Г.Ф. Сети передачи пакетных данных [Текст] / Г.Ф. Конахович, В.М. Чуприн. - Киев: МК-Пресс, 2006. - 272 с.