

Докторант С. Алтайулы, профессор С. Т. Антипов
(Воронеж. гос. ун-т инж. технол.) кафедра машин и аппаратов пищевых производств,
тел. (473) 255-38-96

доцент И.О. Павлов, ст. преподаватель Е.В. Воронова
(Воронеж. гос. ун-т инж. технол.) кафедра информационных технологий
моделирования и управления, тел. (473) 255-25-50

Использование метода конечных элементов для решения задач теплообмена в ротационно-пленочном аппарате

Рассмотрен вопрос создания компьютерной модели, предназначенной для исследования нестационарного массообменного процесса при влагоудалении из фосфолипидной эмульсии подсолнечных масел в вакуумном цилиндрическом ротационно-пленочном аппарате. Реализация математической модели выполнена на основе использования метода конечных элементов в системе Maple.

The question of creating a computer model designed for the investigation of unsteady mass transfer processes in the dripping of the phospholipid emulsion of sunflower oil in a vacuum cylindrical rotary-film apparatus. The implementation of the mathematical model performance using the finite element method in the Maple.

Ключевые слова: математическое моделирование, метод конечных элементов, тепло-массообмен, фосфолипидные эмульсии, ротационно-пленочный аппарат.

В настоящее время наиболее разработанным из численных методов является метод конечных элементов. Основные концепции МКЭ были разработаны достаточно давно, однако по-настоящему реализовать все его возможности удалось с появлением последних поколений компьютерной техники, обладающей большими объемами памяти для выполнения и хранения значительного количества вычислений, а также хорошим быстродействием.

Рассмотрим обобщенную математическую модель, выражающую результаты теоретического исследования полей потенциала массопереноса в объекте в результате вакуумной и тепловой сушки в виде конечно-элементной схемы.

Процесс удаления влаги из тонкой пленки фосфолипидной эмульсии осуществляется в ротационно-пленочном аппарате. Фосфолипидная эмульсия поступает на вход в аппарат через верхний патрубок. Распределение высоковязкой термолабильной фосфолипидной эмульсии осуществляется центробежной силой вращающимися лопастями ротора на внутренней поверхности корпуса аппарата и создает горизонтально расположенную цилиндрическую тонкослойную кольцевую пленку [1].

Поток распределяемого вещества (влаги) переносится конвективной диффузией и сопровождается массоотдачей влаги от поверхности массообмена во внешнюю фазу – паровоздушную среду во внутреннем объеме аппарата. С целью интенсификации процесс обезвоживания проводится под вакуумом. Преимущество тонкого кольцевого слоя при выпаривании в ротационно-пленочных аппаратах под вакуумом – малое время пребывания высоковязких жидких пищевых термолабильных продуктов в зоне нагрева. Обезвоженная фосфолипидная эмульсия выгружается в конце аппарата.

Аналогия процессов молекулярного переноса импульса, теплоты и массы при определенных условиях приводит к тождественности соответствующих дифференциальных уравнений и позволяет создать общую теорию процессов переноса.

Процессы переноса теплоты и массы аналогичны только при отсутствии вторичных эффектов, обусловленных их взаимным влиянием, т. е. термодиффузии и диффузионного переноса теплоты. Практически это означает, что для получения указанной аналогии роль вторичных эффектов тепло- и массообмена должна быть невелика.

Таким образом, если математическая формулировка процессов переноса массы и теплоты будет одинаковой, то решение задачи, полученное для одного из процессов (например, теплоотдача при ламинарном обтекании плоской поверхности), может быть использовано для исследования аналогичного процесса (массоотдачи при ламинарном обтекании плоской поверхности). В связи с этим, в первую очередь, нами будут рассмотрены процессы переноса массы.

Исходной для построения методов численного решения и последующего их применения является классическая система двумерных уравнений Навье-Стокса для конвекции, тепло- и массообмена в приближении Бусинеска, которая выводится из общих уравнений Навье-Стокса сжимаемой жидкости в предположении, что жидкость динамически и статически несжимаема, т. е. плотность ее не зависит от давления, но может зависеть от температуры и концентрации примеси [2]. Эти задачи обладают осевой или центральной симметрией.

Предполагаются постоянными также коэффициенты вязкости, теплопроводности, удельной теплоемкости, диффузии. При написании уравнений притока тепла и диффузии пренебрегаем выделением тепла за счет вязкой диссипации и работы сил сжатия, термо- и бародиффузионными эффектами. Таким образом, предполагается, что жидкость ньютоновская ($\mu = \text{const}$) и несжимаемая ($\rho = \text{const}$).

В цилиндрических координатах (r, z) система дифференциальных уравнений в безразмерной форме имеет вид [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\Delta u_r - \frac{1}{x^2} u_r \right) - \frac{\partial p}{\partial r}, \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= \frac{1}{\text{Re}} \Delta u_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} T + \frac{\text{Gr}_c}{\text{Re}^2} c \times \\ &\times \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_r + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{1}{\text{RePr}} \Delta T, \\ \frac{\partial c}{\partial t} + u_r \frac{\partial c}{\partial r} + u_z \frac{\partial c}{\partial z} &= \frac{1}{\text{ReSc}} \Delta c, \end{aligned} \quad (1)$$

где u_r, u_z – радиальная и осевая компоненты вектора скорости. Предполагается, что поля скоростей, потоки тепла и массы не зависят от азимутального угла θ ; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – лапласиан скалярной функции.

Система уравнений (1) описывает течение вязкой жидкости в цилиндрической системе координат в некоторой области G с границей Γ . В этой системе уравнений искомыми являются вектор скорости $\vec{U}(u_x, u_r)$, давление $p(x, r)$, температура $T(x, r)$, концентрация смеси $c(x, r)$ (точнее, отклонения последних от их статических значений), которые зависят от пространственных координат и времени t .

Параметрами являются плотность, коэффициенты кинематической вязкости $\nu = \mu / \rho$, где μ – коэффициент динамической вязкости, теплопроводности λ , диффузии D , удельной теплоемкости при постоянном давлении C_p , а также ускорение свободного падения g и коэффициенты теплового и концентрационного изменения плотности β_0 и β_n .

В уравнениях (1) содержатся безразмерные параметры, определенные по величинам, заданным условиями задачи: $\text{Re} = V_\infty L / \nu$ – число Рейнольдса, $\text{Gr} = g \beta_T L^3 \Delta T / \nu^2$ – число Грасгофа; $\text{Gr}_c = g \beta_c L^3 \Delta c / \nu^2$ – концентрационное число Грасгофа; $\text{Pr} = \nu / a$ – число Прандтля; $\text{Sc} = \text{Pr}_D = \nu / D$ – число Шмидта, или диффузионное число Прандтля; $a = \lambda / (\rho C_p)$ – коэффициент температуропроводности. L, V_∞ – масштабные длина области и базовая скорость системы.

Процесс нестационарного тепломассообмена при влагоудалении из фосфолипидных эмульсий, протекающий в вакуумном ротационно-пленочном аппарате рассматривается при следующих дополнительных допущениях, подтверждающихся экспериментальными исследованиями: процесс протекает в изотермических условиях; скорость эмульсии в радиальном направлении равна нулю $u_r = 0$, в осевом – постоянна $u_z = \text{const}$.

При этих допущениях из системы уравнений (1) получим уравнение массопроводности для нестационарного процесса массопереноса в безразмерном виде [3, 4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \tau} + u_z \frac{\partial C}{\partial z} &= K_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right), \\ r \in [r_c, r_k], z \in [0, z_k], \tau \in [0, 1], \end{aligned} \quad (2)$$

где $r_c = R_c / L_\infty$; $r_k = R / L_\infty$; $z_k = L / L_\infty$; $u_z = v_z / v_\infty$; $v_\infty = L_\infty / t_k$; $K_1 = 1 / (\text{ReSc})$ – комплексный критерий.

Уравнение (2) дополнено следующими краевыми условиями:

$$C(r, z, 0) = C_0; \quad C(r, z, \tau)|_{z=0} = C_0;$$

$$\left. -\frac{\partial C(r, z, t)}{\partial r} \right|_{r=r_c} = \text{Bi}_m (C_{\text{II}} - C_{\infty});$$

$$\left. \frac{\partial C(r, z, t)}{\partial r} \right|_{r=r_k} = 0,$$

где $\text{Bi}_m = \beta L_{\infty} / D_m$ – критерий Био массообменный.

Общая система уравнений формируется из систем линейных дифференциальных уравнений конечных элементов [5]:

$$[M]\{\dot{C}\} + [K]\{C\} = \{P\}. \quad (3)$$

Решив систему дифференциальных уравнений в частных производных (3) с учетом начальных условий (граничные условия включены в вариационную задачу), получим искомое приближенное распределение концентрации вещества в теле во времени. Система уравнений (3) заменяется системой конечно-разностных уравнений. Для решения уравнения (3) используется хорошо известный метод трапеций [6]:

$$\{C_{\tau+\Delta\tau}\} - \{C_{\tau}\} = \frac{\tau}{2} (\{\dot{C}_{\tau+\Delta\tau}\} - \{\dot{C}_{\tau}\}), \quad (4)$$

где $\Delta\tau$ – шаг интегрирования. Из выражения (4) находим скорость изменения температуры в момент времени $\tau + \Delta\tau$ в виде следующего уравнения:

$$\{\dot{C}_{\tau+\Delta\tau}\} = \{\dot{C}_{\tau}\} + \frac{2}{\tau} (\{C_{\tau+\Delta\tau}\} - \{C_{\tau}\}). \quad (5)$$

Подставив выражение (5) в (4), получаем конечно-разностное уравнение для определения искомой зависимости:

$$\left[\frac{2}{\tau} M + K \right] \{C_{\tau+\Delta\tau}\} = \{P_{\tau+\Delta\tau}\} + [M] \left[\frac{2}{\tau} \{C_{\tau}\} - \{\dot{C}_{\tau}\} \right].$$

При расчете были заданы следующие исходные данные:

- геометрия области течения пленки: длина аппарата $L=1,2$ м; внешний радиус пленки $R=0,331$ м; внутренний – $R_c = 0,329$ м;

- физические характеристики фосфолипидной эмульсии и внешней фазы: начальная концентрация распределяемого вещества $C_0 = 0,5$ кг/кг; концентрация распределяемого вещества в ядре внешней фазы принята равной нулю $C_{\infty} = 0$; плотность $\rho = 1200$ кг/м³; коэффициент кинематической вязкости $\nu = 0,3 \cdot 10^{-2}$, м²/с;

- параметры процесса: средняя скорость течения пленки вдоль аппарата $v_z = 0,006$ м/с;

коэффициент массопроводности $D_m = 0,05$ м²/с; коэффициент массоотдачи $\beta = 0,623 \cdot 10^{-3}$ м/с.

На рис. 1-2 приведены результаты моделирования в виде графиков изменения концентрации распределяемого вещества – влаги в фосфолипидной эмульсии по толщине и длине аппарата.

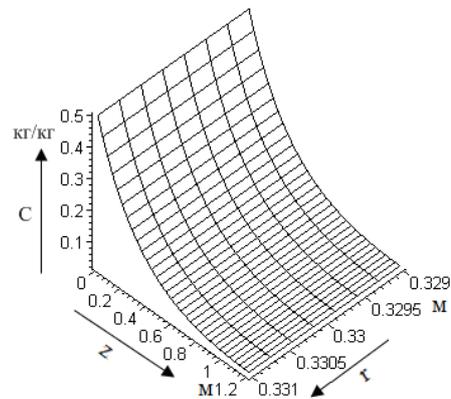


Рис. 1. Изменение концентрации распределяемого вещества по толщине пленки и длине аппарата

Для сравнения результатов с экспериментальными данными использовалась оценка качества модели такая, как средняя ошибка аппроксимации:

$$A = \frac{100}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{c'_i - c_i}{c_i} \right|,$$

где c_i, c'_i – значение концентрации распределяемого вещества, полученное с использованием метода конечных элементов, вычислено по эмпирической формуле, полученной по экспериментальным данным. Средняя ошибка аппроксимации ($D_m = 2e-1$ м²/с, $\beta = 3,115 \cdot 10^{-3}$ м/с) составила $A = 11,2$ % (рис. 2). Это хороший результат.

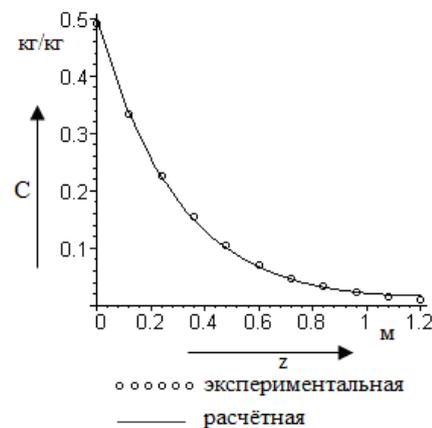


Рис. 2. Изменение влажности фосфолипидной эмульсии на поверхности массообмена по длине аппарата

Проведён вычислительный эксперимент, который показал, что при увеличении количества элементов результаты отличаются незначительно, поэтому при дальнейшем анализе процессов принята конечно-элементная сетка $(n_x \times n_y) = (8 \times 12)$.

На рис. 3 показаны поля изменения влажности по длине аппарата.

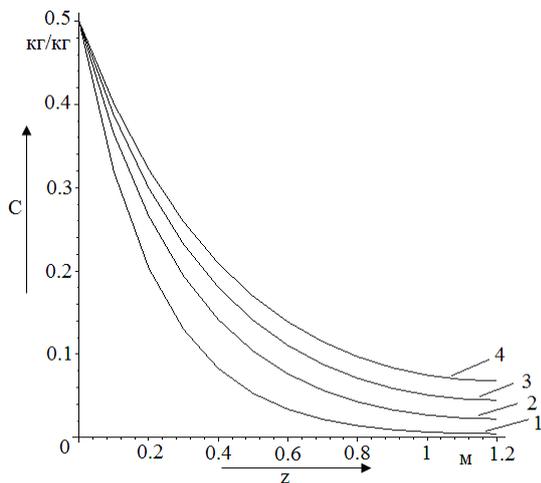


Рис. 3 Изменение влажности по длине аппарата в зависимости от различных значений коэффициента диффузии D_m при $\beta = 6,23 \cdot 10^{-4}$; 1 - $D_m = 0,1$; 2 - $D_m = 0,2$; 3 - $D_m = 0,3$; 4 - $D_m = 0,4$

Информационные технологии, основанные на применении метода конечных элементов, позволяют исследовать нестационарный массообменный процесс при удалении влаги из фосфолипидной эмульсии подсолнечных масел и проектировать высокоэффективные конструкции цилиндрического ротационно-пленочного аппарата.

Использование математического пакета символьной математики Maple позволяет эффективно реализовать алгоритмы метода конечных элементов для решения задач тепло- и массопереноса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пат. 99987 РФ на полезную модель МПК ВО1D 1/22. Цилиндрический ротационно-пленочный аппарат [Текст] / Алтайулы С., Антипов С.Т., Шахов С.В.; заявитель и патентообладатель Воронеж. гос. технол. акад. – № 2010110753/05; заявл. 22.02.2010.; опубл. 10.12.2010, Бюл. № 34 – С. 4.
2. Полежаев, В. И. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье – Стокса [Текст] / В. И. Полежаев, А. В. Бунэ, Н. А. Вережуб [и др]. – М: Наука, 1987. – 272 с.
3. Кафаров, В. В. Основы массопереноса [Текст] / В. В. Кафаров. – М: Высш. школа, 1979. – С. 439.
4. Алтайулы, С. Математическое моделирование теплообмена фосфолипидных эмульсий в вакуумном ротационно-пленочном аппарате [Текст] / С. Алтайулы, С. Т. Антипов, И.О. Павлов // Вестник ВГТА . – 2011.– № 2. – С. 72–75.
5. Сигерлинд, Л. Применение метода конечных элементов [Текст] / Л. Сигерлинд. – М.: Мир, 1979. – С. 392.
6. Митчелл, Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными [Текст] / Э. Митчелл, Р. Уэйт. – М.: Мир, 1981. – 216 с.