

Анализ изменений геометрии и кинематики зубчатой передачи в условиях абразивного изнашивания

Анатолий М. Попов	¹	popov4116@yandex.ru	 0000-0003-0728-7211
Анатолий Л. Майтаков	¹	may585417@mail.ru	 0000-0002-0714-204X
Рауф В-О. Мехдиев	¹	popov4116@yandex.ru	 0009-0005-5536-5482
Надежда Т. Ветрова	¹	veteroknadi@mail.ru	 0000-0002-7131-0511

¹ Кемеровский государственный университет, ул. Красная, 6, г. Кемерово, 650000, Россия,

Аннотация. Исследования надежности современных сельскохозяйственных, пищевых и горных машин и механизмов показывают, что до 40 % отказов приходится на долю агрегатов трансмиссии, работоспособность которых в значительной мере регламентируют зубчатые колеса, эксплуатация которых происходит в условиях высокой запыленности воздуха и недостаточной герметичности внутренних полостей. В результате износа зубьев колес появляются вибрации, возрастают динамические нагрузки в приводах. Все это в большей степени связано с изменением кинематики зубчатого зацепления при износе. Целью данной работы является исследование изменений геометрии и кинематики зубчатых передач в условиях абразивного изнашивания. Объектами исследований являлась оценка распределение контактных напряжений и нагрузок, что является ключевым моментом при разработке износостойких и надёжных зубчатых передач. Определялись дополнительные факторы: влияние эксплуатационных нагрузок, изменения формы зубьев в процессе работы и их воздействие на точность передачи движения. В результате проведенных исследований разработаны аналитические зависимости, которые позволяют выполнять расчёты геометрических, кинематических и качественных характеристик передачи и прогнозировать скорость изнашивания шестерни и колеса, оценивать величину контактных напряжений и коэффициента удельного скольжения по линии зацепления пары зубьев на различной стадии износа. В процессе изнашивания линия зацепления искривляется, а её начало, и конец сдвигаются в направлении вращения зубчатых колёс. Коэффициент перекрытия при этом постепенно снижается, но при степени износа свыше 18–20% стабилизируется в пределах 1,03–1,1. В процессе абразивного изнашивания тяжело нагруженных передач происходит не только изменение формы профилей зубьев, но и изменение закона относительного движения колёс.

Ключевые слова: износ зубчатых колес, геометрия зубчатых колес, относительное скольжение, радиус кривизны.

Analysis of changes in geometry and kinematics of the gear gears in conditions of abrasive wear

Anatolij M. Popov	¹	popov4116@yandex.ru	 0000-0003-0728-7211
Anatolij L. Maytakov	¹	may585417@mail.ru	 0000-0002-0714-204X
Rauf V-O. Mehdiyev	¹	popov4116@yandex.ru	 0009-0005-5536-5482
Nadezhda T. Vetrova	¹	veteroknadi@mail.ru	 0000-0002-7131-0511

¹ Kemerovo State University, Krasnaya Str. 6, Kemerovo, 650000, Russia

Abstract. Studies of the reliability of modern agricultural, food and mining machines and mechanisms show that up to 40% of failures occur in transmission units, the performance of which is largely regulated by gears, which are operated in conditions of high air dust and insufficient tightness of internal cavities. As a result of wear on the teeth of the wheels, vibrations appear, and dynamic loads in the drives increase. All this is largely due to the change in gear gearing kinematics during wear. The purpose of this work is to study changes in the geometry and kinematics of gears under conditions of abrasive wear. The objects of research were the evaluation of the distribution of contact stresses and loads, which is a key point in the development of wear-resistant and reliable gears. Additional factors were determined: the influence of operational loads, changes in the shape of teeth during operation and their impact on the accuracy of motion transmission. As a result of the research, analytical dependencies have been developed that make it possible to calculate the geometric, kinematic and qualitative characteristics of the transmission and predict the wear rate of gears and wheels, estimate the magnitude of contact stresses and the coefficient of specific slip along the engagement line of a pair of teeth at various stages of wear. During the wear process, the engagement line bends, and its beginning and end shift in the direction of rotation of the gears. The overlap coefficient gradually decreases, but with a degree of wear above 18–20% it stabilizes in the range of 1.03–1.1. During the abrasive wear of heavily loaded gears, not only the shape of the tooth profiles changes, but also the law of relative movement of the wheels changes.

Keywords: gear wear, gear geometry, relative slip, radius of curvature.

Для цитирования

Попов А.М., Майтаков А.Л., Мехдиев Р.В-О., Ветрова Н.Т. Анализ изменений геометрии и кинематики зубчатой передачи в условиях абразивного изнашивания // Вестник ВГУИТ. 2025. Т. 87. № 2. С. 38–45. doi:10.20914/2310-1202-2025-2-38-45

For citation

Popov A.M., Maytakov A.L., Mehdiyev R.V-O., Vetrova N.T. Analysis of changes in geometry and kinematics of the gear gears in conditions of abrasive wear. Vestnik VGUIT [Proceedings of VSUET]. 2025. vol. 87. no. 2. pp. 38–45. (in Russian). doi:10.20914/2310-1202-2025-2-38-45

This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

Введение

Исследования надежности современных сельскохозяйственных, пищевых и горных машин и механизмов показывают, что до 40% отказов приходится на долю агрегатов трансмиссии, работоспособность которых в значительной мере регламентируют зубчатые колеса. Так при капитальном ремонте из-за износа и усталостного разрушения выбраковывается свыше 60% зубчатых колес [1–5]. Основная доля отказов агрегатов трансмиссий приходится на коробку передач – до 45%. Детальными, лимитирующими долговечность коробки передач, являются зубчатые колеса, которые у тракторов сельскохозяйственного назначения подвержены в большей степени абразивному изнашиванию, так как их эксплуатация происходит в условиях высокой запыленности воздуха и недостаточной герметичности внутренних полостей смазочной системы трансмиссии.

В результате износа зубьев колес появляются вибрации, возрастают динамические нагрузки в приводах. Все это в большей степени связано с изменением кинематики зубчатого зацепления при износе.

Определение геометрических, кинематических и качественных показателей зубчатых зацеплений преимущественно проводится с использованием аналитических методов. Это связано с тем, что, как отмечается в ряде исследований, геометрические построения, используемые для анализа изменения параметров зацепления, не дают необходимой точности и полной картины формирования возбуждающих колебательных процессов, вызванных изменением функции передаточного отношения. Характер последних предопределяет кинематический анализ зацепления пары зубчатых колес на всех стадиях их износа под нагрузкой. Что позволяет не только определить угловые скорости и ускорения колес, но и определить линейные скорости и ускорения в относительном движении пары зубьев, что предопределяет условия изнашивания на всем участке зацепления пары зубьев и позволяет прогнозировать физику процесса и, соответственно, скорость изнашивания по высоте зуба.

Основной целью анализа зубчатого зацепления состоит в выявлении закона изменения передаточного отношения, особенно при наличии изношенных профилей сопряженных зубьев [7–11]. Методы исследования, используемые в теории зубчатых зацеплений, условно можно разделить на методы дифференциальной геометрии,

кинематические, синтетические. Проведенные нами исследования кинематических и геометрических характеристик зацепления опираются, главным образом, на кинематические методы, которые позволили в ряде случаев упростить математические выкладки по сравнению с другими методами. В общем случае, анализ сводится к отысканию уравнения зацепления изношенного профиля, при известной зависимости изменения функции передаточного отношения при износе силовой зубчатой передачи. Решение этой задачи важно для оценки рабочих характеристик зубчатых передач приводов машин и прогнозирования их срока службы.

Цель работы – исследование изменений геометрии и кинематики зубчатых передач в условиях абразивного изнашивания.

Материалы и методы

Анализ литературных источников российских и зарубежных авторов [12–16] показывают, что изменения профилей зубьев при износе более 3–5% силовых передач разного модуля, разного передаточного отношения, разной твердости и коэффициентов смещения исходного контура, различных трансмиссий в сельскохозяйственных, транспортных машинах (тракторы, комбайны), имеет несомненную схожесть. Причем было отмечено определенное различие изношенных профилей ведущего и ведомого колес. Исходя из этого, а также статистического анализа, были смоделированы профили изношенных зубьев шестерни и колеса. В каждом конкретном случае профиль зуба описывался полиномом в системе координат, жестко связанной с шестерней (колесом). Для анализа изношенного зацепления вводится три системы координат: подвижные системы S_1 и S_2 , которые связаны с шестерней и колесом, а также неподвижная система S , жестко закрепленная относительно стойки. Геометрия зубьев исследуемых шестерен описывается системой уравнений в системе координат $S_1 (x_1; y_1; z_1)$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{k=0}^7 C_k (y_1 - r_{f_1})^k; \\ 0,25m &\leq (y_1 - r_{f_1}) \leq 2,25m; \\ x_2 &= \sum_{k=0}^7 D_k (y_2 - r_{f_2})^k; \\ 0,25m &\leq (y_2 - r_{f_2}) \leq 2,25m, \end{aligned} \quad (1)$$

где r_1, r_2 – радиус окружности впадин шестерни и колеса, мм; m – модуль зацепления, мм; D_k, C_k – коэффициент полинома; k – степень полинома.

Анализ проводится в десяти сечениях по высоте зуба и на разных стадиях износа. Кроме того, для уточнения результатов рассматриваются дополнительные факторы: влияние эксплуатационных нагрузок, изменения формы зубьев в процессе работы и их воздействие на точность передачи движения. Эти исследования позволяют более детально оценить распределение контактных напряжений и нагрузок, что является ключевым моментом при разработке износостойких и надёжных зубчатых передач.

Результаты и обсуждение

Профили зубьев шестерни и колеса, а также орты нормали в неподвижной системе координат S (x; y; z) описываются с помощью уравнений.

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1; \\ y^{(1)} &= x_1 \sin \varphi_1 + y_1 \cos \varphi_1; \\ l_x^{(1)} &= l_{x_1} \cos \varphi_1 - l_{y_1} \sin \varphi_1; \\ x^{(2)} &= x_2 \cos \varphi_2 + y_2 \sin \varphi_2; \\ y^{(2)} &= -x_2 \cos \varphi_2 + y_2 \sin \varphi_2 + a_\omega; \\ y^{(2)} &= -x_2 \sin \varphi_2 + y_2 \cos \varphi_2 + a_\omega, \end{aligned} \quad (2)$$

где φ_1 и φ_2 – углы поворота колёс относительно стойки; l_i – орты нормалей в соответствующей системе.

В точке касания профилей у них должны быть равны радиусы векторы и орты нормали, основываясь на этом, получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1 &= x_2 \cos \varphi_2 + y_2 \sin \varphi_2; \\ x_1 \sin \varphi_1 + y_1 \cos \varphi_1 &= -x_2 \cos \varphi_2 + \\ &+ y_2 \sin \varphi_2 + a_\omega; \\ l_{x_1} \cos \varphi_1 - l_{y_1} \sin \varphi_1 &= l_{x_2} \cos \varphi_2 + l_{y_2} \sin \varphi_2; \\ x_1 &= \sum_{k=0}^7 C_k (y_1 - r_{f_1})^k; \\ 0,25m &\leq (y_1 - r_{f_1}) \leq 2.25m; \\ x_2 &= \sum_{k=0}^7 D_k (y_2 - r_{f_2})^k; \\ 0,25m &\leq (y_2 - r_{f_2}) \leq 2.25m. \end{aligned} \quad (3)$$

В данном случае существует пять уровней, которые связывают шесть параметров: φ_1 , x_1 , y_1 , φ_2 , x_2 , y_2 . При заданном угле поворота φ_1 в интервале от $-0,5\pi$ до $0,5\pi$ с шагом 1° мы можем, используя систему уравнений (3), вычислить остальные параметры в зависимости от φ_1

Для нахождения функции передаточного отношения была продифференцирована зависимость $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$. При этом учитывалось, что $i_{21} = d\varphi_2/d\varphi_1 = \varphi_2^1(\varphi_1)$.

В процессе решения системы уравнений (3) мы также получаем координаты точки контакта для каждого значения угла φ_1 . Эти точки контактных взаимодействий на изношенных профилях зубьев, как известно, определяют линию зацепления, которая является важнейшей характеристикой работы зубчатой передачи. Такая линия зацепления непосредственно влияет на качество и эффективность передачи движения в системе.

Кроме того, нами был выполнен аналитический синтез изношенной передачи с использованием тех же координатных систем, которые применялись при анализе. В ходе экспериментальных исследований был получен закон изменения передаточного отношения, представленный в виде рядов Фурье, а также профиль зуба, который был выражен через степенной ряд. Эти данные позволили провести синтез зацепления и вычислить профиль зуба колеса, после чего его форма была сопоставлена с результатами, полученными в ходе испытаний, что позволило оценить точность и корректность полученных теоретических моделей.

Исследование геометрических и кинематических характеристик зацепления основывается на кинематических методах, которые особенно эффективны при анализе вариаций в отношениях скоростей, когда $i12 \neq \text{const}$. Эти методы позволили значительно упростить сложные математические выкладки и расчёты, что стало возможным благодаря их высокой точности и удобству применения в условиях изменяющихся параметров.

Анализ функции передаточного отношения, полученной нами в экспериментах на передачах разного модуля (2; 3; 4; 5 мм), разной твердости (HRC45, HB 350) со смещением исходного контура и без смещения (рисунок 1), показал, что экстремальные значения функции передаточного отношения, если использовать основную теорему зацепления [1, 2].

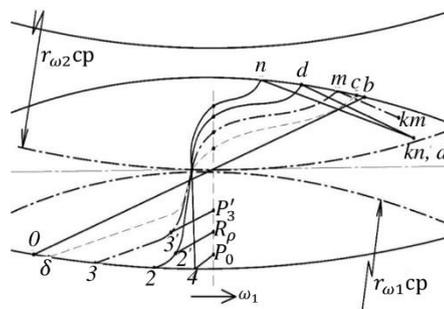


Рисунок 1. Изменение линии зацепления при изнашивании ($\Delta S=0\%; 3\%; 5\%; 8\%; 25\%; m=5 \text{ мм}; z_1/z_2 = 18/30$)
 Figure 1. Changing the engagement line during wear ($\Delta S=0\%; 3\%; 5\%; 8\%; 25\%; m=5 \text{ mm}; z_1/z_2 = 18/30$)

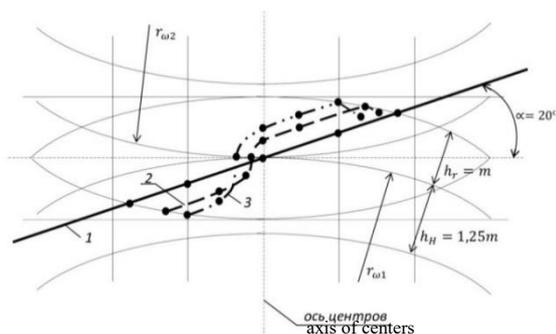


Рисунок 2. Линии зацепления при износе, построенные по результатам аналитического расчета (1- $\Delta S=0\%$; 2- $\Delta S=5\%$; 3- $\Delta S=25\%$)

Figure 2. Lines of engagement during wear, constructed according to the results of an analytical calculation (1- $\Delta S=0\%$; 2- $\Delta S=5\%$; 3- $\Delta S=25\%$)

Анализ графиков, полученных в результате проведённых опытов и выражающих функцию передаточного отношения, показывает, что её значение может быть представлено корреляционной зависимостью:

Экстремальные значения функции передаточного отношения определяются с использованием основной теоремы зацепления (рисунок 1):

Учитывая, что крайнее положение полюса зависит не только от модуля, но и от величины износа, в зависимости вводится коэффициент $k_{\Delta S}$, отражающий степень изношенности передачи.

Поскольку коэффициент $k_{\Delta S}$ влияет не на $r_{\omega 1}$ и $r_{\omega 2}$, а на расстояние крайних положений мгновенного полюса от R_0 , зависимости (3) для различных степеней износа могут быть записаны следующим образом:

$$i_{12}^{max} = \frac{r_{\omega 2}^{max}}{r_{\omega 1}^{min}} = \frac{z_2 + 1.8k_{\Delta S}}{z_1 - 1.8k_{\Delta S}};$$

$$i_{12}^{min} = \frac{r_{\omega 2}^{min}}{r_{\omega 1}^{max}} = \frac{z_2 - 1.3k_{\Delta S}}{z_1 + 1.3k_{\Delta S}};$$

$$k_{\Delta S} = \frac{1.1^{\Delta S} - 1.1^{-\Delta S}}{1.1^{\Delta S} + 1.1^{-\Delta S}},$$
(4)

где ΔS – относительная величина износа,%; $r_{\omega 1}^{min}$, $r_{\omega 1}^{max}$, $r_{\omega 2}^{max}$, $r_{\omega 2}^{min}$ – минимальные и максимальные значения мгновенных радиусов центров вращения шестерни и колеса.

Применяя кинематический метод, мы находим уравнение зацепления $\vec{n}_i \vec{v}_i = 0$, как произведение векторов нормали и скорости относительного движения, в соответствующей i -й системе координат.

Представим уравнение зацепления, как скалярное произведение векторов для профилей зуба шестерни, и объединив его с системой уравнений (4), получим следующее выражение:

$$x_1 = \sum_{K=1}^7 c_K (y_1 - r_{f_1})^{k-1};$$

$$i_{12} = \frac{z_2}{z_1} + \frac{i_{12}^{max} - i_{12}^{min}}{2} \sum_{j=1}^n A_j \sin(jz_1 y_1 + \varphi_j);$$

$$i_{12}^{max} = \frac{z_2 + 1.8k_{\Delta S}}{z_2 - 1.8k_{\Delta S}}; \quad i_{12}^{min} = \frac{z_2 - 1.3k_{\Delta S}}{z_2 + 1.3k_{\Delta S}};$$

$$k_{\Delta S} = \frac{1.1^{\Delta S} - 1.1^{-\Delta S}}{1.1^{\Delta S} + 1.1^{-\Delta S}}.$$
(5)

Для решения этого уравнения необходимо, установив значение износа и задав угол поворота шестерни φ_1 в пределах интервала, $-0,5\pi \leq \varphi_1 \leq 0,5\pi$ вычислить координаты контактной точки в соответствующей системе координат. На основе полученных данных, уравнение линии зацепления, которое представляет собой множество точек контакта, определяется в неподвижной системе координат S. Эти вычисления позволяют более точно моделировать поведение зацепления и его изменения в зависимости от износа и угловых перемещений

Теперь, используя матрицы перехода от одной системы координат к другой, опираясь на ранее полученные выражения, можно вычислить координаты любой точки, лежащей на линии зацепления, что позволяет точно определить геометрию взаимодействующих профилей. Профиль зуба колеса, в свою очередь, можно рассматривать как огибающую однополого семейства профилей зуба шестерни, которые движутся относительно друг друга. Исходя из этого, уравнение профиля зуба колеса, представляющего собой совокупность характеристик в системе координат S2, может быть записано в следующем виде, что дает возможность детально проанализировать форму и особенности работы зацепления в разных точках.

Таким образом, с использованием вышеупомянутых выражений, мы можем получить искомый профиль зуба колеса. При сравнении этого профиля с экспериментально полученным результатом видно, что отклонение не превышает 4%, что служит убедительным подтверждением точности предложенных зависимостей и их возможности для применения в инженерных расчетах.

Существенное влияние на износ зубьев оказывают особенности геометрии и кинематики зубчатого зацепления [4, 17–19]. За время прохождения площадки контакта над данной точкой поверхности при взаимодействии пары зубьев изменяется удельная скорость скольжения, приведенный радиус кривизны ρ_{np} . Эти методы позволяют получить более точные данные, которые необходимы для дальнейшего анализа. Более точное определение данных параметров аналитическими методами позволит повысить качество расчетов на износ, разработать рекомендации по оптимизации конструкции пар трения и технологий поверхностного упрочнения, усовершенствовать методики испытаний на износостойкость. Для этого необходим учет влияния на процесс изнашивания кинематики относительных перемещений и динамики нагружения звеньев машин, обусловленных функционированием пары трения в машинном агрегате.

Исходя из теории трения и изнашивания твердых тел в различных условиях с учетом физики явлений, протекающих в зонах контакта взаимодействующих поверхностей предложенной И.В. Крагельским [6], в зацепления влияние кинематических и геометрических факторов на процесс износа зубьев традиционно выражается через коэффициенты удельного скольжения η или скорости от относительного скольжения $V^{(12)}$, которые позволяют более точно оценить степень воздействия этих факторов на износ и долговечность зубчатых передач, а геометрические через кривизну контактирующих профилей \tilde{K}_1 [4].

Компоненты $V^{(12)}$, $V_K^{(1)}$ и $V_K^{(2)}$, которые присутствуют в приведенной формуле, взяты по модулю. Однако важно отметить, что знаки этих компонентов, отражающие их направления относительно друг друга, также учитываются в расчетах. Это необходимо для более точного моделирования взаимодействия элементов системы. Векторы скоростей перемещения контактной точки в процессе относительного движения по профилям зубьев, с учётом их направления и величины, можно выразить следующим уравнением, что позволит детально анализировать динамику зацепления и взаимодействие шестерни и колеса.

Для нахождения частной производной, которая находится в правой части уравнения, необходимо продифференцировать выражения (2) и (3). Это позволит получить необходимую зависимость, учитывая влияние каждого из параметров на конечный результат.

$$\eta = \frac{V^{(2)}}{V_K^{(1)}} - 1; \eta = 1 - \frac{V_K^{(1)}}{V_K^{(2)}};$$

$$\vec{V}_K^{\omega} = \frac{\partial \vec{r}_i(x_i, y_i)}{\partial y_i} \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial \varphi_i} \frac{dy_i}{dt};$$

$$\frac{\partial r_1(x_1, y_1)}{\partial y_1} = \vec{i}_1 \sum_{K=1}^7 KC_K (y_1 - r_{f_1})^{k-1} + \vec{j}_1; \quad (6)$$

$$\frac{\partial r_2(x_2, y_2)}{\partial y_2} = \vec{i}_2 \sum_{K=1}^7 KD_K (y_2 - r_{f_2})^{k-1} + \vec{j}_2;$$

$$\vec{V}^{(12)} = \vec{V}_K^{(2)} - \vec{V}_K^{(1)},$$

где $V^{(12)}$ – скорость относительного движения (скорость скольжения) колес; $V_K^{(1)}$ и $V_K^{(2)}$ – скорость перемещения точки контакта по поверхностям зубьев шестерни и колеса, соответственно; $i=1,2$ – индекс, указывающий шестерню и колесо

Для определения вектора скорости относительного движения необходимо учесть изменения координат во времени, что можно выразить через производные координат.

Таким образом, коэффициент удельного скольжения определяется с учетом систем уравнений (1), (2) и (5), что позволяет точно учесть все необходимые параметры и их взаимное влияние. Полученная зависимость предоставляет более полное понимание процессов, происходящих в системе, и помогает точно вычислить этот коэффициент для различных условий эксплуатации.

Кривизны поверхностей в нормальном сечении являются одним из основных геометрических параметров зацепления, определяющих несущую способность передачи. Они позволяют выразить радиус кривизны сопряженных профилей. Как упоминалось ранее, приведённые радиусы кривизны, вместе с удельными скольжениями, входят в применяемую методику расчёта скорости изнашивания.

Для вычисления кривизны зуба шестерни и колеса \tilde{K}_1, \tilde{K}_2 применяется метод дифференциальной геометрии:

$$\tilde{K}_1 = \frac{|x_1''|}{\left[1 + (x_1')^2\right]^{1.5}};$$

$$\tilde{K}_2 \left(\vec{V}_K^{(1)} + \vec{V}^{(12)} \right) = \tilde{K}_1 \vec{V}_K^{(1)} - \left(\vec{w}^{(1)} - \vec{w}^{(2)} \right) \vec{e}^{(1)}; \quad (7)$$

$$x_1'' = \sum_{n=0}^{n=7} n(n-1) A_n y_a^{n-2};$$

$$x_1' = \sum_{n=0}^{n=7} n A_n y_a^{n-1},$$

где \tilde{K}_1, \tilde{K}_2 – кривизна зубьев шестерни и колеса соответственно; $\vec{e}^{(1)}$ – вектор орта нормали в системе координат; $\vec{w}^{(1)}$ и $\vec{w}^{(2)}$ – векторы угловых скоростей шестерни и колеса соответственно.

Для нахождения решения по формуле (7) запишем уравнение нормали в виде $\vec{e}^{(1)} = \vec{i} \sin \gamma - \vec{j} \cos \gamma$, после чего, применяя коллинеарность (отношение параллельности) векторов $(\vec{w}^{(1)} - \vec{w}^{(2)})\vec{e}^{(1)}$, а также преобразуя зависимость нормали в скалярную форму, получим зависимость для определения приведенной кривизны профилей по линии их зацепления – K .

$$\begin{aligned} \vec{V}_K^{(2)} &= \vec{V}_K^{(1)} + \vec{V}_K^{(12)}; \\ \vec{V}_K^{(2)} &= \vec{V}_K^{(1)} + K V_K^{(1)} = \vec{V}_K^{(1)} (1 + K); \\ K &= \frac{[x_1(1 + i_{12})] - a_w \sin \varphi_1 w^{(2)}}{\frac{dy_a}{dt}}; \quad (8) \\ \vec{V}_K^{(1)} [K_2(1 + K) - K_1] &= - \left[1 + \frac{1}{i_{12}} \right] \vec{w}^{(1)} \vec{e}^1; \\ K_2 &= \frac{K_1}{1 + K} + \frac{i_{12} - 1}{i_{12}(1 + K)} V_K^{(1)} w^{(1)}. \end{aligned}$$

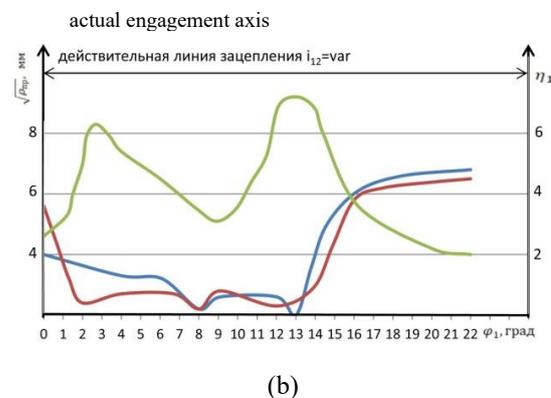
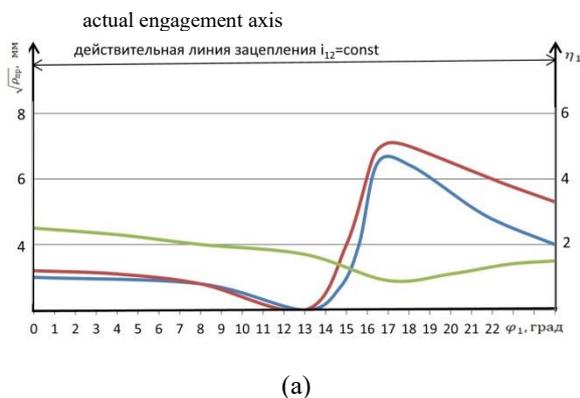


Рисунок 3. Диаграммы распределения $\eta_1, \sqrt{\rho_{np}}, (\sqrt{\rho_{np}})$ по углу поворота шестерни из выражений (6) и (7) ($z_1=17, m=5 \text{ мм}, \Delta S=8\%$): а – $i_{12} = const$; б – $i_{12} = var$

Figure 3. Distribution diagrams $\eta_1, \sqrt{\rho_{np}}, (\sqrt{\rho_{np}})$ according to the gear rotation angle from expressions (6) and (7) ($z_1=17, m=5 \text{ mm}, \Delta S=8\%$)

Заключение

1. В процессе абразивного изнашивания тяжело нагруженных передач происходит не только изменение формы профилей зубьев, но и изменение закона относительного движения колёс. Функция передаточного отношения i_{12} перестаёт быть постоянной и приобретает гармонический характер, причём период её

В данном случае учитывается, что векторы $\vec{V}_K^{(1)}$ и $\vec{e} = (e_{y_1} \vec{i} + e_{x_1} \vec{j})$ коллинеарные. Учитывая, кривизна и радиус кривизны обратные функции получим $\rho_{np} = 1/K$.

Для расчета величин износа сопряженных поверхностей необходимо учитывать их относительное скольжение, зависящее от радиусов кривизны и кинематики относительных перемещений в паре трения и связанное с относительной скоростью. Ниже приводятся графики изменения этих параметров определенных нами аналитически для шестерни и колеса при износе 18% в сравнении с приведенными зависимостями для аналогичной не изношенной передачи для шестерни и колеса, соответственно. Видно, как значительно изменяется произведение приведенного радиуса кривизны $\rho_{np} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$ и коэффициента удельного скольжения $\sqrt{\rho_{np}} \eta$, которое лежит в основе расчетов скорости изнашивания [13] и как резко изменяется приведенный радиус кривизны, который влияет на величину контактных напряжений.

колебаний совпадает с периодом зубцовой частоты. На начальных стадиях износа размах колебаний i_{12} быстро увеличивается. Однако с ростом степени износа темпы увеличения размаха снижаются, и при износе, превышающем 15–20%, размах практически стабилизируется. Также наблюдается, что увеличение модуля передачи приводит к росту размаха колебаний.

Значения колебаний $i12$ при изнашивании могут быть достаточно большими. В ходе экспериментов установлено, что при износе порядка 18% и более, а также при малом числе зубьев шестерни, отношение $i12_{max}$ к $i12_{min}$ достигало 1,3.

2. В процессе изнашивания линия зацепления искривляется, а её начало, и конец сдвигаются в направлении вращения зубчатых колёс. Коэффициент перекрытия при этом постепенно снижается, но при степени износа свыше 18–20% стабилизируется в пределах 1,03–1,1.

3. С изменением линии зацепления меняются условия изнашивания, связанных с удельным скольжением и приведенным радиусом кривизны.

4. Изменения линии зацепления в процессе изнашивания проявляют схожую тенденцию при различных модулях, передаточных числах, твёрдости зубьев, а также при наличии или отсутствии смещения исходного контура.

5. Разработаны аналитические зависимости, которые позволяют выполнять расчёты геометрических, кинематических и качественных характеристик передачи и прогнозировать скорость изнашивания шестерни и колеса, оценивать величину контактных напряжений и коэффициента удельного скольжения по линии зацепления пары зубьев на различной стадии износа.

Литература

- 1 Прохоров В.П., Тимофеев Г.А., Чернышова И.Н. Эволюция эвольвентного зацепления при износе от истирания // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2015. № 2. С. 14–21.
- 2 Акопян М.Г. Модель изнашивания зубчатых колес, учитывающая эволюционный характер процесса взаимодействия // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2017. № 3 (43). С. 106–120. doi: 10.21685/2072-3059-2017-3-9
- 3 Шевчук В.П., Шеховцов В.В., Клементьев Е.В. Исследование динамических характеристик трансмиссии сельскохозяйственного трактора шестого тягового класса // Современные наукоемкие технологии. 2013. № 2. С. 44–49.
- 4 Усов П.П. Численный анализ переходных процессов в вязко-упруго-гидродинамическом контакте при реверсивном движении // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2021. № 2. С. 81–90.
- 5 Гусев И.В., Симонова Е.В. Анализ геометрии и кинематики зубчатых передач с учетом износа. Москва: Машиностроение, 2005.
- 6 Каменев М.И., Ширинский Ю.В. Изучение параметров зубчатых передач в условиях изменения их геометрии и кинематики. Москва: Научно-техническая литература, 2002.
- 7 Авсиевич А.М., Николаев В.А., Адаменко Д.В. О прогнозировании износа в высших кинематических парах // Теоретическая и прикладная механика. Международный научно-технический сборник. 2009. № 24. С. 236–238.
- 8 Багмутов В.П., Савкин А.Н., Паршев С.Н. Изнашивание деталей узлов трения наземных транспортных средств. Волгоград: ВолгГТУ, 2011. 56 с.
- 9 Маликов А.А., Лихошерст В.В., Шалобаев Е.В. Анализ и классификация процесса изнашивания зубчатых передач // Справочник. Инженерный журнал. 2011. № 9. С. 2–11.
- 10 Daubach K., Oehler M., Sauer B. Wear simulation of worm gears based on an energetic approach // Forsch. Ingenieurwes. 2022. V. 86. P. 367–377. doi: 10.1007/s10010-021-00525-3
- 11 Zakharenkov N.V., Kononov V.E., Kvasov I.N. et al. Increasing operation capacity for spherical bearing of indexing spatial mechanism under load // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1260. Iss. 11. P. 112037.
- 12 Lin W.Y., Tsai Y.H., Hsiao K.M. Optimum variable input speed for kinematic performance of Geneva mechanisms using teaching-learning-based optimization algorithm // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2017. V. 231. Iss. 10. P. 1871–1883.
- 13 Prabhu Sekar R., Sathishkumar R. Enhancement of wear resistance on normal contact ratio spur gear pairs through non-standard gears // Wear. 2017. V. 380–381. P. 228–239. doi: 10.1016/j.wear.2017.03.022
- 14 Breki A.D., Chulkin S.G., Gvozdev A.E. et al. Empirical mathematical model for the wear kinetics of porous gas-thermal coatings // Russ. Metall. (Metally). 2021. V. 2021. № 4. P. 496–500.
- 15 Rohmoser A., Bode C., Schleich B. et al. Influence of metal gear tooth geometry on load and wear within metal-polymer gear pairs // Appl. Sci. 2022. V. 12. № 1. P. 128. doi: 10.3390/app12010128
- 16 Radzevich S.P. Theory of gearing: kinematics, geometry, and synthesis. Boca Raton: CRC Press, 2018.
- 17 Alharbi K.A. Wear and mechanical contact behavior of polymer gears // J. Tribol. 2019. V. 141. № 1. Art. 011101.
- 18 Rohmoser A., Hagenah H., Merklein M. Adapted tool design for the cold forging of gears from non-ferrous and light metals // Int. J. Adv. Manuf. Technol. 2021. V. 113. P. 1833–1848.
- 19 Fan X., Wang P., Li Y. Gear wear prediction based on the theorem of degradation entropy generation // Tribol. Int. 2024. V. 191. Art. 109175. doi: 10.1016/j.triboint.2023.109175
- 20 Yan Y., Jiang C., Li W. Simulation on coupling effects between surface wear and fatigue in spur gear // Eng. Fail. Anal. 2022. V. 134. Art. 106055. doi: 10.1016/j.engfailanal.2022.106055
- 21 Lin J., Fan X., Wang P., Li Y., Shi Z., Olofsson U. Gear wear prediction based on the theorem of degradation entropy generation // Tribol. Int. 2024. V. 191. Art. 109175. doi: 10.1016/j.triboint.2023.109175
- 22 Ishmurov K., Hamroev R.K., Kurbonov B.B., Mirzaev N.N. Method for modeling the process of wear of gear teeth // J. Phys.: Conf. Ser. 2022. V. 2176. Art. 012096. doi: 10.1088/1742-6596/2176/1/012096

References

- 1 Prokhorov V.P., Timofeev G.A., Chernyshova I.N. Evolution of involute engagement during abrasion. News of higher educational institutions. Mechanical engineering. 2015. no. 2. pp. 14–21. (in Russian)
- 2 Hakobyan M.G. A model of gear wear that takes into account the evolutionary nature of the interaction process. News of higher educational institutions. The Volga region. Technical sciences. 2017. no. 3(43). pp. 106–120. doi:10.21685/2072-3059-2017-3-9 (in Russian)

- 3 Shevchuk V.P., Shekhovtsov V.V., Klementyev E.V. Investigation of dynamic transmission characteristics of an agricultural tractor of the sixth traction class. *Modern science-intensive technologies*. 2013. no. 2. pp. 44–49. (in Russian)
- 4 Usov P.P. Numerical analysis of transient processes in viscoelastic-hydrodynamic contact in reverse motion. *Problems of mechanical engineering and automation*. 2021. no. 2. pp. 81–90. (in Russian)
- 5 Gusev I.V., Simonova E.V. Analysis of geometry and kinematics of gears taking into account wear. Moscow: Mashinostroenie, 2005. (in Russian)
- 6 Kamenev M.I., Shirinsky Yu.V. Study of gear parameters under conditions of changes in their geometry and kinematics. Moscow: Scientific and technical literature, 2002. (in Russian)
- 7 Avsievich A.M., Nikolaev V.A., Adamenko D.V. On wear prediction in higher kinematic pairs. *Theoretical and applied mechanics. International scientific and technical collection*. 2009. Issue. 24. pp. 236–238. (in Russian)
- 8 Bagmutov V.P., Savkin A.N., Parshev S.N. Wear of parts of friction units of land vehicles. *VolgSTU*, 2011. 56 p. (in Russian)
- 9 Malikov A.A., Likhoshester V.V., Shalobaev E.V. Analysis and classification of the wear process of gears. *Handbook. Engineering magazine*. 2011. no. 9. pp. 2–11. (in Russian)
- 10 Daubach K., Oehler M., Sauer B. Wear simulation of worm gears based on an energetic approach. *J. Forsch Ingenieurwes*. 2022. no. 86. pp. 367–377. doi:10.1007/s10010-021-00525-3
- 11 Zakharenkov N.V., Konovalov V.E., Kvasov I.N. et al. Increasing operation capacity for spherical bearing of indexing spatial mechanism under load. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. vol. 1260. no. 11. Art. 112037. doi:10.1088/1742-6596/1260/11/112037
- 12 Lin W.Y., Tsai Y.H., Hsiao K.M. Optimum variable input speed for kinematic performance of Geneva mechanisms using teaching-learning-based optimization algorithm. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers (Part C): Journal of Mechanical Engineering Science*. 2017. vol. 231. no. 10. pp. 1871–1883. doi:10.1177/0954406215627825
- 13 Prabhu Sekar R., Sathishkumar R. Enhancement of wear resistance on normal contact ratio spur gear pairs through non-standard gears. *Wear*. 2017. vol. 380-381. pp. 228–239. doi:10.1016/j.wear.2017.03.022
- 14 Breki A.D., Chulkin S.G., Gvozdev A.E. et al. Empirical mathematical model for the wear kinetics of porous gas-thermal coatings. *Russian metallurgy (Metally)*. 2021. vol. 2021. no. 4. pp. 496–500. doi:10.1134/S0036029521040046
- 15 Rohrmoser A., Bode C., Schleich B. et al. Influence of metal gear tooth geometry on load and wear within metal-polymer gear pairs. *Applied Sciences*. 2022. no. 1. pp. 128–144. doi:10.3390/app12010270
- 16 Radzevich S.P. *Theory of gearing: kinematics, geometry, and synthesis*. Boca Raton: CRC Press, 2018. URL: <https://ccn.loc.gov/201800342>
- 17 Alharbi K.A. Wear and mechanical contact behavior of polymer gears. *Journal of Tribology*. 2019. vol. 141. no. 1. Art. 011101. doi:10.1115/1.4040645
- 18 Rohrmoser A., Hagenah H., Merklein M. Adapted tool design for the cold forging of gears from non-ferrous and light metals. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2021. vol. 113. pp. 1833–1848. doi:10.1007/s00170-021-06729-9
- 19 Fan X., Wang P., Li Y. Gear wear prediction based on the theorem of degradation entropy generation. *Tribology International*. 2024. vol. 191. Art. 109175. doi:10.1016/j.triboint.2023.109175
- 20 Yan Y., Jiang C., Li W. Simulation on coupling effects between surface wear and fatigue in spur gear. *Engineering Failure Analysis*. 2022. vol. 134. Art. 106055. doi:10.1016/j.engfailanal.2022.106055
- 21 Lin J., Fan X., Wang P., Li Y., Shi Z., Olofsson U. Gear wear prediction based on the theorem of degradation entropy generation. *Tribology International*. 2024. vol. 191. Art. 109175. doi:10.1016/j.triboint.2023.109175
- 22 Ishmuratov Kh., Hamroev R.K., Kurbonov B.B., Mirzaev N.N. Method for modeling the process of wear of gear teeth. *Journal of Physics: Conference Series*. 2022. vol. 2176. Art. 012096. doi:10.1088/1742-6596/2176/1/012096

Сведения об авторах

Анатолий М. Попов д.т.н., профессор, кафедра мехатроники и автоматизации технологических систем, Кемеровский государственный университет, ул. Красная, 6, г. Кемерово, 650000, Россия, popov4116@yandex.ru

<https://orcid.org/0000-0003-0728-7211>

Анатолий Л. Майтаков д.х.н., профессор, кафедра управления качеством, Кемеровский государственный университет, ул. Красная, 6, г. Кемерово, 650000, Россия, may585417@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-0714-204X>

Рауф В-О. Мехдиев аспирант, кафедра мехатроники и автоматизации технологических систем, Кемеровский государственный университет, ул. Красная, 6, г. Кемерово, 650000, Россия, popov4116@yandex.ru

<https://orcid.org/0009-0005-5536-5482>

Надежда Т. Ветрова к.т.н., доцент, кафедра управления качеством, Кемеровский государственный университет, ул. Красная, 6, г. Кемерово, 650000, Россия, veteroknadi@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-7131-0511>

Вклад авторов

Все авторы в равной степени принимали участие в написании рукописи и несут ответственность за плагиат

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about authors

Anatolij M. Popov Dr. Sci. (Engin.), professor, mechatronics and automation of technological systems department, Kemerovo State University, Krasnaya Str. 6, Kemerovo, 650000, Russia, popov4116@yandex.ru

<https://orcid.org/0000-0003-0728-7211>

Anatolij L. Maytakov Dr. Sci. (Engin.), professor, quality management department, Kemerovo State University, Krasnaya Str. 6, Kemerovo, 650000, Russia, may585417@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-0714-204X>

Rauf V-O. Mehdiyev graduate student, mechatronics and automation of technological systems department, Kemerovo State University, Krasnaya Str. 6, Kemerovo, 650000, Russia, popov4116@yandex.ru

<https://orcid.org/0009-0005-5536-5482>

Nadezhda T. Vetrova Cand. Sci. (Engin.), docent, quality management department, Kemerovo State University, Krasnaya Str. 6, Kemerovo, 650000, Russia, veteroknadi@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-7131-0511>

Contribution

All authors are equally involved in the writing of the manuscript and are responsible for plagiarism

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила 26/02/2025	После редакции 13/03/2025	Принята в печать 08/04/2026
Received 26/02/2025	Accepted in revised 13/03/2025	Accepted 08/04/2026