

Профессор В.Н. Василенко, профессор А.Н. Остриков,
(Воронеж. гос. ун-т инж. технол.) кафедра процессов и аппаратов химических и пище-
вых производств, тел. (473) 255-35-54

профессор В.И. Ряжских
(Воронеж. гос. ун-т инж. технол.) кафедра высшей математики, тел. (473) 255-35-54

Математическая модель течения двух вязкопластичных сред в формующем канале экструдера при коэкструзии

На базе классических уравнений изотермического напорного течения двух реологически различных несмешивающихся вязкопластичных сред в цилиндрическом канале, подчиняющихся закону Оствальда-де-Вилля, синтезирована модель течения двух таких сред в формующем канале экструдера при коэкструзии. Предложена методика выбора диаметра дозирующего патрубка по требуемой величине отношения объемных расходов экструдата и начинки.

On the basis of the classical equations of an isothermal pressure head current of two rheology the various not mixing up viscou- plastic environments in the cylindrical channel, Ostvald-de-Vil submitting to the law, the model of a current of two viscous-plastic environments in the moulding channel extruder is synthesised at co-extrusion on which basis the technique of a choice of diameter of a dosing out branch pipe on the demanded value of the ratio of volume expenditures of two viscous-plastic environments (extrudat and stuffings is offered).

Ключевые слова: коэкструзия, течение материалов, дозирующий канал, экструдат, рецептура продукта.

Композиционное совмещение в одном продукте растительных и животных составляющих с заданной рецептурой может быть достигнуто с помощью коэкструзии, использование которой позволит значительно расширить ассортимент и номенклатуру выпускаемых поликомпонентных продуктов, сбалансированных по химическому составу и с программируемыми свойствами. При их производстве внутренний слой формируется из жировитаминной начинки, а внешняя оболочка – из экструдата, полученного на основе зерновых [1].

Процесс коэкструзии в каналах формующей головки будет стабильным, если при давлении, достаточном для распределения материала, время пребывания в нем экструдата будет минимальным [2]. Решение данной задачи требует точного описания течения материалов в формующем канале.

Рассмотрим цилиндрическую формующую головку (рис. 1), в которую подаются две неньютоновские среды с различными реологическими законами без взаимного перемешивания.

Протекание изучаемого процесса зависит от соблюдения абсолютного равенства условий в подводящем патрубке и предматричной зоне.

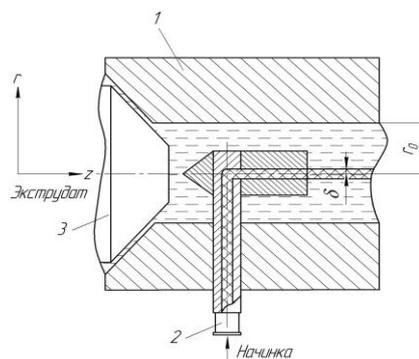


Рис. 1. Расчетная схема течения экструдата и начинки в формующем канале экструдера: 1 – корпус формующей головки; 2 – подводящий патрубок; 3 – предматричная зона

В изотермических средах векторная запись уравнений неразрывности и движения примет вид [5]:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot \bar{v}), \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = -\nabla P + [\nabla \cdot \tau] + \rho \cdot \bar{g}, \quad (2)$$

где D – полный дифференциал; t – текущее время; ρ – плотность среды; ∇ – градиент; \vec{v} – вектор скорости движения среды; ∇P – градиент давления; τ – касательное напряжение; \vec{g} – вектор ускорения силы тяжести.

Принимая, что среда несжимаема ($\rho = \text{const}$) и сила тяжести пренебрежимо мала по сравнению с действующим градиентом давления, запишем уравнения (1) и (2) в цилиндрической системе координат с учетом симметричности оси в компонентной форме:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \tau_r) + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \tau_{rr}) + \frac{\partial r_{rz}}{\partial z}, \quad (4)$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \tau_{rz}) + \frac{\partial r_{zz}}{\partial z}, \quad (5)$$

где r, z – локальные цилиндрические координаты; v_r, v_z – координаты вектора скорости \vec{v} ; $\tau_{rz}, \tau_{zz}, \tau_{rr}$ – компоненты тензора напряжений τ .

Учитывая высокую вязкость сред, концевыми эффектами (начальный гидродинамический участок и выходное сечение формирующего канала) можно пренебречь, тогда течение будет однонаправленным, то есть компоненты скорости будут зависеть только от цилиндрической координаты r . В этом случае система (3)-(5) упрощается:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \tau_{rz}) = \frac{\partial \rho}{\partial z}, \quad (6)$$

а компонента тензора напряжения τ_{rz} , в соответствии с законом Оствальда-де-Вилля примет вид

$$\tau_{rz} = \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \quad (7)$$

в котором динамическая вязкость:

$$\eta = \eta^0 \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^{n-1}, \quad (8)$$

где η^0 – вязкость среды при скорости сдвига, равной 1 с^{-1} , n – индекс течения, соответствующий при $0 < n < 1$ вязкопластической среде, а при $n > 1$ – дилатантной.

Таким образом, на основании (6)-(8) можно выразить однонаправленное движение неньютоновской среды:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \eta^0 \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^{n-1} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial z}.$$

Так как при этом в канале выполняется условие $(\partial v_z / \partial r) \neq 0$, то

$$\frac{\eta^0}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^n \right] = \frac{\partial \rho}{\partial z}. \quad (9)$$

При течении экструдата и начинки в формирующем канале экструдера уравнение (9) справедливо, поэтому течение двух несмешивающихся вязкопластических сред в цилиндрическом канале описывается системой

$$\frac{\eta_1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial v_1}{\partial r} \right)^{n_1} \right] = \frac{\partial \rho}{\partial z}, \quad (10)$$

$$\frac{\eta_2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial v_2}{\partial r} \right)^{n_2} \right] = \frac{\partial \rho}{\partial z}, \quad (11)$$

где η_1, η_2 – вязкость экструдата и начинки при скорости сдвига, равной 1 с^{-1} ; n_1, n_2 – индекс течения экструдата и начинки; v_1, v_2 – скорость экструдата и начинки, м/с.

Система (10) и (11) замыкается граничными условиями "прилипания" на корпусе формирующего канала

$$v_1(r_o) = 0,$$

равенства скоростей течения экструдата и начинки на границе их раздела

$$v_1(\delta) = v_2(\delta)$$

и касательных напряжений

$$\eta_1 \left[\frac{\partial v_1(\delta)}{\partial r} \right]^{n_1} = \eta_2 \left[\frac{\partial v_2(\delta)}{\partial r} \right]^{n_2},$$

а также условием симметричности оси

$$\frac{\partial v_2(0)}{\partial r_o} = 0,$$

где r_o, δ – радиусы подводящего патрубка и формирующего канала, м.

Решая дифференциальные уравнения (10) и (11), получаем:

$$v_1(r) = \left[-\frac{n_1}{n_1 + 1} \left(\frac{1}{2\eta_1} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^{\frac{1}{n_1}} r_o^{\frac{1+n_1}{n_1}} \right] \times \left[1 - \left(\frac{r}{r_o} \right)^{\frac{1+n_1}{n_1}} \right], \quad (12)$$

$$v_2(r) = \left[-\frac{n_2}{n_2+1} \left(\frac{1}{2\eta_2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^{\frac{1}{n_2}} r_o^{\frac{1+n_2}{n_2}} \right] \times \left[\left(\frac{\delta}{r_o} \right)^{\frac{1+n_2}{n_2}} - \left(\frac{r}{r_o} \right)^{\frac{1+n_2}{n_2}} \right] + \left[-\frac{n_1}{n_1+1} \left(\frac{1}{2\eta_1} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^{\frac{1}{n_1}} r_o^{\frac{1+n_1}{n_1}} \right] \cdot \left[1 - \left(\frac{\delta}{r_o} \right)^{\frac{1+n_1}{n_1}} \right]. \quad (13)$$

В относительном виде (12) и (13) запишем при условии $\Delta \leq R \leq 1$

$$V_1(R) = 1 - R^{\frac{1+n_1}{n_1}};$$

при $0 \leq R \leq 1$

$$V_2(R) = 1 - \Delta^{\frac{1+n_1}{n_1}} + K \left(\Delta^{\frac{1+n_2}{n_2}} - R^{\frac{1+n_2}{n_2}} \right),$$

где

$$K = \frac{n_2(n_1+1)}{n_1(n_2+1)} \cdot \frac{\eta_1^{n_1}}{\eta_2^{n_2}} \cdot \left(\frac{r_o}{2} \frac{\partial P}{\partial z} \right)^{\frac{n_1-n_2}{n_1 n_2}};$$

$$V_1(R) = \frac{v_1(r)}{-\frac{n_1}{n_1+1} \left(\frac{1}{2\eta_1} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^{\frac{1}{n_1}} r_o^{\frac{1+n_1}{n_1}}};$$

$$V_2(R) = \frac{v_2(r)}{-\frac{n_1}{n_1+1} \left(\frac{1}{2\eta_1} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^{\frac{1}{n_1}} r_o^{\frac{1+n_1}{n_1}}};$$

$$R = r/r_o \text{ и } \Delta = \delta/r_o.$$

Вычислительный эксперимент проводили для случая, когда экструдат и начинка - вязкопластические среды, то есть $0 < n_1, n_2 < 1$. Заметим, что нет никаких затруднений

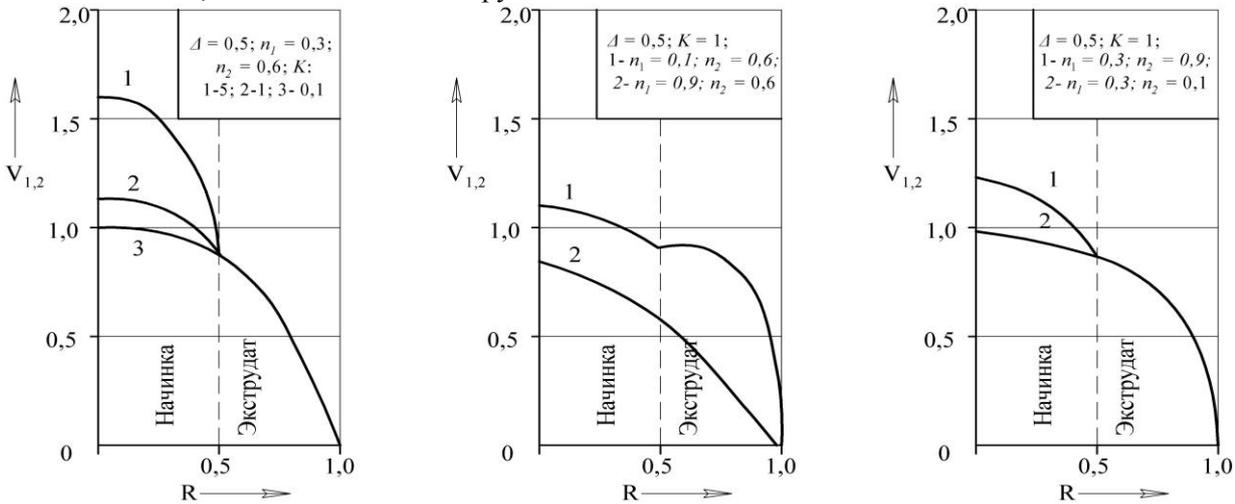


Рис. 2. Профили скоростей при различных значениях K ; n_1 и n_2

при рассмотрении не только дилатантных сред, но и смешанных. Вязкопластическое течение проявляет характерную черту вязких жидкостей, особенно у стенки канала. Физический смысл параметра K идентичен градиенту давления (рис. 2). Чем больше перепад давления в канале, тем выше скорость течения среды у его оси, причем характеристики пристенного течения остаются постоянными. Варьирование индекса течения у жидкости, текущей у стенки, сильно влияет на расходные характеристики.

Анализ вычислительных экспериментов показал, что при дозировании сред в формующем канале, если задано соотношение объемных расходов экструдата и начинки, необходимо определять гидравлический диаметр дозирующего патрубка.

Так, если

$$Q_1/Q_2 = \gamma,$$

где

$$Q_1 = 2\pi \int_{\delta}^{r_o} r v_1 dr = 2\pi r_o^2 \int_{\Delta}^1 R V_1(R) dR$$

и

$$Q_2 = 2\pi \int_{\delta}^{\delta} r v_2 dr = 2\pi r_o^2 \int_{\Delta}^{\Delta} R V_2(R) dR,$$

то радиус дозирующего канала (относительно Δ) определяем из трансцендентного уравнения:

$$\frac{1}{2}(1 - \Delta^2) - \frac{n_1}{1 + 3n_1} \left(1 - \Delta^{\frac{1+3n_1}{n_1}} \right) = \gamma \Delta \left\{ \left[1 - \Delta \left(\Delta^{\frac{1}{n_1}} - K \Delta^{\frac{1}{n_2}} \right) \right] - \frac{n_2}{1 + 3n_2} K \Delta^{\frac{1}{n_2}} \right\}. \quad (14)$$

Пример расчета. Определим диаметр дозирующего патрубка при получении полнорационного комбикорма с начинкой методом коэкструзии. Реологические характеристики зерновой смеси и жировой начинки в соответствии с [3] таковы: $\eta_1 = 11724 \text{ Па}\cdot\text{с}^n$, $n_1 = 0,549$; $\eta_2 = 196 \text{ Па}\cdot\text{с}$, $n_2 = 1$ радиус формирующего канала экструдера $r_0 = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, длина $\Delta Z = 9,87 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, давление в предматричной зоне $P_1 = 7 \text{ МПа}$, атмосферное давление $P_2 = 0,1 \text{ МПа}$, сбалансированное соотношение зерновой составляющей и жировой начинки 2:1 [5], то есть $\gamma = 2$.

Градиент давления в формирующем канале

$$\frac{\partial p}{\partial z} \approx \frac{(P_1 - P_2)}{\Delta z} = 7,8 \cdot 10^8 \text{ Па/м}, K = 0,593.$$

В результате решения трансцендентного уравнения (14) методом бисекции [4] находим $\Delta = 0,1091$, $\delta = 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}$. Если при определении объемных расходов компонентов комбикорма исходить из соотношения площадей проходных сечений течения экструдата и начинки, то радиус дозирующего канала равен $\delta = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$. Таким образом, ошибка в рецептуре комбикорма в этом случае может достигать существенных значений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Остриков, А.Н. Процессы и аппараты пищевых производств [Текст] / А.Н. Остриков [и др.]. Кн. I. – СПб.: Гиорд, 2007. – 704 с.
2. Остриков, А.Н. Процессы и аппараты пищевых производств [Текст] / А.Н. Остриков [и др.]. Кн. II. – СПб.: Гиорд, 2007. – 608 с.
3. Остриков, А.Н. Современное состояние и основные направления совершенствования экструдеров [Текст] / А. Н. Остриков, О. В. Абрамов, В. Н. Василенко, К. В. Платов. – М., 2004. – 41 с.
4. Остриков, А.Н. Технология экструзионных продуктов [Текст] / А.Н. Остриков, Г.О. Магомедов, Н.М. Дерканосова [и др.]. – СПб.: Проспект Науки, 2007. – 202 с.
5. Зубкова, Т.М. Повышение эффективности работы одношнекового экструдера для производства кормов на основе параметрического синтеза: Автореф. дис. ... докт. техн. наук: 05.20.01 / Оренбург. гос. аграр. ун-т. – Оренбург, 2006. – 39 с.
6. Микаэли, В. Экструзионные головки для пластмасс и резины. Конструкция и технические расчеты [Текст] / под ред. В.П. Володина. – СПб.: Профессия, 2007. – 472 с.
7. Тадмор, З. Теоретические основы переработки полимеров [Текст] / З. Тадмор, К. Гогос; под ред. Р.В. Горнера. – М.: Химия, 1984. – 632 с.