

УДК 51-74

Профессор С.Т. Антипов, доцент Д.А. Казарцев,
доцент А.В. Журавлев, аспирант С.А. Виниченко
(Воронеж. гос. ун-т. инж. технол.) кафедра машин и аппаратов пищевых производств.
тел. (473) 255-38-96
E-mail: vini-46@yandex.ru

Professor S.T. Antipov, associate Professor D.A. Kazartsev,
associate Professor A.V. Zhuravlyov, post-graduate S.A. Vinichenko
(Voronezh state university of engineering technologies) Department of machines and apparatuses
of the food industry. Tel.: (473) 255-38-96
E-mail: vini-46@yandex.ru

Разработка математической модели процесса сушки плодов черной смородины в вакуум-аппарате с СВЧ-энергоподводом

Development of mathematical model of black currant berries drying process in vacuum device with the microwave power supply

Реферат. Разработана математическая модель процесса сушки плодов черной смородины в вакууме с СВЧ-энергоподводом, отличающаяся высокой пространственной и временной детализацией, учитывается структура отдельных плодов и слоя плодов, теплофизические параметры зависят от координаты и времени, а также с учетом изменения формы плодов и структуры слоя плодов по мере обезвоживания. Для моделирования механического поведения плодов используется метод динамики частиц, который в последние десятилетия все чаще используется в различных отраслях науки и техники. Для того чтобы модель обладала высоким пространственным разрешением, моделируемый слой плодов состоит из 20–50 отдельных плодов, при этом каждый плод, в зависимости от диаметра, разбивается приблизительно на 100 отдельных элементов. Элементы плодов по своим физическим свойствам делятся на 3 типа (кожура, мякоть, семена). Поэтому в целом, с точки пространственной детализации, слой плодов состоит из 2000–5000 элементов. Моделирование производится в двухмерном декартовом пространстве X–Z. Состояние каждого элемента-круга задается четырьмя переменными: декартовыми координатами его центра и двумя составляющими скорости. Механическое взаимодействие элементов между собой принято вязкоупругим, что позволяет учитывать основные механические свойства плодов – модуль упругости, коэффициент внутреннего трения. В рамках разработанной модели учитывается, что между соседними элементами могут возникать силы отталкивания (при внедрении элементов друг в друга), или притяжения (при отдалении сцепленных элементов друг от друга). Описание процессов тепло- и влагообмена между элементами, а также между элементами и окружающей средой базируется на основе общепринятых уравнений сушки. В модели считается, что подводимая мощность СВЧ - излучения перераспределяется в нагреваемом объеме пропорционально влажности элементов.

Summary. The mathematical model of black currant berries drying process in vacuum device with the microwave power supply, differing in high space and temporary specification is developed, the structure of separate berries and a layer of berries is considered, heat- and physical parameters depend on coordinate and time as well as in the accounting of berries form change and a berries layer structure in the dehydration process. We used the particles dynamics method for modeling of mechanical behavior of berries which is increasingly being used now in different branches of science and technology. To give the model the high space specification the modeled berries layer consists of 20–50 separate berries, each berry depending on diameter being broken into approximately 100 separate elements. Berries elements are divided into 3 types depending on the physical properties (peel, pulp, seeds). Therefore, in general, from the point of space detail, a layer of berries consists of 2000–5000 elements. Modeling is carried out in two-dimensional Cartesian space X–Z. The condition of each element of circle is set by four variables: Cartesian coordinates of its center and two components of speed. Mechanical interaction of elements among themselves is accepted to be viscous and elastic that allows to consider the main mechanical properties of berries – the elasticity module, internal friction index. Within the developed model it is considered that between the neighbor elements there can be pushing away forces (at the introduction of elements into each other), or attractions (at a distance of the linked elements from each other). The description of the processes of warm and moisture exchange between the elements as well as between the elements and environment is based upon the standard equations of drying. In model it is considered that the microwave power brought is redistributed in the heated volume in proportion to elements moisture.

Ключевые слова: сушка, черная смородина, математическая модель, вакуум, тепло- массообмен, СВЧ-энергоподвод.

Keywords: drying, black currant, mathematical model, vacuum, heat and mass exchange, the microwave power supply.

© Антипов С.Т., Казарцев Д.А.,
Журавлев А.В., Виниченко С.А., 2014

Процесс сушки плодов черной смородины является чрезвычайно сложным, поэтому к математической модели процесса предъявляются высокие требования. В процессе сушки плоды уменьшаются в объеме ориентировочно в 3–4 раза, существенно изменяются физические характеристики (некоторые – на несколько порядков) как отдельного плода, так и слоя плодов в сушильной установке.

Многие известные модели процесса сушки используют приближения постоянства геометрических параметров объекта сушки и постоянства его физических свойств [1–5]. Однако при описании СВЧ-сушки плодов черной смородины такие модели имели бы низкую адекватность. Поэтому в настоящей работе поставлена задача разработать математическую модель процесса сушки, обладающую высокой детализацией и высокой адекватностью, базирующейся на общепринятых уравнениях сушки, но использующей в полной мере вычислительные возможности современных компьютеров [6].

Разрабатываемая модель должна описывать целый ряд физических процессов, протекающих при сушке слоя плодов черной смородины:

- изменение формы отдельного плода;
- изменение структуры слоя плодов;
- внутренний тепло- и влагообмен внутри плода;
- тепло- и влагообмен в слое плодов;
- тепло- и влагообмен с сушильным агентом.

Каждый процесс в предлагаемой модели описывается соответствующими дифференциальными и алгебраическими уравнениями.

Для моделирования механического поведения плодов используется метод динамики частиц, который в последние десятилетия все чаще используется в различных отраслях науки и техники [7–8].

Для того чтобы модель обладала высоким пространственным разрешением, моделируемый слой плодов состоит из 20–50 отдельных плодов, при этом каждый плод, в зависимости от диаметра, разбивается приблизительно на 100 отдельных элементов (рисунок 1). Элементы плодов по своим физическим свойствам делятся на три типа (кожура, мякоть, семена). Поэтому в целом, с точки пространственной детализации, слой плодов состоит из 2000–5000 элементов.

Элементы имеют возможность двигаться в процессе сушки по законам классической механики, что приводит к изменению как формы отдельных плодов, так и структуры всего слоя плодов.

В частности, в модели воспроизводится уменьшение в объеме плода и сморщивание его поверхности (рисунок 1), уменьшение толщины слоя плодов и исчезновение просветов между плодами (рисунок 2).

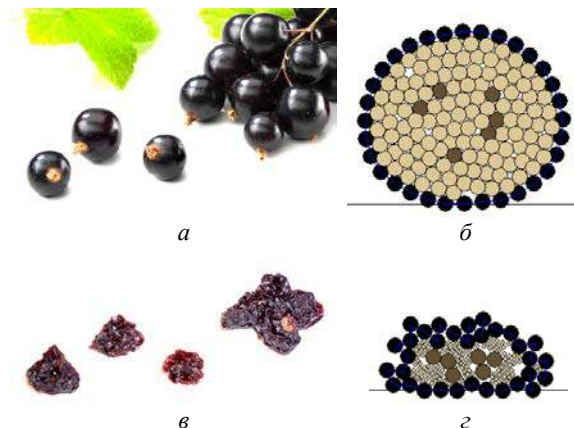


Рисунок 1. Плоды черной смородины (а, в) и их представление в модели (б, з): а, б – до сушки; в, з – после сушки

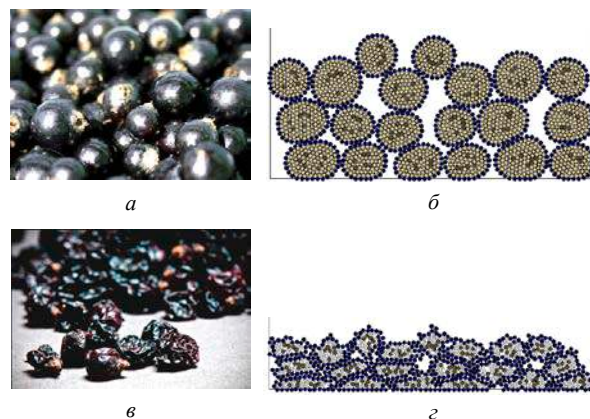


Рисунок 2. Слой плодов черной смородины (а, в) и его представление в модели (б, з): а, б – до сушки; в, з – после сушки

Моделирование производится в двухмерном декартовом пространстве $X-Z$. Состояние каждого элемента-круга E_i задается четырьмя переменными: декартовыми координатами его центра (x_i, z_i) и двумя составляющими скорости (v_{xi}, v_{zi}). Механическое взаимодействие элементов между собой принято вязкоупругим, что позволяет учитывать основные механические свойства плодов – модуль упругости, коэффициент внутреннего трения.

В рамках разработанной модели учитывается, что между соседними элементами мо-

гут возникать силы отталкивания (при внедрении элементов друг в друга), или притяжения (при отдалении сцепленных элементов друг от друга) (рисунок 3).

Уравнения движения элементов составляются на основе второго закона Ньютона:

$$\left\{ \begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= \sum_{j=1, j \neq i}^{N_3} \left\{ \begin{aligned} &c_{ij} \left(\frac{d_i + d_j}{2} - r_{ij} \right) \frac{(x_i - x_j)}{r_{ij}} + k_{ij} \left(r_{ij} - \frac{d_i + d_j}{2} \right) (v_{xi} - v_{xj}), \quad r_{ij} < \frac{d_i + d_j}{2} + \Delta d_B; \\ &0, \quad r_{ij} \geq \frac{d_i + d_j}{2} + \Delta d_B; \end{aligned} \right. \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= -m_i g + \sum_{j=1, j \neq i}^{N_3} \left\{ \begin{aligned} &c_{ij} \left(\frac{d_i + d_j}{2} - r_{ij} \right) \frac{(z_i - z_j)}{r_{ij}} + k_{ij} \left(r_{ij} - \frac{d_i + d_j}{2} \right) (v_{zi} - v_{zj}), \quad r_{ij} < \frac{d_i + d_j}{2} + \Delta d_B; \\ &0, \quad r_{ij} \geq \frac{d_i + d_j}{2} + \Delta d_B; \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \quad (1)$$

где i – номер элемента; m_i и d_i – масса и диаметра i -го элемента; x_i, z_i – декартовы координаты элемента; t – время; N_3 – количество элементов; j – номер элемента, возможно контактирующего с i -м элементом; c_{ij} и d_{ij} – ко-

эффициенты жесткости и вязкости взаимодействия элементов i и j ; r_{ij} – расстояние между центрами элементов i и j ; v_{xi}, v_{zi} – декартовы составляющие скорости i -го элемента; d_B – расстояние ограничения взаимодействия между элементами; g – ускорение свободного падения.

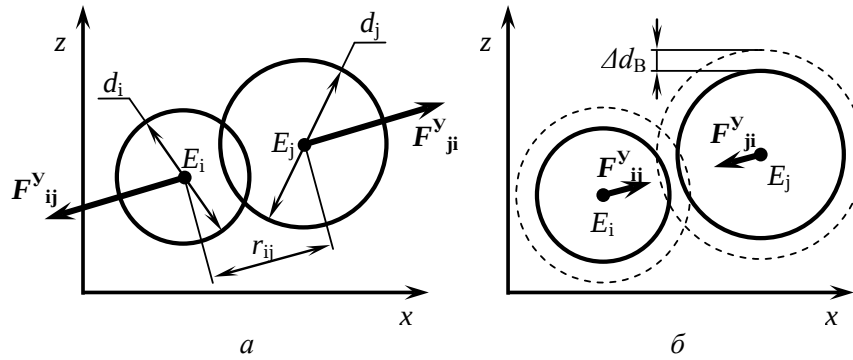


Рисунок 3. Силы упругого взаимодействия элементов плодов смородины при контакте: a – силы отталкивания при внедрении элементов друг в друга; b – силы притяжения при удалении элементов друг от друга

Расстояние r_{ij} между центрами элементов рассчитывается через координаты центров по теореме Пифагора: $r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$.

Уравнения (1) представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка и решаются в процессе моделирования численным методом – методом Рунге-Кутты второго порядка [9]:

$$\begin{aligned} x_i^{\tau+1} &= x_i^{\tau} + v_{xi}^{\tau} \cdot \Delta t + a_{xi}^{\tau} \cdot (\Delta t)^2 / 2; \\ v_{xi}^{\tau+1} &= v_{xi}^{\tau} + a_{xi}^{\tau} \cdot \Delta t; \\ z_i^{\tau+1} &= z_i^{\tau} + v_{zi}^{\tau} \cdot \Delta t + a_{zi}^{\tau} \cdot (\Delta t)^2 / 2; \\ v_{zi}^{\tau+1} &= v_{zi}^{\tau} + a_{zi}^{\tau} \cdot \Delta t, \end{aligned} \quad (2)$$

где i – номер элемента, τ и $\tau+1$ – индексы текущего и следующего временного шага; Δt – шаг интегрирования по времени; x_i, v_i, a_i – ко-

ордината, скорость, ускорение элемента.

Создание слоя плодов в модели производится следующим образом. В зависимости от заданной толщины слоя продукта h определяется количество плодов N_{Π} , которое необходимо поместить в модельное пространство:

$$N_{\Pi} = \frac{S_C}{k_{yn} S_{\Pi}} = \frac{4L_x h}{k_{yn} \pi D_{\Pi, cp}^2}, \quad (3)$$

где S_C и S_{Π} – площадь слоя плодов (в двухмерной модели рассматривается не объем продукта, а площадь) и отдельного плода; k_{yn} – коэффициент упаковки плодов для учета пористости слоя (составляет около 1,4); L_x – длина модельного пространства; $D_{\Pi, cp}$ – средний диаметр плодов.

Плоды размещаются по всей области моделирования случайным образом по равно-

мерному закону распределения. При этом размещение производится так, чтобы плоды не контактировали друг с другом. Для размещения плодов используется отдельный алгоритм. Диаметр размещаемых плодов D_{Π} выбирается случайным образом по равномерному закону из заданного диапазона $D_{\Pi \min} \dots D_{\Pi \max}$.

После того, как плоды размещены в пространстве (в виде кругов заданного диаметра), начинается заполнение кругов отдельными элементами. Сначала размещаются элементы кожуры по окружности с равным шагом, таким образом, чтобы они касались друг друга. Затем размещаются элементы мякоти внутри круга случайным образом по равномерному закону с исключением их перекрытия. Количество элементов $N_{\Pi i}$, на которые разбивается плод i , зависит от диаметра плода $D_{\Pi i}$:

$$N_{\Pi i} = \frac{S_{\Pi i}}{k_{yn} S_{\varepsilon}} = \frac{D_{\Pi i}^2}{k_{yn} d_{\varepsilon, \text{нач}}^2}, \quad (4)$$

где S_{ε} – площадь элемента; $d_{\varepsilon, \text{нач}}$ – начальный диаметр элементов. В течение компьютерного эксперимента диаметр элементов мякоти может уменьшаться по мере обезвоживания.

Заданное количество элементов мякоти (6 элементов в большинстве расчетов) из центральной области плода преобразуется в семена. Элементы кожуры и семян не изменяют свой диаметр в процессе расчетов.

Для того чтобы первоначально нестабильная механическая система пришла в механическое равновесие, в течение 1 секунды модельного времени производится интегрирование уравнений механического движения элементов. В результате этого плоды оседают под действием силы тяжести и формируют плотноупакованный слой в нижней части области моделирования. После этого начинается моделирование процесса сушки.

Описание процессов тепло- и влагообмена между элементами, а также между элементами и окружающей средой базируется на основе общепринятых уравнений сушки А.В. Лыкова. Уравнения сушки капиллярно-пористого тела в векторной форме может быть записано следующим образом [5]:

$$\begin{cases} C_s \frac{\partial T}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial W}{\partial t} = \nabla(\lambda \nabla T) - C(D \nabla W + D_T \nabla T) \nabla T + Q_{\text{СВЧ}}(W, T); \\ (1 - \varepsilon) \frac{\partial W}{\partial t} = \nabla(D \nabla W) + \nabla(D_T \nabla T), \end{cases} \quad (5)$$

где C_s – теплоемкость среды в целом; T и W – температура и влажность; ε – критерий фазового превращения жидкости в пар, определяемый как отношение изменения влагосодержа-

ния посредством испарения и конденсации к изменению влагосодержания за счет переноса жидкости; $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ – дифференциальный оператор набла; λ – локальный коэффициент теплопроводности; C – теплоемкость жидкости; D , D_T – коэффициенты, характеризующие данное пористое тело и определяемые эмпирически; $Q_{\text{СВЧ}}$ – теплота, выделяющаяся в среде под действием СВЧ-излучения.

Уравнения (5) для процесса СВЧ-сушки плодов черной смородины являются чрезвычайно сложными, и не допускают аналитического решения путем введения сколько-нибудь обоснованных допущений, так как большинство переменных в уравнениях являются функциями как координат, так и времени: $T(x, z, t)$; $W(x, z, t)$; $C_s(x, z, t)$; $C(x, z, t)$; $\varepsilon(x, z, t)$; $\lambda(x, z, t)$; $D(x, z, t)$; $D_T(x, z, t)$; $Q_{\text{СВЧ}}(x, z, t)$. Поэтому данные уравнения целесообразно решать только численными конечно-разностными методами, с помощью предварительной дискретизации модельного пространства. Для этого плоды черной смородины разбиваются на отдельные узлы, совпадающие с центрами элементов круговой формы для механического моделирования. В этом случае каждый i -й элемент плода характеризуется температурой T_i и содержанием влаги W_i .

Получившаяся сетка для конечно-разностных методов является нерегулярной (рисунок 4). Считается, что между двумя узлами сетки присутствует связь (возможен обмен теплом и влагой), если соответствующие элементы механически контактируют друг с другом: $r_{ij} < k_k(d_i + d_j)/2$, где k_k – пороговый коэффициент контакта (равен 1,2 для изображенной на рисунке 4 сетки).

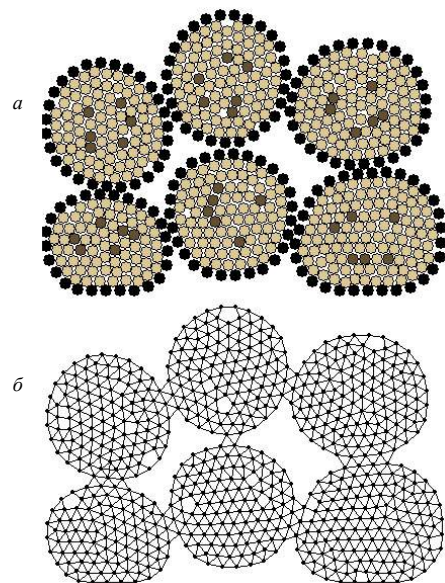


Рисунок 4. Представление слоя плодов в модели (a)

и соответствующая сетка для решения уравнений сушки (б)

С течением времени температура и влажностное содержание каждого элемента изменяются. При этом расчет T_i и W_i производится с использованием уравнений математической физики в конечных разностях. На каждом шаге интегрирования τ рассчитывается новое значение содержания влаги и температуры элемента i , находящегося в контакте с элементом j , по следующим итерационным формулам:

$$W_i^{\tau+1} = W_i^{\tau} + D_0 e^{k_D(T_i^{\tau} - T_K)} \frac{W_j^{\tau} - W_i^{\tau}}{r_{ij}} \Delta t; \quad (6)$$

$$T_i^{\tau+1} = T_i^{\tau} + \chi \frac{T_j^{\tau} - T_i^{\tau}}{r_{ij}} \Delta t, \quad (7)$$

где Δt – шаг интегрирования по времени; D_0 – коэффициент диффузии влаги при комнатной температуре; k_D – коэффициент экспоненциального роста коэффициента диффузии; T_K – комнатная температура (20°C). χ – коэффициент температуропроводности.

Элементы, представляющие в модели кожуру (обозначенные черным цветом на рисунках), способны обмениваться теплом и влагой не только с соседними элементами, но также и с окружающей средой. В этом случае переход тепла и влаги из граничных узлов в окружающую среду рассчитывается по следующим итерационным формулам:

$$W_i^{\tau+1} = W_i^{\tau} - k_e \left(W_i^{\tau} - W_{окр}^{\tau} \frac{p_{атм}}{p} \right) \Delta t; \quad (8)$$

$$T_i^{\tau+1} = T_i^{\tau} - \chi_T (T_i^{\tau} - T_{окр}^{\tau}) \Delta t, \quad (9)$$

где k_e – коэффициент передачи влаги при испарении с границы; χ_T – коэффициент передачи температуры от окружающей среды к элементу; $W_{окр}^{\tau}$ и $T_{окр}^{\tau}$ – влажность и температура газа вблизи слоя плодов (принято допущение, что данные параметры не зависят от времени); $p_{атм}$ – атмосферное давление; p – давление

окружающей среды.

Так как влажность W_i элементов мякоти постепенно уменьшается, в модели регулярно производится перерасчет массы и диаметра элементов:

$$m_i(W_i) = m_{CO} + k_{вл} W_i; \quad (10)$$

$$d_i(W_i) = \sqrt{k_{d1} + k_{d2} W_i}, \quad (11)$$

где m_{CO} – масса сухого остатка после полного обезвоживания элемента; $k_{вл}$, k_{d1} и k_{d2} – коэффициенты влияния влажности на массу и диаметр, которые рассчитываются через объемную плотность продукта до и после сушки.

В модели считается, что подводимая мощность СВЧ-излучения P перераспределяется в нагреваемом объеме пропорционально влажности элементов. Поэтому увеличение температуры плода за счет подвода СВЧ-мощности рассчитывается в модели следующим образом:

$$T_i^{\tau+1} = T_i^{\tau} + \frac{P_i \Delta t}{c_i m_i^{\tau}} = P \frac{W_i^{\tau}}{\sum_{i=1}^{N_3} W_i^{\tau} c_i m_i^{\tau}} \Delta t, \quad (12)$$

где P_i – мощность, подводимая к элементу i ; c_i – удельная теплоемкость плодов черной смородины.

Таким образом, общую систему уравнений, описывающую процесс СВЧ-сушки плодов черной смородины можно записать следующим образом:

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, задающий положение рассматриваемой точки.

В отличие от существующих научных работ по сушке плодов, в настоящей работе:

- уравнения сушки решаются с высокой пространственной и временной детализацией (все функции и коэффициенты зависят от положения в пространстве $\vec{r}$ и от времени t);
- добавлены уравнения деформации и движения плодов.

$$\left\{ \begin{array}{l} C_s(\vec{r}, t) \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial W(\vec{r}, t)}{\partial t} = \nabla(\lambda(\vec{r}, t) \nabla T(\vec{r}, t)) - C(\vec{r}, t)(D(\vec{r}, t) \nabla W(\vec{r}, t) + D_T(\vec{r}, t) \nabla T(\vec{r}, t)) + Q_{свч}(\vec{r}, t); \\ (1 - \varepsilon(\vec{r}, t)) \frac{\partial W(\vec{r}, t)}{\partial t} = \nabla(D(\vec{r}, t) \nabla W(\vec{r}, t)) + \nabla(D_T(\vec{r}, t) \nabla T(\vec{r}, t)); \\ m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{j=1}^{N_3} \left\{ \begin{array}{l} c_{ij} \left(\frac{d_i + d_j}{2} - r_{ij} \right) \frac{(x_i - x_j)}{r_{ij}} + k_{ij} \left(r_{ij} - \frac{d_i + d_j}{2} \right) (v_{xi} - v_{xj}), \quad r_{ij} < \frac{d_i + d_j}{2} + \Delta d_B; \\ 0, \quad r_{ij} \geq \frac{d_i + d_j}{2} + \Delta d_B; \end{array} \right\}; \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = -m_i g + \sum_{j=1}^{N_3} \left\{ \begin{array}{l} c_{ij} \left(\frac{d_i + d_j}{2} - r_{ij} \right) \frac{(z_i - z_j)}{r_{ij}} + k_{ij} \left(r_{ij} - \frac{d_i + d_j}{2} \right) (v_{zi} - v_{zj}), \quad r_{ij} < \frac{d_i + d_j}{2} + \Delta d_B; \\ 0, \quad r_{ij} \geq \frac{d_i + d_j}{2} + \Delta d_B; \end{array} \right\}; \end{array} \right. \quad (13)$$

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Лыков А. В. Теория сушки. М.: Энергия, 1968. 472 с.
- 2 Лыков А.В. Тепломассообмен. М.: Энергия, 1978. 480 с.
- 3 Гинзбург А.С. Технология сушки пищевых продуктов. М.: Пищевая промышленность, 1976. 248с.
- 4 Гинзбург А.С. Расчет и проектирование сушильных установок пищевой промышленности. М.: Агропромиздат, 1985. 336 с.
- 5 Решетин О.Л., Орлов С.Ю. Теория переноса тепла и влаги в капиллярно-пористом теле // Журнал технической физики. 1998. Т. 68. № 2. С. 140–142.
- 6 Советов Б. Я. Моделирование систем: учебное пособие. М.: Высшая школа, 1998. 319 с.
- 7 Allen M.P., Tildesley D.J. Computer Simulation of Liquids. Oxford: Clarendon Press, 1987. 408 p.
- 8 Кривцов А.М. Деформирование и разрушение тел с микроструктурой. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 304 с.
- 9 Инженерные расчеты на ЭВМ: справочное пособие под ред. В.А. Троицкого. Л.: Машиностроение, 1979. 288 с.

REFERENCES

- 1 Lykov A. V. Teoriia sushki [Drying theory]. Moscow, Energiia, 1968. 472 p. (In Russ.).
- 2 Lykov A.V. Teplomassoobmen [Heat and mass exchange]. Moscow, Energiia, 1978. 480 p. (In Russ.).
- 3 Ginzburg A.S. Tekhnologiya sushki pishchevykh produktov [Technology of drying foodstuff]. Moscow, Agropromizdat, 1976. 248 p. (In Russ.).
- 4 Ginzburg A.S. Raschet i proektirovanie sushi-l'nykh ustanovok [Calculation and design of drying installations of the food industry]. Moscow, Agropromizdat, 1985. 336 p. (In Russ.).
- 5 Reshetin O. L., Orlov S. Iu. The theory of transfer of heat and moisture in a capillary and porous body. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*. [Magazine of technical physics], 1998. vol. 68, no. 2, pp. 140-142. (In Russ.).
- 6 Sovetov, B. Ia. Modelirovanie system [Modeling of systems]. Moscow, Vysshiaia shkola, 1998. 319 p. (In Russ.).
- 7 Allen M.P. Tildesley D.J. Computer Simulation of Liquids. Oxford, Clarendon Press, 1987. 408 p.
- 8 Krivtsov A.M. Deformirovanie i razrushenie tel s mikrostrukturoid [Deformation and destruction of bodies with a microstructure]. Moscow, Fizmatlit, 2007. 304 p. (In Russ.).
- 9 Troitskii V.A. Inzhenernye raschety na EVM [Engineering calculations on the computer], Leningrad, Mashinostroenie, 1979. 288 p. (In Russ.).