

УДК 636.085.54

Профессор В.Н. Василенко, докторант Л.Н. Фролова,
аспирант И.В. Драган, студентка К.Ю. Русина
(Воронеж. гос. ун-т. инж. тех.) кафедра технологии жиров, процессов и аппаратов пи-
щевых и химических производств. тел. (473) 255-35-54
E-mail: vvn_1977@mail.ru

Professor V.N. Vasilenko, doctoral L.N. Frolov,
graduate I.V. Dragan, student K.Y. Rusina
(Voronezh. state university of engineering technology) Department of technology of fats,
processes and devices of food and chemical industries. phone (473) 255-35-54
E-mail: vvn_1977@mail.ru

Аналитическое определение температурных полей биополимеров в формующем канале экструдера при коэкструзии

Analytical determination of temperature fields of biopolymers in the form of channels coextrusion during extrusion

Реферат. Совершенствование теории и методов расчета экструзионного оборудования является задачей, решение которой обеспечит оптимальное конструирование его узлов с целью получения продукции требуемого качества. Так как качество экструдата, производительность экструзионной машины в значительной степени определяются режимом работы предматричной зоны червяка, то в статье рассмотрена математическая модель процесса экструзии именно для этой зоны экструдера. Использование коэкструзии позволит значительно расширить ассортимент и номенклатуру выпускаемых поликомпонентных продуктов, сбалансированных по химическому составу и с программируемыми свойствами. При их производстве внутренний слой формируется из жировитаминной начинки, а внешняя оболочка – из экструдата, полученного на основе зерновых. Для обеспечения стабильности процесса коэкструзии каналы формующей головки должны быть сконструированы так, чтобы давление, создаваемое в них, было достаточным для распределения материала, а время пребывания в нём экструдата было минимальным. Решение данной задачи требует точного описания течения материалов в формующем канале. Статья содержит математическое описание процесса коэкструзии кормовых смесей в канале матрицы экструдера. Приведено аналитическое определение распределения температурных полей в жировитаминной начинке. Предложена методика выбора диаметра дозирующего патрубка по требуемой величине отношения объемных расходов экструдата и начинки. Проведен анализ течения термолабильных неньютоновских сред в каналах экструдера с учетом диссипативных явлений и неизотермичности. Аналитическое определение распределения температурных полей в жировитаминной начинке экструдатов было проведено для участков от выхода насоса до корпуса экструдера, по толщине корпуса, в предматричной зоне и коэкструзионной формующей головке. Полученная математическая модель легко адаптируется для других участков экструдера.

Summary. Improvement of the theory and methods of calculation of extrusion equipment is a problem whose solution provides the optimal design of its components in order to obtain the desired product quality. As the quality of the extrudate, extrusion machine performance is largely determined by the mode of pre matrix zone worm, article considers the mathematical model of the extrusion process for this particular zone of the extruder. Using co-extrusion will greatly expand the range of multicomponent products, balanced chemical composition and with programmable features. In their manufacture the inner layer is formed from fat-vitamin fillings and an outer shell - of the extrusion obtained cereal-based. To ensure the stability of the co-extrusion process forming head channels must be designed so that the pressure generated therein is sufficient to distribute the material and the residence time therein of the extrudate is minimized. Solution of this problem requires an accurate description of the flow of materials in the form of channels. This article contains a mathematical description of the process of co-extrusion feed mixtures in the channel matrix of the extruder. The analytical determination of the distribution of temperature fields in fat-vitamin stuffing. A method for selecting the diameter of the dispensing nozzle to the desired value of the ratio of volumetric flow rates of the extrudate and fillings is proposed. The analysis of the flow of heat-labile non-Newtonian fluids in channels extruder with allowance for dissipative phenomena and nonisothermal is conducted. Analytical determination of the distribution of temperature fields in fat-vitamine filling extrudates was conducted for the sites from the pump outlet to the extruder housing, in the pre matrix zone and co-extrusion head shape. The resulting mathematical model can be easily adapted to other areas of the extruder.

Ключевые слова: коэкструзия, течение материалов, дозирующий канал, экструдат, рецептура продукта.

Keywords: co-extrusion, for material dispensing port, extrudate product formulation.

© Василенко В.Н., Фролова Л.Н.,
Драган И.В., Русина К.Ю., 2014

Отдельным сегментом на рынке экструдированных комбикормов являются коэкструдированные продукты. Это продукты, состоящие из зерновой оболочки, внутри которой находится начинка (жировая, белковая, витаминная и т.д.). Коэкструдаты являются самыми «молодыми» на отечественном рынке.

Анализ течения термолабильных неньютоновских сред в каналах экструдера требует дополнительной оценки тепловой обстановки, так как неучет диссипативных явлений и неизотермичности может привести к нежелательным эффектам перегрева и снижению качества готовой продукции.

Рассмотрим экструдер для получения коэкструдированного продукта с расположением жировитаминной начинки внутри зерновой оболочки.

Целью работы является аналитическое определение распределения температурных полей в жировитаминной начинке, которая термо-

лабильна. В результате декомпозиции каналов по тепловой обстановке выделены следующие участки (рисунок 1): от выхода насоса до корпуса экструдера (I); по толщине корпуса (II); предматричная зона (III); коэкструзионная формирующая головка (IV). Рассмотрим последовательно теплообмен на всех этих участках.

Теплообмен на участке I можно рассматривать как теплообмен при стационарном движении среды в режиме идеального вытеснения по трубопроводу диаметром 2 мм и длиной 21 мм с температурой среды на выходе, составляющей 60 °С и температурой окружающей среды 20 °С.

Дифференциальное уравнение энергии для стационарного течения с умеренными скоростями в круглой трубе в отсутствие внутренних источников тепла, градиентов концентрации и градиента давления в цилиндрической системе координат (z, r, θ) таково:

$$u\rho \frac{\partial i}{\partial z} + v\rho \frac{\partial i}{\partial r} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) \right] = 0, \quad (1)$$

где u, v – скорости среды аксиальном направлении z и радиальном r соответственно; ρ, λ – плотность и теплопроводность среды; θ – угловая координата; t – локальная температура; i – энтальпия среды.

Ограничимся рассмотрением случая течения среды с постоянными физическими свойствами, тогда $d_i = c_p dt$, где C_p – теплоемкость среды.

В этом случае (1) принимает следующий вид.

$$u\rho c_p \frac{\partial t}{\partial z} + v\rho c_p \frac{\partial t}{\partial r} - \left[\frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{\lambda}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \theta^2} + \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right] = 0, \quad (2)$$

Следует заметить, что для несжимаемой жидкости уравнение (2) справедливо и без допущения об отсутствии градиента давления.

Далее будем рассматривать гидродинамически стабилизированное и осесимметричное течение ($v = 0, \partial^2 t / \partial \theta^2 = 0$), тогда (2) упрощается:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \frac{u}{a} \frac{\partial t}{\partial z}, \quad (3)$$

где $a = \lambda / \rho c_p$ – температуропроводность среды.

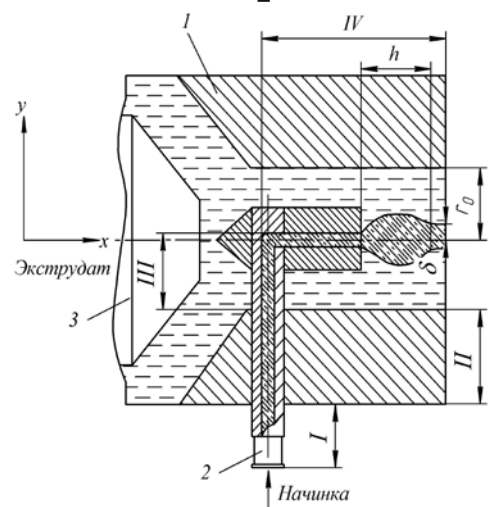


Рисунок 1. Расчетная схема течения экструдата и начинки в формирующем канале экструдера: 1 – корпус формирующей головки; 2 – подводящий патрубок; 3 – шнек

Без потери точности можно пренебречь аксиальной теплопроводностью по сравнению с радиальной ($\partial^2 t / \partial z^2 = 0$).

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) = \frac{u}{a} \frac{\partial t}{\partial z}. \quad (4)$$

Для отыскания частного решения уравнения (4) замкнём его граничными условиями

$$t(r, 0) = t_f; \quad (5)$$

$$\frac{\partial t(0, z)}{\partial r} = 0; \quad (6)$$

$$t(r_p, z) = t_w, \quad (7)$$

где r_0 – радиус канала; t_f , t_w – температура начинки на входе в экструдер и температура стенки.

В силу предположения идеального течения среды следует, что $u = \text{const}$. Для дальнейшего анализа системы (4)-(7) приведём её к безразмерному виду с учётом того, что $t_f > t_w$, с помощью относительных параметров $R = r/r_0$; $Z = z/r_0$; $T = (t - t_w)/(t_f - t_w)$;

$Pe = ur_0/a$ к виду:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial T}{\partial R} \right) = Pe \frac{\partial T}{\partial Z}; \quad (8)$$

$$T(R, 0) = 1; \quad (9)$$

$$\frac{\partial T(0, z)}{\partial R} = 0; \quad (10)$$

$$T(1, z) = 0 \quad (11)$$

Раскроем слагаемые в левой части уравнения (8):

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial T}{\partial R} \right) = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial T}{\partial R} + R \frac{\partial^2 T}{\partial R^2} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial R}; \quad (12)$$

С учетом (12) математическая модель теплообмена на участке I примет окончательный вид:

$$\frac{\partial T}{\partial Z} = Pe^{-1} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial R} \right); \quad (13)$$

$$T(R, 0) = 1; \quad (14)$$

$$\frac{\partial T(0, z)}{\partial R} = 0; \quad (15)$$

$$T(1, z) = 0 \quad (16)$$

Применим в системе (13)-(16) интегральное преобразование Лапласа по переменной Z :

$$ST_L - 1 = Pe^{-1} \left(\frac{d^2 T_L}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dT_L}{dR} \right); \quad (17)$$

$$\frac{dT_L(0, s)}{dR} = 0; \quad (18)$$

$$T_L(1, s) = 0, \quad (19)$$

где s , T_L – изображение Z и T .

После преобразования (17) имеем:

$$\frac{d^2 T_L}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dT_L}{dR} - \frac{S}{Pe^{-1}} T_L + \frac{1}{Pe^{-1}} = 0 \quad (20)$$

Запишем соответствующее однородное уравнение для (20):

$$\frac{d^2 T_L}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dT_L}{dR} - \frac{S}{Pe^{-1}} T_L = 0. \quad (21)$$

Умножим (21-3.79) на R^2 :

$$R^2 \frac{d^2 T_L}{dR^2} + R \frac{dT_L}{dR} - \frac{S}{Pe^{-1}} R^2 T_L = 0. \quad (22)$$

Пусть:

$$-S/Pe = \mu^2, \quad \mu = i\sqrt{S/Pe^{-1}}, \text{ тогда}$$

$$R^2 \frac{d^2 T_L}{dR^2} + R \frac{dT_L}{dR} + \mu^2 R^2 T_L = 0, \quad (23)$$

а это есть уравнение Бесселя, которое имеет следующее общее решение:

$$T_L(R, s) = C_1 I_0(\sqrt{S/Pe^{-1}} R) + C_2 K_0(\sqrt{S/Pe^{-1}} R),$$

где I_0 , K_0 – модифицированные функции Бесселя и Ганкеля; C_1 , C_2 – константы интегрирования.

Частные решения неоднородного уравнения определяется из соотношения:

$$-\frac{S}{Pe^{-1}} T_L + \frac{1}{Pe^{-1}} = 0,$$

откуда $T_L = 1/S$

и общее решение уравнения (20) станет:

$$T_L(R, s) = C_1 I_0(\sqrt{S/Pe^{-1}} R) + C_2 K_0(\sqrt{S/Pe^{-1}} R) + \frac{1}{S}.$$

Постоянная $C_2 = 0$, т. к. при $R \rightarrow 0$ $K_0(\sqrt{S/Pe^{-1}} R \rightarrow -\infty)$, тогда:

$$T_L(R, s) = C_1 I_0(\sqrt{S/Pe^{-1}} R) + \frac{1}{S}.$$

Константу C_1 определим из условия (19):

$$T_L(1, s) = C_1 I_0(\sqrt{S/Pe^{-1}}) + \frac{1}{S} = 0.$$

$$C_1 = -\frac{1}{sI_0(\sqrt{S/Pe^{-1}})}.$$

На основании этого решение задачи в изображениях таково:

$$T_L(R, s) = \frac{1}{S} - \frac{I_0(\sqrt{S/Pe^{-1}}R)}{sI_0(\sqrt{S/Pe^{-1}})}. \quad (24)$$

Как видно из (24) для отыскания оригинала соблюдены все условия применения второй теоремы Ватченко-Захарченко. Применим оператор обратного преобразования Лапласа к (24):

$$L^{-1}[T_L(R, s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{S}\right] - L^{-1}\left[\frac{I_0(\sqrt{S/Pe^{-1}}R)}{sI_0(\sqrt{S/Pe^{-1}})}\right].$$

$$\text{Очевидно, что } L^{-1}\left[\frac{1}{S}\right] = 1.$$

Для определения оригинала второго слагаемого введём обозначения:

$$\phi(R, s) = I_0(\sqrt{S/Pe^{-1}}R); \quad \psi(s) = sI_0(\sqrt{S/Pe^{-1}}).$$

Найдем корни $\psi(s) = 0$: 1. $S = 0$; 2. и множество корней уравнения:

$$I_0(\sqrt{S/Pe^{-1}}) = 0,$$

но $I_0(\sqrt{S/Pe^{-1}}) = J_0(i\sqrt{S/Pe^{-1}})$, поэтому это уравнение эквивалентно уравнению:

$$J_0(\mu) = 0. \quad (25)$$

Вычислим $\psi'(s)$:

$$\psi'(s) = I_0(\sqrt{S/Pe^{-1}}) + s \frac{1}{2\sqrt{sPe^{-1}}} I_1(\sqrt{S/Pe^{-1}}).$$

Определим:

$$\phi(R, 0) = 1; \quad \psi'(0) = 1; \quad \phi(R, \mu) = J_0(\mu R);$$

$$\begin{aligned} \psi'(\mu) &= \frac{1}{2}\sqrt{s/Pe^{-1}} I_1(\sqrt{s/Pe^{-1}}) = \frac{1}{2}i\sqrt{s/Pe^{-1}} i^{-1} I_1(\sqrt{s/Pe^{-1}}) = \\ &= -\frac{1}{2}\mu i I_1(\sqrt{s/Pe^{-1}}) = -\frac{1}{2}\mu J_1(\mu). \end{aligned}$$

С учетом формулы обращения:

$$\frac{\phi(R, 0)}{\psi'(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(R, \mu_n)}{\psi'(\mu_n)} \exp(-\mu_n^2 Pe^{-1} Z)$$

получим окончательное решение задачи:

$$T(R, Z) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n R)}{\mu_n J_1(\mu_n)} \exp(-\mu_n^2 Pe^{-1} Z)$$

Найдем среднюю по сечению температуру:

$$\bar{T}(Z) = 2 \int_0^1 RT(R, Z) dR = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \exp(-\mu_n^2 Pe^{-1} Z).$$

Анализируя полученное решение, можно сделать вывод о том, что на этом участке происходит охлаждение среды. Для получения количественных показателей необходимо определить критерий Pe .

Воспользуемся формулой Дарси:

$$\Delta p = \xi \frac{\rho u^2}{2} \frac{l}{d_r}, \quad (26)$$

где ξ – коэффициент сопротивления трения; $d_r = 2r_0$; l – длина канала,

В силу высокой вязкости жировой начинки – режим течения ламинарный, поэтому $\xi = 16 / Re$, где Re – число Рейнольдса

$$Re = \frac{d_r u}{\mu} = \frac{2r_0 u}{\mu}, \text{ тогда:}$$

$$\xi = \frac{8\mu}{r_0 u}. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (26), получим:

$$\Delta p = \frac{8\mu}{r_0 u} \frac{\rho u^2}{2} \frac{l}{2r_0} = \frac{2\rho l u \mu}{r_0^2},$$

Откуда:

$$u = \frac{\Delta p r_0^2}{2\rho l \mu} \quad (28)$$

Перепад давления:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = 7 - 0,1 = 6,9 \text{ МПа} = 6,9 \cdot 10^6$$

$$\text{Па; } r_0 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м; } \rho = 886 \text{ кг/м}^3;$$

$$\mu = 196 \text{ Па} \cdot \text{с; } l = 21 \cdot 10^{-3} \text{ м, тогда:}$$

$$u = \frac{6,9 \cdot 10^6 \cdot (1 \cdot 10^{-3})^2}{2 \cdot 886 \cdot 21 \cdot 10^{-3} \cdot 196} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}$$

Коэффициент температуропроводности равен $a = \lambda / (\rho c_p)$, где:

$$\lambda = 0,177 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К); } \rho = 886 \text{ кг/м}^3; c_p = 2303 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К), тогда:}$$

$$a = \frac{0,177}{886 \cdot 2303} = 8,67 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$$

$$\text{В итоге: } Pe = \frac{ur_0}{a} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{8,67 \cdot 10^{-8}} = 11,53.$$

Для инженерных расчетов можно применять приближенную формулу:

$$\bar{T}(Z) \approx \frac{4}{\mu_1^2} \exp(-\mu_1^2 Z / Pe)$$

На выходе из участка I: $Z = 21 \cdot 10^{-3} / 1 \cdot 10^{-3} = 21$, первый корень уравнения (25) $\mu = 2,4048$, тогда:

$$\bar{T}(Z) = \frac{4}{(2,4048)^2} \exp\left(-2,4048^2 \frac{21}{11,53}\right) = 1,8 \cdot 10^{-5};$$

$$\bar{T}(Z) = \frac{\bar{t} - t_w}{t_f - t_w} = 1,8 \cdot 10^{-5}; \quad \bar{t} \approx t_w.$$

Полученный результат свидетельствует о понижении температуры начинки на участке I, что может привести к забивке канала. Во избежание этого необходимо теплоизоляция канала на участке I. Следует заметить, что полученная математическая модель легко адаптируется и для других участков.

Рассмотрим участок II. В стационарных условиях устанавливается линейный профиль температур по толщине корпуса. Если температура внутренней стенки составляет 150 °С, а внешней 20 °С, то средняя температура стенки равна 85 °С. Расчеты показывают, что в этом случае температура начинки, прошедшая через корпус составляет как раз 85 °С. Нет смысла в этом случае продолжать последовательные вычисления, ясно, что при заданной геометрии и скорости течения среды, температура начинки на входе в формирующий канал превысит допустимую, что приведет к необратимым изменениям в виде разложения жировых составляющих. Для решения этого вопроса необходимо существенное увеличение числа Pe, что может быть достигнуто увеличением скорости или диаметра канала для начинки или одновременно их увеличением.

Таким образом, необходимо решить оптимизационную задачу по выбору режимных и геометрических параметров. Если иметь в виду неизменность конструктивных характеристик экструдера, то решение этой задачи может быть получено следующим образом.

Пусть Pe есть скорость функции начинки, т. е. $Pe = Pe(u)$.

ЛИТЕРАТУРА

1 Василенко В.Н. Исследование и идентификация параметров математической модели процесса коэкструзии кормовых смесей // Вестник ВГТА. 2009. № 2. С. 40–44.

На выходе из участка I температура среды есть:

$$\bar{t}_1 = t_{w1} + (t_{f1} - t_{w1}) \exp[-\mu_1^2 Z_1 / Pe(u)]. \quad (29)$$

На выходе из участка II температура среды есть:

$$\bar{t}_2 = t_{w2} + (\bar{t}_1 - t_{w2}) \exp[-\mu_1^2 Z_2 / Pe(u)]. \quad (30)$$

На выходе из участка III температура среды есть:

$$\bar{t}_3 = t_{w3} + (\bar{t}_2 - t_{w3}) \exp[-\mu_1^2 Z_3 / Pe(u)]. \quad (31)$$

На выходе из участка IV температура среды есть:

$$\bar{t}_4 = t_{w4} + (\bar{t}_3 - t_{w4}) \exp[-\mu_1^2 Z_4 / Pe(u)]. \quad (32)$$

Т а б л и ц а 1
Численные значения решения трансцендентного уравнения

Pe	t^* , °С	ν , м/с
250	121,67	0,021
500	99,07	0,043
750	88,20	0,065
1000	81,99	0,087
1250	78,01	0,108
1500	75,24	0,130
1750	73,21	0,152
2000	71,65	0,173

Эта температура должна быть $\bar{t}_4 = t^*$.
Задача: выбрать u для реализации этого условия.

Редукцией (29)-(30) можно свести эти выражения в одно трансцендентное уравнение относительно Pe в зависимости от t^* и решить его (таблица 1).

Результатом решения и будет требуемое Pe, а, следовательно, и скорость при заданном r_0 и известном a , т. е. $u = Pe \cdot a / r_0$.

$$\frac{a}{r_0} = 8,67 \cdot 10^{-5}; \quad \nu = 8,67 \cdot 10^{-5} \text{ Pe}$$

Вывод: приемлемая скорость течения начинки 0,087 м/с.

REFERENCES

1 Vasilenko V.N. Research and identification of parameters of the mathematical model of the process of co-extrusion feed mixtures. *Vestnik VGTA*. [Bulletin of VSTA], 2009, no. 2, pp. 40-44. (In Russ.).

2 Василенко В.Н., Остриков А.Н., Ряжских В.И. О влиянии расположения дозирующего патрубка в формующем канале матрицы экструдера на гидродинамическую структуру потоков при коэкструзии // Вестник ВГТА. 2010. № 2. С. 46-49.

3 Остриков А.Н., Василенко В.Н., Татаренков Е.А., Попов А.С. Моделирование течения расплава биополимера в динамической матрице экструдера // Хранение и переработка сельхозсырья. 2011. № 8. С. 66-69.

4 Василенко В.Н., Остриков А.Н., Ряжских В.И. Математическая модель течения двух вязкопластичных сред в формующем канале экструдера при коэкструзии // Вестник ВГУИТ. 2012. № 2. С. 64-67.

5 Василенко В.Н., Остриков А.Н. Техника и технологии экструдированных комбикормов. Воронеж: Издательство ВГТА, 2011. 456 с.

2 Vasilenko V.N., Ostrikov A.N., Riazhskikh V.I. On the influence of the location of the dispensing nozzle in the form of channels matrix extruder hydrodynamic flow patterns in coextrusion. *Vestnik VGTA*. [Bulletin of VSTA], 2010, no. 2. pp. 46-49. (In Russ.).

3 Ostrikov A.N., Vasilenko V.N., Tatarenkov E.A., Popov A.S. Modeling of biopolymer melt extruder in the dynamic matrix. *Khranenie i pererabotka sel'khozsyrya*. [Storage and refining agricultural raw materials], 2011, no. 8, pp. 66 - 69. (In Russ.).

4 Vasilenko V.N., Ostrikov A.N., Riazhskikh V.I. Mathematical model of flow of two viscoplastic media in the form channels of coextrusion extruder. *Vestnik VGUIT*. [Bulletin of VSUET], 2012, no. 2, pp. 64-67. (In Russ.).

5 Vasilenko V.N., Ostrikov A.N. *Tekhnika i tekhnologii ekstrudirovannykh kombikormov* [Technique and technology of extruded feed]. Voronezh, Izdatel'stvo VGTA, 2011. 456 p. (In Russ.).