

Доцент С.А. Подгорный

(Кубанский гос. технол. ун-т) кафедра автоматизации производственных процессов

Оценка точности аппроксимаций, полученных методом конечных элементов

В работе дается оценка точности аппроксимаций, полученных методом конечных элементов, и показано, что в случае бесконечного числа конечных элементов можно получить абсолютную точность. Найденная зависимость позволяет для заданной точности определить необходимое число конечных элементов.

The paper assesses the accuracy of the approximations obtained by finite element method, and it is shown that in the case of an infinite number of finite elements can be absolute accuracy. The obtained dependence allows determining the required number of finite elements for a specified accuracy.

Ключевые слова: комбинационные составляющие, цепные дроби, ряд Фарея

В настоящее время метод конечных элементов и получил широкое применение для решения разнообразных задач математической физики [1,2]. Одной из важных задач в анализе континуальных систем является преобразование непрерывных функций в набор конечных элементов [3]. Метод конечных элементов позволяет строить удобную схему алгебраических уравнений относительно узловых значений искомой функции. При этом приближенная аппроксимация решения осуществляется на типовом полиномиальном элементе. В данной работе предлагается дополнить используемые полиномиальные элементы ступенчатой функцией Хэвисайда и функциями округления, что позволяет не только упростить и формализовать запись пробной кусочно-непрерывной функции, но и избежать интегрирования при ее использовании для решения континуальных задач методом Галеркина [4]. Специфическим в методе конечных элементов является построение семейства функций, определяемых ограниченным числом параметров. Например, семейство функций $u(x)$ при $X_{\min} \leq x \leq X_{\max}$. Интервал $X_{\min} \dots X_{\max}$ представляет собой одномерную область существования решения задачи, которая разбивается на конечное число частей (элементов), соединяющихся между собой и с концами интервала в узловых точках (узлах) X_i . В пределах каждого элемента задается функция в виде линейного полинома. Она определяется своими значениями $u(X_i)$ в узлах и на концах элемента. Учитывая, что в континуальной задаче функция является непрерывной, ее значения в каждом узле для соседних элементов

должны совпадать. Для этого введем функции округления: $\lfloor x \rfloor$ – функция пола, которая определяется как наибольшее целое, меньшее или равное x , а именно $\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow x - 1 < n \leq x$; $\lceil x \rceil$ – функция потолка, которая определяется как наименьшее целое, большее или равное x , а именно $\lceil x \rceil = n \Leftrightarrow x < n \leq x + 1$. Используя эти функции округления, введем семейство кусочно-линейных непрерывных функций следующего вида:

$$u(x) = \{\lfloor \Phi(x-a) \rfloor - \lceil \Phi(x-b) \rceil\} \cdot \left[c + (d-c) \cdot \frac{x-a}{b-a} \right], \quad (1)$$

где $\Phi(x)$ – функция Хэвисайда, единичная ступенчатая функция, чье значение равно нулю для отрицательных аргументов, единице для положительных аргументов и $1/2$ в нулевой точке; a, b – интервал окна функции $u(x)$, на котором она отлична от нуля ($a \leq b$); c, d – параметры уравнения прямой на интервале a, b .

Функция $u(x)$ на границах интервала (a, b) обращается в ноль. Используем (1) для описания пробной функции на произвольном интервале, задаваемом полушириной $h = (b-a)/2$ одномерного единичного конечного элемента относительно узла X_i . В этом случае параметры кусочно-линейной непрерывной функции (1) соответственно равны $a = X_i - h$, $b = X_i + h$, $c = 0$, $d = 1$, а функция приобретает вид:

$$\varphi_i(x) = \{\lfloor \Phi[x - (X_i - h)] \rfloor - \lceil \Phi(x - X_i) \rceil\} \cdot \frac{x + h - X_i}{h} + \{\lceil \Phi(x - X_i) \rceil - \lfloor \Phi[x - (X_i + h)] \rfloor\} \cdot \frac{h - x + X_i}{h} \quad (2)$$

Функции $\varphi_i(x)$ изображаются в виде ломаных и определяются конечным числом параметров – своими узловыми значениями, отличными от нуля в пределах небольшого числа элементов вблизи узла X_i . Поскольку

$u(x)$ по своему физическому смыслу должна быть непрерывной функцией, выберем $\varphi_i(x)$ в виде кусочно-линейных функций, отличных от нуля на двух соседних элементах относительно выбранного. Каждая такая функция $\varphi_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, равна единице в X_i и нулю во всех остальных узлах. При этом набор функций $u(x)$ будет состоять из непрерывных функций, линейных в пределах элементов с изломами в узлах и определяемых своими узловыми значениями u_i . Каждую из таких функций можно изобразить в виде ломаной линии. Метод конечных элементов заменяет задачу отыскания функции на задачу отыскания конечного числа ее приближенных значений в отдельных точках-узлах. При этом, если исходная задача относительно функции состоит из дифференциального уравнения с соответствующими граничными условиями, то задача метода конечных элементов относительно ее значений в узлах представляет собой систему алгебраических уравнений. С уменьшением максимального размера элементов увеличивается число узлов и неизвестных узловых параметров. Вместе с этим повышается возможность более точно удовлетворить уравнениям задачи и тем самым приблизиться к искомой функции. Рассмотрим применение метода для описания одномерного профиля. В этом случае пробная функция, определяемая уравнением (3), представлена линейной комбинацией функций (2) с коэффициентами u_i :

$$u(x) = \sum_{i=0}^{n-1} u_i \cdot \varphi_i(x) \quad (3)$$

где n – число конечных элементов, аппроксимирующих континуальную зависимость на заданном интервале. Пусть на концах интервала $X_{\min} \dots X_{\max}$ функция (3) обращается в нуль, а на рассматриваемом промежутке равна единице. В этом случае приравняем функцию (3) этой величине:

$$\sum_{i=0}^{n-1} u_i \cdot \varphi_i(x) = 1 \quad (4)$$

и, умножая левую и правую часть равенства (4) на $\varphi_j(x)$, где $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$:

$$\varphi_j(x) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} u_i \cdot \varphi_i(x) = 1 \cdot \varphi_j(x) \quad (5)$$

интегрируем систему уравнений (5) по области существования решения $X_{\min} \dots X_{\max}$, согласно методу Галеркина получаем систему алгебраических уравнений, используемую для определения коэффициентов u_i :

$$\int_{X_{\min}}^{X_{\max}} \left[\varphi_j(x) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} u_i \cdot \varphi_i(x) \right] dx = \int_{X_{\min}}^{X_{\max}} \varphi_j(x) dx \quad (6)$$

При этом определенные интегралы имеют простые алгебраические выражения во всех узлах X_i на интервале существования решения:

$$\int_{X_{\min}}^{X_{\max}} \left[\varphi_j(x) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} u_i \cdot \varphi_i(x) \right] dx = \begin{cases} 0, & i < j-1 \\ \frac{h}{6}, & i = j-1 \\ \frac{2}{3} \cdot h, & i = j \\ \frac{h}{6}, & i = j+1 \\ 0, & i > j+1 \end{cases} \quad (7)$$

$$\int_{X_{\min}}^{X_{\max}} \varphi_j(x) dx = h \quad (8)$$

где $h = (X_{\max} - X_{\min}) / (n + 1)$ – полуширина конечного элемента. Используя соотношения (7) и (8) в системе уравнений (6), получаем слева трехдиагональную разреженную матрицу коэффициентов, умноженную на вектор неизвестных $\{u_i\}$, а справа – вектор из элементов h :

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}h & \frac{h}{6} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{h}{6} & \frac{2}{3}h & \frac{h}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h}{6} & \frac{2}{3}h & \frac{h}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h}{6} & \frac{2}{3}h & \frac{h}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h}{6} & \frac{2}{3}h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ h \\ h \\ h \\ h \end{pmatrix} \quad (9)$$

Умножая левую и правую часть матричного уравнения (9) на $(1/h)$, получаем матричное уравнение, не использующее параметр (h) :

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Очевидно, что вектор в правой части представляет собой значения аппроксимируемой функции, следовательно, в общем виде коэффициенты (u_i) определяются следующим матричным уравнением:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(X_0) \\ U(X_1) \\ U(X_2) \\ U(X_{n-2}) \\ U(X_{n-1}) \end{pmatrix} \quad (11)$$

Здесь матрица (11) является трехдиагональной, и решение может быть получено методом Гаусса, матричным методом (умножением на обратную матрицу) или методом прогонки. Для систем малой размерности метод решения не существен, но с увеличением точности решения необходимо увеличивать число конечных элементов на области суще-

ствования решения, а это приводит к увеличению числа неизвестных в уравнении (11). Если требуется большая точность решения, необходимо использовать метод прогонки, позволяющий решать системы большой размерности без существенных ошибок округления. Рассмотрим применение этого метода в данном случае. Метод прогонки является двух шаговым. Вначале вычисляем вспомогательные величины α_i , зависящие от элементов трехдиагональной матрицы из правой части (11):

$$\alpha_0 = -\frac{1}{4}, \alpha_1 = -\frac{1}{4 + \alpha_0}, \dots, \alpha_{n-1} = -\frac{1}{4 + \alpha_{n-2}} \quad (12)$$

Рекуррентные соотношения (12) фактически представляют собой цепную дробь следующего вида (ряд Фарея):

$$\alpha_k = \frac{1}{4 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{4 - \frac{1}{4}}}} \quad (13)$$

Используя (17) и (18), получаем рекуррентную формулу для расчета элементов вектора (16):

$$\beta_0 = \frac{a_0}{b_0}, \beta_1 = \frac{a_1}{b_1}, \dots, \beta_i = \frac{a_i}{b_i} \quad (19)$$

Определив из (15) и (19) значения вспомогательных векторов, переходим ко второму

$$u_{n-1} = \frac{6 - \beta_{n-2}}{4 + \alpha_{n-2}}, u_{n-2} = \alpha_{n-2} \cdot u_{n-1} + \beta_{n-2}, \dots, u_0 = \alpha_0 \cdot u_1 + \beta_0 \quad (20)$$

Используя значения весовых коэффициентов u_i , для пробной функции (3) получаем

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} [u_k \cdot \varphi_k(x, n)] \quad (21)$$

где $\varphi_k(x, n)$ определяется следующей формулой:

Следовательно, (13) может быть представлена рекуррентной формулой, образованной следующей числовой последовательностью:

$$q_i = -\frac{(q_{i-1})^2 - 1}{q_{i-2}}, \quad (14)$$

где $q_0 = 4$; $q_1 = 15$. В этом случае элементы вектора (12) задаются следующими соотношениями:

$$\alpha_0 = -\frac{1}{q_0}, \alpha_1 = -\frac{q_0}{q_1}, \dots, \alpha_i = -\frac{q_{i-1}}{q_i} \quad (15)$$

Следующим этапом первого шага метода прогонки является расчет коэффициентов β_i , которые для уравнения (10) (единичный прямоугольный профиль) определяются следующими соотношениями:

$$\beta_0 = \frac{3}{2}, \beta_1 = \frac{6 - \beta_0}{4 + \alpha_0}, \dots, \beta_i = \frac{6 - \beta_{i-1}}{4 + \alpha_{i-1}} \quad (16)$$

Используя соотношения Эйлера, преобразуем (16) к удобному для вычислений рекуррентному виду, образованному следующими числовыми рядами:

$$a_0 = 3, a_1 = 6, \dots, a_i = \left[\frac{3 - (-1)^i}{2} \right] \cdot a_{i-1} + a_{i-2} \quad (17)$$

$$b_0 = 2, b_1 = 5, \dots, b_i = \left[\frac{3 - (-1)^i}{2} \right] \cdot b_{i-1} + b_{i-2} \quad (18)$$

шагу метода прогонки – расчету весовых коэффициентов u_i по формулам:

аппроксимацию этой функцией исходного единичного прямоугольного профиля:

$$\varphi_k(x, n) = \left[\Phi\left(x - \frac{2 \cdot k + 2}{n + 1} + 1\right) - \Phi\left(x - \frac{2 \cdot k + 4}{n + 1} + 1\right) \right] \cdot \left(k - \frac{n}{2} - \frac{x}{2} - \frac{n \cdot x}{2} + \frac{3}{2}\right) + \left[\Phi\left(x - \frac{2 \cdot k}{n + 1} + 1\right) - \Phi\left(x - \frac{2 \cdot k + 2}{n + 1} + 1\right) \right] \cdot \left(\frac{n}{2} - k + \frac{x}{2} + \frac{n \cdot x}{2} + \frac{1}{2}\right) \quad (22)$$

Интегрирование функции (21) на интервале прямоугольного профиля дает следующую числовую последовательность:

$$f_2 := \frac{4}{5} \quad f_3 := \frac{6}{7} \quad f_4 := \frac{84}{95} \quad f_5 := \frac{47}{52} \quad f_6 := \frac{456}{497} \quad f_7 := \frac{90}{97} \quad f_8 := \frac{248}{265} \quad f_9 := \frac{3411}{3620} \quad f_{10} := \frac{10308}{10879} \quad f_{11} := \frac{1286}{1351} \quad (23)$$

Таким образом, предложенный конечный элемент (22) для аппроксимации непрерывных функций позволяет использовать числовые ряды для оценки точности описания непрерывной функции, не прибегая к численному интегрированию. Рассмотрим данную числовую последовательность (23) в виде графика в осях $\{1/n - 1-f(n)\}$ (рисунок 1).

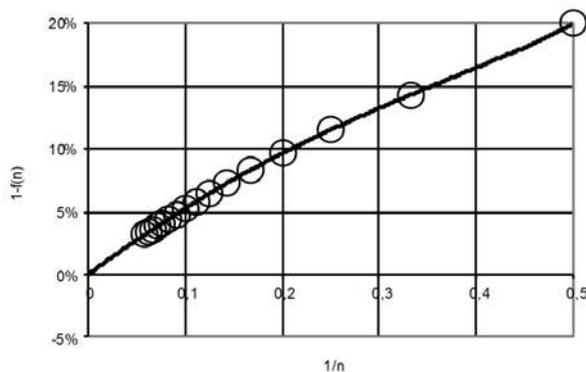


Рисунок 1 – Экстраполяция числового ряда невязок – $[1-f(n)]$ от обратного числа конечных элементов – $(1/n)$

Как видно из представленного графика (рисунок 1), уравнение линии тренда ($R=1$) в точке ноль дает невязку, равную нулю, что соответствует числу конечных элементов стремящихся к бесконечности:

$$1-f(n) = 1,2749(1/n)^4 - 0,603(1/n)^3 - 0,347(1/n)^2 + 0,5649(1/n) \quad (24)$$

Следовательно, описание непрерывных функций конечными элементами может дать большую точность, а уравнение (24) является инфимумом для описания одномерных непрерывных функций методом конечных элементов.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Подгорный, С.А. Метод конечных элементов в решении задач теплопроводности [Текст] / С.А. Подгорный, З.А. Меретуков, Е.П. Кошевой, В.С. Косачев // Вестник ВГУИТ. – 2013. - №2. - С. 10-15.
- 2 Kosachev, V.S. Using rounding function in problems of finite-element analysis [Text] / V.S. Kosachev, E.P. Koshevoy, S.A. Podgorny // Studies in mathematical science. - 2012. - V. 4. - №2. - P. 17-24.
- 3 Gandhi, D. Mixer spur analysis with concurrently swept LO, RF and IF [Text] / D. Gandhi, C. Lyons // Tools and techniques. – 2003. - V. 46. - № 5. - P. 212.
- 4 Thomee, V. Galerkin finite element methods for parabolic problems [Text] / V. Thomee // Springer series in computational mathematics. - 2006. – P. 370.

REFERENCES

- 1 Podgorny, S.A. The finite element method in solving problems of heat conduction [Text] / S.A. Podgorny, Z.A. Meretukov, E.P. Koshevoy, V.S. Kosachev // Bulletin of VSUET. - 2013. - № 2. - P. 10-15.
- 2 Kosachev, V.S. Using rounding function in problems of finite-element analysis [Text] / V.S. Kosachev, E.P. Koshevoy, S.A. Podgorny // Studies in mathematical science. - 2012. - V. 4. - №2. - P. 17-24.
- 3 Gandhi, D. Mixer spur analysis with concurrently swept LO, RF and IF [Text] / D. Gandhi, C. Lyons // Tools and techniques. – 2003. - V. 46. - № 5. - P. 212.
- 4 Thomee, V. Galerkin finite element methods for parabolic problems [Text] / V. Thomee // Springer series in computational mathematics. - 2006. – P. 370.