

Информационные технологии, моделирование и управление

УДК 519.8:61

Профессор Е.Д. Чертов,

(Воронеж. гос. ун-т инж. технол.) кафедра технической механики, тел. (473) 255-47-20

доцент А.А. Хвостов, доцент Д.И. Ребриков,

(Воронеж. гос. ун-т инж. технол.) кафедра информационных и управляющих систем,
тел. (473) 255-38-75

аспирант Л.В. Шторх

(Воронеж. гос. ун-т инж. технол.) кафедра технологии хлебопекарного, макаронного и
кондитерского производств, тел. (473) 255-38-51

Математическая модель динамики цвета корки хлебобулочных изделий в процессе выпечки

Предложена математическая модель, описывающая динамику цвета корки хлебобулочного изделия и её температуру в процессе выпечки. Рассмотрена параметрическая идентификация модели на примере выпечки тестовой заготовки и показана адекватность математической модели.

In article the mathematical model describing of a crust color dynamics of bakery product and its temperature in the batch process is offered. Parametrical identification of model on an example of a test preparation batch is considered and adequacy of mathematical model is shown.

Ключевые слова: математическая модель, динамика цвета корки, параметрическая идентификация.

При управлении процессами выпечки хлебобулочных изделий по окончании процесса осуществляется визуальный контроль показателя качества – цвета корки изделия и принятие решения о компенсации отклонений данного показателя [1]. Обычно принимается решение об изменении параметров технологического процесса (времени выпечки, температурного режима, влажности и т.д.), а также рецептуры исходной тестовой заготовки для обеспечения необходимого цвета корки и заданного качества хлебобулочного изделия (ХБИ).

Обеспечение оперативного контроля показателя цвета корки ХБИ открывает широкие возможности для автоматизации измерения этого показателя качества и позволяет осуществлять корректировку параметров технологического процесса для обеспечения заданного качества еще выпечки.

Для решения такой задачи необходимо иметь математическую модель, описывающую динамику изменения цвета во времени.

При этом параметры этой модели должны быть связаны с параметрами технологического процесса. Такая математическая модель позволит подбирать значения параметров, которые обеспечат заданное качество ХБИ. Кроме того, используя процедуру текущей идентификации на первых стадиях выпечки, параметры математической модели будут всегда адекватно и точно описывать динамику изменения цвета именно для использующейся тестовой заготовки. В таком случае снижается влияние на погрешность расчетов по модели трудно контролируемых возмущений, связанных с качеством исходного продукта, а также с процессами, происходящими с сырьем на предыдущей стадии.

Для описания динамики изменения цвета корки будем использовать принятый в [1] подход, представляющий процесс как совокупность некоторых реакций с соответствующими константами скорости реакции. Для использования такого подхода необходимо иметь пред-

ставление о химическом или физическом механизме формирования цвета корки ХБИ.

Формирование цвета корки ХБИ описано в ряде работ. Отмечено, что на цвет оказывает влияние целый комплекс процессов – физических, микробиологических, коллоидно-химических и биохимических, и цвет изделия формируется в результате большого количества химических реакций. Несмотря на большую сложность механизмов формирования цвета, можно выделить основные факторы, оказывающие наибольшее влияние: температура в печи, влажность, время пребывания. При этом считают [1], что интенсивность окраски корки пшеничного хлеба в основном обусловлена образованием в ней темноокрашенных продуктов окислительно-восстановительного взаимодействия остаточных, несброженных восстанавливающих сахаров теста и содержащихся в тесте меланоидинов.

Первым этапом будет выявление структуры дифференциального уравнения, описывающего динамику изменения окраски корки ХБИ. После чего необходимо оценить связь констант этого уравнения с параметрами технологического процесса.

Поскольку нет возможности выделить одно вещество и реакцию его образования, определяющее цвет, представим все реакции в виде некоторой обобщенной реакции всех веществ, образующих пигменты, определяющие окраску корки ХБИ. Представим процессы выпечки в виде нескольких реакций [1].

1. Реакция активации основных процессов, отвечающих за механизмы изменения окраски корки [1].

2. Основные реакции, приводящие к изменению цвета корки, в результате которых образуются меланоидины, играющие основную роль в окрашивании корки [1].

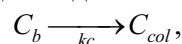
3. На заключительном этапе выпечки тестовой заготовки замедляются и частично приостанавливаются все процессы по образованию цвета корки. Ввиду того что все компоненты уже прореагировали, продолжение выпечки будет приводить только к подгоранию верхних слоев тестовой заготовки.

На рис. 1 показана зависимость изменения цвета корки булки «Городская» по ГОСТ 27844-88 в процессе выпечки.



Рис. 1. Зависимость цвета корки от продолжительности выпечки: t1 – время выпечки со слабым изменением цвета; t2 – потемнение цвета корки, имеющее вид экспоненциального спада; t3 – заключительный этап выпечки со слабым изменением цвета до пригорания

Составим уравнение динамики изменения показателя цвета корки для обобщенной реакции вида



где C_b – концентрация веществ, являющихся исходными для образования пигментов, определяющих цвет. Будем считать, что количество этих пигментов пропорционально выделенному с помощью метода аналитических иерархий параметру регистрируемой спектрограммы (например, первому моменту распределения, характеризующему длину волны, на которую приходится максимум отраженного от поверхности света) [2]. По этому параметру определяется показатель окраски корки поверхности ХБИ. В простейшем случае можно описать изменение показателя цвета корки как реакцию первого порядка со скоростью k_c :

$$\frac{dC_{col}(t)}{dt} = k_c C_{col}(t), \quad (1)$$

$$C_{col}(0) = C_{col0}.$$

Данная модель не учитывает возрастание скорости изменения показателя окраски корки со временем за счет изменения скорости реакций, отвечающих за образование меланоидинов. Для учета такого изменения скорости реакций необходимо ввести уравнение, отражающее изменение температуры корки ХБИ с течением времени, а также её влияние на скорость химических реакций, приводящих к образованию пигментных веществ. Представим скорость обобщенной реакции как функцию температуры корки ХБИ в виде уравнения Аррениуса [3].

$$v_{col} = v_0 e^{\frac{E_{Acol}}{RT_{\dot{\epsilon}i\delta}}}, \quad (2)$$

где v_{col} - скорость химических реакций, приводящих к образованию пигментных веществ; v_0 - скорость химических реакций, приводящих к образованию пигментных веществ при некоторой фиксированной температуре; E_{Acol} - эффективная энергия активации реакций, приводящих к образованию пигментных веществ, кДж/моль; R - универсальная газовая постоянная кДж/(К·моль); $T_{кор}$ - температура корки ХБИ, °С.

Тогда уравнение (1) при подстановке в него (2) примет следующий вид:

$$\frac{dC_{col}(t)}{dt} = k_0 e^{\frac{E_{Acol}}{RT_{\dot{\epsilon}i\delta}}} C_{col}(t), \quad (3)$$

$$C_{col}(0) = C_{col0}.$$

Для описания изменения температуры представим корку хлеба как некоторый объем, подвергающийся нагреву со стороны горячего воздуха печи и отбору тепла со стороны мякиша хлеба (рис. 2).

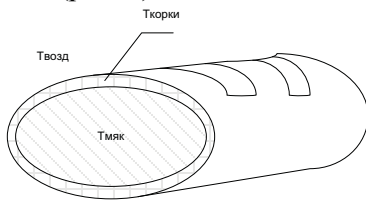


Рис. 2. Температуры зон воздуха, мякиша и корки ХБИ

В общем случае, пренебрегая геометрическими размерами, зависимостью теплоемкостей от температуры и давления, можно записать уравнение теплового баланса для корки ХБИ в следующем виде:

$$\frac{dT_{\dot{\epsilon}i\delta}}{dt} = k_T (T_{\dot{\epsilon}i\dot{\epsilon}a} - T_{\dot{\epsilon}i\delta}) - \frac{Q_{i\dot{\epsilon}e}}{\tilde{N}_{i\dot{\epsilon}e}}, \quad (4)$$

$$T_{\dot{\epsilon}i\delta}(0) = T_{\dot{\epsilon}i\delta0},$$

где k_T - константа скорости изменения температуры корки ХБИ со временем; $\dot{\epsilon}a$ - температура воздуха в пекарной камере, °С; $Q_{i\dot{\epsilon}e}$ - теплота, отводимая мякишем хлеба, Дж; $\tilde{N}_{i\dot{\epsilon}e}$ - теплоемкость мякиша, Дж / кг°С.

Теплота, отводимая мякишем хлеба, является функцией разницы температур корки ХБИ и мякиша, так как интенсивность отвода теплоты снижается из-за выравнивания температур. Представим теплоту отводимую мякишем хлеба, в виде линейной функции, завися-

щей от разницы температур между коркой и мякишем ХБИ:

$$Q_{i\dot{\epsilon}e} = k_{i\dot{\epsilon}e} (T_{\dot{\epsilon}i\delta} - T_{i\dot{\epsilon}e}),$$

где $k_{i\dot{\epsilon}e}$ - коэффициент выравнивания температур мякиша и корки ХБИ в процессе выпечки, Дж / °С; $\dot{\epsilon}e$ - температура мякиша в пекарной камере, °С.

Поскольку целью данной работы не является подробное исследование температурных полей в ХБИ, упростим выражение для температуры введением постоянной величины $Q_{Ti\dot{\epsilon}e}$, характеризующей интенсивность отвода теплоты мякишем для данной марки ХБИ и рецептуры:

$$Q_{Ti\dot{\epsilon}e} = \frac{k_{i\dot{\epsilon}e}}{\tilde{N}_{i\dot{\epsilon}e}}.$$

Окончательно запишем уравнение для изменения температуры в следующем виде:

$$\frac{dT_{\dot{\epsilon}i\delta}}{dt} = k_T (T_{\dot{\epsilon}i\dot{\epsilon}a} - T_{\dot{\epsilon}i\delta}) e^{\frac{k_i}{T_{\dot{\epsilon}i\delta}}} -$$

$$-Q_{Ti\dot{\epsilon}e} (T_{\dot{\epsilon}i\delta} - T_{i\dot{\epsilon}e}),$$

$$T_{\dot{\epsilon}i\delta}(0) = T_{\dot{\epsilon}i\delta0},$$

где k_i - поправочный температурный коэффициент.

Такая структура уравнения позволяет с достаточной для целей контроля цвета корки точностью описывать изменение температуры со временем и при этом уточнять зависимость скоростей химических реакций, приводящих к образованию пигментных веществ и изменяющих цвет.

Дополним исходное уравнение динамики (3) уравнением теплового баланса (4):

$$\begin{cases} \frac{dC_{col}(t)}{dt} = k_0 e^{\frac{E_{Acol}}{RT_{\dot{\epsilon}i\delta}}} C_{col}(t), \\ \frac{dT_{\dot{\epsilon}i\delta}}{dt} = k_T (T_{\dot{\epsilon}i\dot{\epsilon}a} - T_{\dot{\epsilon}i\delta}) e^{\frac{k_i}{T_{\dot{\epsilon}i\delta}}} - \\ - Q_{Ti\dot{\epsilon}e} (T_{\dot{\epsilon}i\delta} - T_{i\dot{\epsilon}e}), \\ C_{col}(0) = C_{col0}, T_{\dot{\epsilon}i\delta}(0) = T_{\dot{\epsilon}i\delta0}. \end{cases} \quad (5)$$

На рис. 3. представлена графическая зависимость, получаемая по модели (5) для динамики цвета. Эта модель имеет такую же структурную особенность, что и экспериментальные данные, приведенные на рис. 1, то есть три характерные стадии выпечки ХБИ.

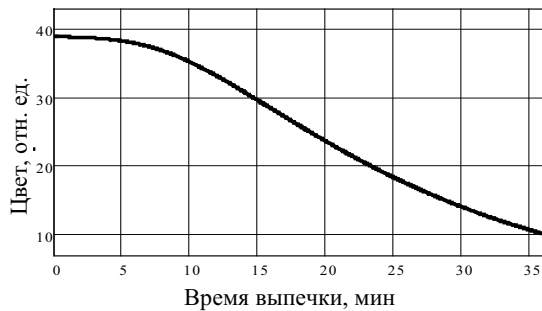


Рис. 3. Зависимость цвета от времени, полученная по модели (5)

Разработанная структура математической модели динамики цвета корки ХБИ при его выпечке позволяет решать ряд практических задач. Во-первых, математическая модель позволяет прогнозировать время достижения заданного показателя качества окраски корки при определённых начальных условиях. Во-вторых, такая модель позволяет проверить будет ли достигнуто требуемое значение показателя качества при заданных времени выпечки и начальных условиях. В-третьих, математическая модель открывает возможности поиска таких параметров кинетических уравнений и, следовательно, таких технологических режимов, которые бы обеспечили достижение заданного показателя качества цвета корки ХБИ за определённый промежуток времени.

Для эффективного использования математической модели динамики окраски корки ХБИ проведем параметрическую идентификацию с привязкой к конкретной марке и рецептуре ХБИ, а также соответствующему оборудованию и технологии. Необходим эксперимент, позволяющий для заданной марки ХБИ и соответствующей рецептуры получить кинетические зависимости показателя окраски корки от времени при различных комбинациях начальных условий и режимов выпечки. В простейшем случае речь идет о заданной температуре и времени выпечки.

Выпекали хлеб из пшеничной муки 1 сорта. Для оценки показателя качества окраски корки поверхности ХБИ использовали методику оценки из работы [4].

Для реализации методики оценки показателя качества окраски корки использовались контрольные экземпляры ХБИ, которые одновременно загружались в печь. По истечении заданного интервала времени один из образцов извлекался, и для него проводилась оценка показателя качества по описанной выше методике. Отбор проводился через каждые 2 мин.

В результате получено множество оценок показателя качества окраски корки ХБИ $C = \{c_i, t_i\}, i = 1, Nt$, где Nt – количество отбросов образцов. При изменении условий эксперимента, в случае выпечки при разных температурах такое множество значений формируется при каждом эксперименте: $C = \{c_{ij}, t_{ij}\}, i = 1, Nt; j = 1, Ne$.

На основе сформированных множеств значений показателя окраски корки ХБИ осуществляется процедура параметрической идентификации математической модели (5).

Ее задачей является поиск параметров $k_0, k_1, k_T, E_{Acol}, Q_{T_{\text{г}}}$, обеспечивающих адекватное описание процесса изменения показателя окраски корки ХБИ и минимальное отклонение рассчитываемых данных по математической модели от экспериментальных.

Для осуществления параметрической идентификации использовался критерий вида:

$$S = \sum_{i=1}^N (C_{\text{ýèñí}} - C_{\text{ðàñí}})^2. \quad (6)$$

Методом покоординатного спуска искомые параметры, минимизирующие критерий (6):

$$S = \sum_{i=1}^N \left(C_{\text{ýèñí}} - C_{\text{ðàñí}} \right)^2 \longrightarrow \min.$$

k_0, E_{Acol}, k_T

Проверяли адекватность полученных моделей по критерию Фишера [5]:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \left(C_{\text{ýèñí}} - \frac{\sum_{i=1}^N C_{\text{ýèñí}}}{N} \right)^2}{N-1},$$

где σ^2 – выборочная дисперсия относительно среднего;

$$\sigma_{\text{íñò}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (C_{\text{ýèñí}} - C_{\text{ðàñí}})^2}{N - L - 1},$$

где $\sigma_{\text{ост}}^2$ – остаточная дисперсия; L – количество определяемых по выборке параметров.

Критерий Фишера рассчитывался по формуле [5]:

$$F = \frac{\sigma^2}{\sigma_{\text{ост}}^2}.$$

Каждый раз после отбора контрольного образца для него осуществлялись процедуры

оценки показателя окраски корки по разработанной методике [4] и расчет этого показателя по математической модели. Этот процесс продолжался до окончания времени выпечки или по достижении заданного показателя окраски корки ХБИ. Далее с использованием численного метода оптимизации осуществлялся подбор параметров математической модели $k_0, k_1, k_T, E_{Acol}, Q_{Ti\ y\bar{e}}$, минимизирующих значение целевой функции S . В результате процедуры оптимизации получался вектор параметров математической модели для текущей фиксированной температуры выпечки. В случае учета зависимости скорости изменения показателя окраски корки от температуры вышеописанную процедуру повторяли при разных заданных температурах выпечки. Это позволило оценить зависимость константы скорости изменения показателя окраски корки от температуры выпечки.

На рис. 4 и 5 представлены результаты параметрической идентификации исследований. При этом в ходе проведения эксперимента и по литературе [1] были определены следующие константы для модели (5): $T_{ai\ c\bar{a}} = 220\ ^\circ\text{N}$, $T_{i\ y\bar{e}} = 50\ ^\circ\text{N}$,

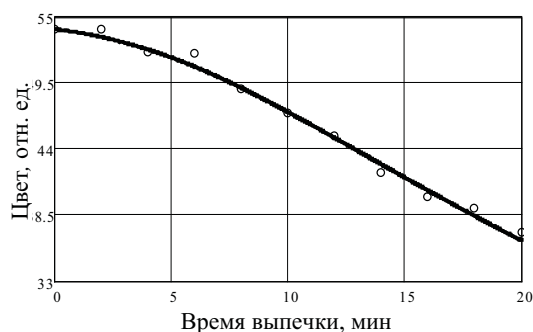


Рис. 4. Результат идентификации моделью (5) экспериментальных значений для цвета корки: $\circ\circ\circ$ — экспериментальные; — — расчетные значения цвета корки



Рис. 5. Результат идентификации моделью (5) экспериментальных значений для температуры корки: $\circ\circ\circ$ — экспериментальные; — — расчетные значения температуры корки

Для рассматриваемого случая определены значения критерия Фишера: $F_{расч.(\text{цвет})} = 58,01$, $F_{расч.(T)} = 44,11$. Табличное значение критерия Фишера $F_{табл.} = 2,69$ [5] следовательно, модель (5), адекватно описывает экспериментальные данные динамики цвета корки ХБИ и её температуру.

Таким образом, получена математическая модель динамики изменения одного из важных органолептических показателей качества для хлебобулочных изделий — цвета корки, которая адекватно описывает динамику изменения цвета корки и её температуру, что в дальнейшем позволит на ее основе прогнозировать значение показателя качества при заданных температуре и времени выпечки ХБИ, а также рассчитывать корректирующие значения времени и температуры выпечки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ауэрман, Л.Я. Технология хлебопекарного производства [Текст]: учебник / Л.Я. Ауэрман, — 9-е изд.; перераб. и доп. — СПб. Профессия, 2003. — 416 с.
2. Битюков, В.К. Параметры статистических распределений для определения показателей качества [Текст] / В.К. Битюков, А.А. Хвостов, Е.И. Пономарева [и др.] // Сборник трудов II Международной научно-технической конференции. — Воронеж. — 2010. — С. 503–504.
3. Штиллер, В. Уравнение Аррениуса и неравновесная кинетика [Текст] / В. Штиллер. — М.: Мир, 2000. — 176 с.
4. Битюков, В.К. Автоматизированная система контроля качества цвета хлебобулочных изделий [Текст] / В.К. Битюков, А.А. Хвостов, Д.И. Ребриков, С.С. Рылев // Вестник ВГТА. — 2011. — № 2. С. 40–44.
5. Грановский, В.А. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях [Текст] / В.А. Грановский, Т.Н. Сирая. — Л.: Энергоатомиздат, 1990. — 280 с.