

Профессор В.И. Рязских, доцент В.А. Сумин, доцент А.А. Богер
(Воронеж. гос. ун-т. инж. технол.) кафедра высшей математики, тел. (473) 255-35-54

Температурное поле тепловыделяющей жидкости в квадратной области с неоднородными граничными условиями первого рода

На основе применения интегрального преобразования Фурье аналитически решена задача о стационарном распределении температурных полей тепловыделяющей жидкости в квадратной области при неоднородных граничных условиях первого рода для кондуктивного режима переноса теплоты.

Based on the of the integral Fourier transforms the problem of stationary temperature fields distribution of heat-generating fluid in a square area is analytically solved under non-uniform first kind boundary conditions for the conductive heat transfer mode.

Ключевые слова: неоднородные граничные условия первого рода, преобразование Фурье, стационарное распределение температурных полей.

В связи с проблемой хранения радиоактивных отходов пристальный интерес исследователей вызывает изучение поведения тепловыделяющих жидкостей в замкнутых объемах при различных граничных условиях на смоченной поверхности [1, 2]. Для решения этой задачи необходимо рассмотрение тепловой обстановки не только в турбулентном и ламинарном режимах, но и в кондуктивном, когда вязкость среды высока из-за присутствия твердой дисперсной фазы. Это дает основание использовать в качестве модельного представления о механизме переноса теплоты только молекулярную теплопроводность [3]. В такой постановке задачи можно идентифицировать структуру температурного поля и определить ряд характеристик, среди которых локализация и величина максимальной температуры имеет наиболее важное прикладное значение.

Рассматривается квадратная область со стороной h , м, содержащая теплопроводную среду с однородной мощностью тепловыделения q , Вт/м³, и известными теплофизическими характеристиками – плотностью ρ , кг/м³; теплопроводностью λ , Вт/(м·К); теплоемкостью c_p , Дж/(кг·К), одна сторона которой поддерживается при температуре t_1 , К, а остальные – при температуре t_0 , К. Математическая формулировка задачи в этом случае будет:

$$\rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) + q; \quad (1)$$

$$t(x, h) = t_1; \quad (2)$$

$$t(h, y) = t(x, 0) = t(h, y) = t_0; \quad (3)$$

где τ – текущее время, с; t – локальная температура, К.

Пусть для определенности $t_1 > t_0$, тогда система (1)–(3) в безразмерном виде такова:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \theta} = \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right) + \frac{1}{Pr}; \quad (4)$$

$$T(X, 1) = T_1; \quad (5)$$

$$T(0, Y) = T(X, 0) = T(1, Y) = 0; \quad (6)$$

где $X = \frac{x}{h}$; $Y = \frac{y}{h}$; $\theta = \frac{\tau \nu}{h^2}$; $T_1 = \frac{(t_1 - t_0)\lambda}{qh^2}$;

$Pr = \frac{\nu}{a}$; ν , a – кинематическая вязкость и теплопроводность среды, м²/с.

Будем рассматривать стационарный случай, тогда система (4)–(6) трансформируется в систему

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} = -1; \quad (7)$$

$$T(X, 1) = T_1; \quad (8)$$

$$T(0, Y) = T(X, 0) = T(1, Y) = 0. \quad (9)$$

Данная задача является задачей Дирихле для эллиптического уравнения в прямоугольнике. Ее решение имеет вид [5]

$$T_1(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-2}{sh(\mu_n)} \left(\frac{T_0(\cos \mu_n - 1)}{\mu_n} \right) sh(\mu_n Y) \right\} \times \\ \times sh(\mu_n X) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(\cos \mu_m - 1)}{\mu_m^3} \left\{ ch(\mu_m X) + \frac{1 - ch \mu_m}{sh \mu_m} \times \right. \\ \left. \times sh(\mu_m X) \right\} \sin(\mu_m Y) + 0.5Y - 0.5Y^2. \quad (10)$$

Однако решение задачи (7) – (9) можно получить в другой форме, используя конечное интегральное преобразование.

Применим конечное интегральное синус-преобразование [4] по переменной X :

$$\frac{\partial^2 T_X}{\partial Y^2} - \lambda^2 T_X = \frac{1}{\lambda} (\cos \lambda - 1); \quad (11)$$

$$T_X(0) = 0; \quad (12)$$

$$T_X(1) = -\frac{T_1}{\lambda} (\cos \lambda - 1), \quad (13)$$

где T_X – изображение T ; λ – корни характеристического уравнения $\sin \lambda = 0$. Решение уравнения (11) с граничными условиями (12) – (13) имеет вид

$$T_X \frac{\cos \lambda - 1}{\lambda} \left[\frac{sh[\lambda(1-Y)]}{\lambda^2} + \left(\frac{1}{\lambda^2} - T_1 \right) \frac{sh(\lambda Y)}{sh \lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \right]. \quad (14)$$

Используя формулу обращения интегрального синус-преобразования [4], получим

$$T = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n - 1}{\lambda_n} \left[\frac{sh[\lambda_n(1-Y)]}{\lambda_n^2} + \left(\frac{1}{\lambda_n^2} - T_1 \right) \frac{sh(\lambda_n Y)}{sh \lambda_n} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\lambda_n^2} \right] \sin(\lambda_n X), \quad (15)$$

где $\lambda_n = \pi n, n = \overline{1, \infty}$.

Для двух методов решения получим следующие графические зависимости для $x = 0.5$. Исходя из рис.1 можно заключить, что решение, полученное при помощи конечных интегральных преобразований и методом разделения переменных, одинаково.

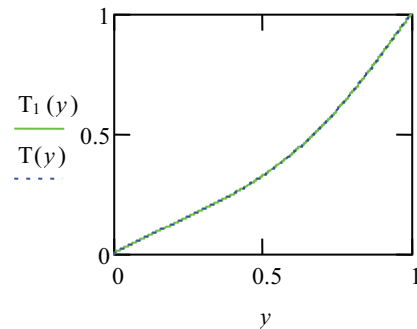


Рис. 1. Сравнение профилей температур в срединном сечении области решения

Решение (15) может быть обобщено для различных вариантов граничных условий

$$T(0, Y) = T_1; T(1, Y) = T(X, 0) = T(X, 1) = 0; \quad (16)$$

$$T(1, Y) = T_1; T(0, Y) = T(X, 1) = T(X, 0) = 0; \quad (17)$$

$$T(X, 0) = T_1; T(0, Y) = T(X, 1) = T(1, Y) = 0; \quad (18)$$

$$T(0, Y) = T(X, 1) = T_1; T(1, Y) = T(X, 0) = 0; \quad (19)$$

$$T(0, Y) = T(1, Y) = T_1; T(X, 1) = T(X, 0) = 0; \quad (20)$$

$$T(0, Y) = T(X, 0) = T(1, Y) = T_1; T(X, 1) = 0. \quad (21)$$

Для граничных условий (16)–(18) решения по структуре аналогичны (15), а для граничных условий (19)–(21) решения получены с использованием принципа суперпозиции в силу линейности задачи:

$$T = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \mu_m - 1}{\mu_m} \left[\frac{sh(\mu_m X)}{\mu_m^2} - \left(T_1 - \frac{1}{\mu_m^2} \right) \frac{sh[\mu_m(1-X)]}{sh \mu_m} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\mu_m^2} \right] \sin(\mu_m Y) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n - 1}{\lambda_n} \times \left[\frac{sh[\lambda_n(1-Y)]}{\lambda_n^2} - \right. \\ \left. - \frac{\left(T_1 - \frac{1}{\lambda_n^2} \right) sh(\lambda_n Y)}{sh \lambda_n} - \frac{1}{\lambda_n^2} \right] \sin(\lambda_n X); \quad (22)$$

$$T = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \mu_m - 1}{\mu_m} \left[\frac{sh[\mu_m(1-X)] + \left(\frac{2}{\mu_m^2} - T_1 \right) sh(\mu_m X)}{sh \mu_m} - \frac{2}{\mu_m^2} \right] \sin(\mu_m Y); \quad (23)$$

$$T = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \mu_m - 1}{\mu_m} \left[\frac{sh[\mu_m(1-X)] + \left(\frac{2}{\mu_m^2} - T_1 \right) sh(\mu_m X)}{sh \mu_m} - \frac{2}{\mu_m^2} \right] \sin(\mu_m Y) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n - 1}{\lambda_n} \times \left[\frac{sh(\lambda_n Y)}{\lambda_n^2} - \frac{1}{sh \lambda_n} \right] \sin(\lambda_n X), \quad (24)$$

где λ и μ – корни уравнений $\sin \lambda = 0$ и $\sin \mu = 0$.

Структура температурных полей при различных граничных условиях показана на рис. 2. Видно, что увеличение T_1 приводит к пропорционально-эквидистантному увеличению значений температур в области решения.

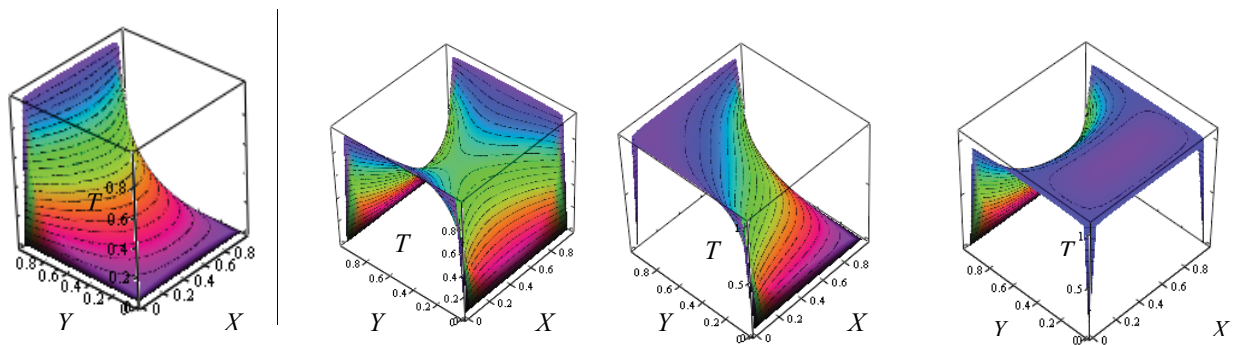


Рис. 2. Температурные поля при $T_1 = 1$, соответствующие решениям (15), (22)–(24)

Анализ рядов, проведенный численно, позволяет сделать вывод о быстрой их сходимости. Например, представленные температурные поля на рис. 2, получены при $n = 25$, что вполне по точности удовлетворяет инженерной практике. Отметим, что в случае нагрева противоположных сторон, температурное поле имеет структуру “седла”. Таким образом, неоднородность температурного поля определяется неоднородностью граничных условий, которую необходимо учитывать в задачах переноса теплоты в тепловыводящих жидкостях в кондуктивном режиме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никифоров, А.С. Обезвреживание жидких радиоактивных отходов [Текст] / А.С. Никифоров, В.В. Куличенко, М.И. Жихарев. – М.: Энергостомиздат, 1985. – 184 с.
2. Большов, Л.А. Свободная конвекция тепловыделяющей жидкости [Текст] / Л.А. Большов, П.С. Кондратенко, В.Ф. Стрижов // Успехи физических наук. – 2001. – Т. 171. – № 10. – С. 1051–1070.
3. Лыков, А.В. Теплообмен [Текст] : справочник / А.В. Лыков. – М.: Энергия, 1978. – 480 с.
4. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 832 с.
5. Беляев, Н.М. Методы теории теплопроводности [Текст] / Н.М. Беляев. В 2 частях. Ч. 1. – М.: Высшая школа, 1982. – 327 с.