

Профессор В.Н. Колодежнов

(Воронеж. гос. ун-т инж. технол.) кафедра теоретической механики,
тел. (473) 255-55-57

Анализ некоторых особенностей развития поля скоростей в случае плоского течения жидкости, реологическая модель которой учитывает поперечную вязкость

Рассмотрена реологическая модель жидкости, которая учитывает эффекты поперечной вязкости. Проведен анализ некоторых особенностей развития поля скоростей.

The rheological model of a liquid, which takes into account the effects of the cross - viscosity is considered. The analysis of some peculiarities of the development of the velocity field is carried out.

Ключевые слова: реологическая модель, поперечная вязкость, распределение скорости

В гидродинамике наряду с так называемыми ньютоновскими жидкостями, динамическая вязкость которых является постоянной, рассматриваются также нелинейно-вязкие не-ньютоновские жидкости с более сложными реологическими моделями.

При этом нельзя исключать возможность изменения реологической модели поведения жидкости в зависимости от уровня второго инварианта тензора скоростей деформаций или в частном случае скорости сдвига демонстрируют самые разные вязкие среды. В этой связи нередко предполагается, что динамическая вязкость описывается разными функциями на разных интервалах изменения второго инварианта тензора скоростей деформаций или, опять же, в частном случае скорости сдвига [1-9].

В данной работе предлагается реологическая модель подобной структуры (с различным поведением жидкости на различных интервалах изменения второго инварианта тензора скоростей деформаций), но применительно к поперечной вязкости. При этом за основу такой модификации принимается классическая модель Рейнера - Ривлина [6] с постоянным значением поперечной вязкости.

На основе предложенной реологической модели проводится анализ некоторых особенностей развития поля скоростей в окрестности рассматриваемых точек области течения для жидкости, реологическая модель которой

учитывает проявление эффекта поперечной вязкости при превышении вторым инвариантом тензора скоростей деформаций некоторого порогового критического значения.

Реологическая модель. Введем в рассмотрение реологическую модель вязкой несжимаемой жидкости в соответствии со следующими соотношениями

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} + 4\eta(I_2) \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ik} \epsilon_{kj}; \quad (1)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right); \quad i, j = 1, 2, 3;$$

$$I_2 = \epsilon_{11}\epsilon_{22} + \epsilon_{22}\epsilon_{33} + \epsilon_{33}\epsilon_{11} - \epsilon_{12}^2 - \epsilon_{23}^2 - \epsilon_{31}^2;$$

$$\eta(I_2) = \begin{cases} 0; & |I_2| < I_{2\eta}; \\ \eta_0; & |I_2| > I_{2\eta}; \end{cases}$$

$$I_{2\eta} > 0 - \text{const}; \quad \mu - \text{const},$$

где τ_{ij} , ϵ_{ij} - компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций; P - давление; δ_{ij} - символ Кронекера; μ - динамическая вязкость жидкости; v_j - проекции скорости на направления координатных осей декартовой системы отсчета; x_j - координаты; $\eta(I_2)$ - поперечная вязкость жидкости, представленная в виде кусочно-постоянной функции второго инварианта тензора скоростей деформаций I_2 ; $I_{2\eta}$ - некоторое критическое значение второго инварианта тензора скоростей деформаций.

Жидкость с такой реологической моделью в той части области течения, где выполняется условие $|I_2| < I_{2\eta}$, ведет себя, как традиционная ньютоновская жидкость. В другой же части области течения, где выполняется обратное условие $|I_2| > I_{2\eta}$, сплошная среда проявляет свойства жидкости Рейнера - Ривлина [6].

Постановка задачи. Определяющие уравнения. Пусть в некоторый, условно принимаемый в качестве начального, момент времени в рассматриваемой области сформировалось плоское течение, поле скоростей и распределение давления в котором удовлетворяют уравнениям Навье – Стокса [10] для классической ньютоновской жидкости с постоянным значением динамической вязкости μ независимо от конкретного распределения значений второго инварианта тензора скоростей деформаций (в смысле возможного превышения ими уровня $I_{2\eta}$). Рассмотрим вопрос о том, как в дальнейшем может эволюционировать такое распределение скорости и давления в малой окрестности некоторой точки, начиная с начального момента времени, при условии, что в этой точке и ее малой окрестности выполняется неравенство $|I_2| > I_{2\eta}$. Последнее условие означает, что, начиная с начального момента времени, “включается” в соответствии с реологической моделью фактор поперечной вязкости.

Введем декартову систему координат, расположив ее начало в рассматриваемой точке. При этом ось Ox_1 ориентируем по касательной к линии тока, а ось Ox_2 - по нормали к ней.

Если считать, что линии тока являются достаточно “гладкими”, то в малой окрестности рассматриваемой точки (начала координат) в начальный момент времени поле скоростей $\vec{v}(x_1, x_2)$ в первом приближении можно считать одномерным. Что же касается давления $p(x_1, x_2)$, то, опять же, в первом приближении (по аналогии с одномерными течениями вязкой ньютоновской жидкости) можно считать его зависящим лишь от продольной координаты. Иначе говоря, в малой окрестности начала координат должны выполняться условия:

$$\text{при } t = 0; \quad v_1 = U(x_2); \quad v_2 = 0; \quad p = P(x_1), \quad (2)$$

где $U(x_2)$, $P(x_1)$ - заданные функции соответствующих координат, которые удовлетворяют уравнениям Навье - Стокса для ньютоновской жидкости и условию неразрывности.

Получим уравнения, описывающие динамику жидкости с реологической моделью (1) в малой окрестности рассматриваемой точки и для малых моментов времени, непосредственно следующих за начальным моментом времени. Будем считать, что для такой пространственной области и на таком временном интервале распределения скоростей и давления допустимо представлять в виде суммы начальных распределений этих величин и их малых приращений

$$\begin{cases} v_1(t, x_1, x_2) = U(x_2) + u_1(t, x_1, x_2); \\ v_2(t, x_1, x_2) = u_2(t, x_1, x_2); \\ p(t, x_1, x_2) = P(x_1) + p_0(t, x_1, x_2). \end{cases} \quad (3)$$

Перейдем к безразмерной форме представления основных уравнений с учетом соотношений

$$\begin{aligned} U' &= \frac{U}{u_S}; \quad P' = \frac{P}{p_S}; \quad p'_0 = \frac{p_0}{p_S}; \quad t' = \frac{t}{t_S}; \\ v'_j &= \frac{v_j}{u_S}; \quad u'_j = \frac{u_j}{u_S}; \quad x'_j = \frac{x_j}{L_S}; \quad \tau'_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{\tau_S}; \\ i, j &= 1, 2, 3; \\ u_S &= U(0); \quad \tau_S = p_S = \rho \cdot u_S^2, \end{aligned} \quad (4)$$

где u_S , L_S , t_S , τ_S , p_S - характерные и принимаемые в качестве масштабных величины скорости, расстояния, времени, напряжения и давления; ρ - плотность жидкости.

Здесь в (4) и далее верхним штрихом обозначены безразмерные величины.

Говоря о выборе масштабных величин для расстояния L_S и времени t_S , заметим следующее. В предлагаемой задаче рассматривается лишь начальная стадия течения в малой окрестности рассматриваемой точки (начала координат) и для достаточно малого (“стартового”) интервала времени. Принимая во внимание такую “неопределенность” задания пространственных размеров области течения и характерного времени протекания процесса, можно видеть, что ввести конкретные значения L_S и t_S традиционным образом представляется затруднительным. В этой связи линейный масштаб и масштаб для времени предлагается ввести в рассмотрение следующим образом:

$$L_S = \frac{\mu \cdot K}{\rho \cdot u_S} = \left| \frac{dU}{dx_2} \left(\frac{d^2U}{dx_2^2} \right)^{-1} \right|_{x_2=0};$$

$$t_S = \frac{L_S}{u_S} = \frac{\mu \cdot K}{\rho \cdot u_S^2} = \left| \frac{dU}{dx_2} \left(\frac{d^2U}{dx_2^2} \right)^{-1} \right|_{x_2=0};$$

$$K = \frac{|\text{grad}(T)|}{|\text{grad}(2\mu\sqrt{-I_2})|} \Big|_{x_2=0}; \quad T = \frac{\rho u_S^2}{2},$$

где T - плотность кинетической энергии;
 K - безразмерный комплекс.

При таком переходе к безразмерным величинам комплекс K [11] представляет собой по смыслу локальное число Рейнольдса, характеризующее местное соотношение факторов энергетики потока и диссипации в нем. Здесь, естественно, предполагается, что в рассматриваемой точке соответствующие производные отличны от нуля.

В представленной задаче этот безразмерный комплекс через начальное распределение скорости потока в окрестности рассматриваемой точки (начала координат) может быть представлен следующим образом:

$$K = \left| \frac{\rho \cdot U}{\mu} \frac{dU}{dx_2} \left(\frac{d^2U}{dx_2^2} \right)^{-1} \right|_{x_2=0}.$$

Другие варианты также нетрадиционно-го введения локального числа Рейнольдса, подобные безразмерному комплексу K , описаны в [12] со ссылкой на [13,14], а также приводятся в работах [15,16].

С учетом (1), (2) после перехода к безразмерным величинам уравнения динамики жидкости и условие неразрывности потока в малой окрестности рассматриваемой точки принимают вид

$$\frac{\partial u'_1}{\partial t'} + U' \frac{\partial u'_1}{\partial x'_1} + u'_2 \frac{dU'}{dx'_2} = -\frac{\partial p'_0}{\partial x'_1} + \frac{1}{K} \left(\frac{\partial^2 u'_1}{\partial x'^2_1} + \frac{\partial^2 u'_1}{\partial x'^2_2} \right) +$$

$$+ 2 \cdot K_0 \left\{ \frac{dU'}{dx'_2} \left(\frac{\partial^2 u'_1}{\partial x'_1 \partial x'_2} + \frac{\partial^2 u'_2}{\partial x'^2_1} \right) \right\}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial u'_2}{\partial t'} + U' \frac{\partial u'_2}{\partial x'_1} = -\frac{\partial p'_0}{\partial x'_2} + \frac{1}{K} \left(\frac{\partial^2 u'_2}{\partial x'^2_1} + \frac{\partial^2 u'_2}{\partial x'^2_2} \right) +$$

$$+ 2K_0 \left\{ \frac{dU'}{dx'_2} \left(\frac{\partial^2 u'_2}{\partial x'_1 \partial x'_2} + \frac{\partial^2 u'_1}{\partial x'^2_2} \right) \right\} +$$

$$+ 2K_0 \left\{ \frac{dU'}{dx'_2} \frac{d^2U'}{dx'^2_2} + \frac{d^2U'}{dx'^2_2} \left(\frac{\partial u'_1}{\partial x'_2} + \frac{\partial u'_2}{\partial x'_1} \right) \right\}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u'_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial u'_2}{\partial x'_2} = 0. \quad (7)$$

Здесь K_0 представляет собой еще один безразмерный комплекс, характеризующий влияние поперечной вязкости и определяемый следующим образом [17]:

$$K_0 = \frac{\eta}{\rho L_S^2} = \left| \frac{d^2U}{dx_2^2} \left(\frac{dU}{dx_2} \right)^{-1} \right|_{x_2=0}^2.$$

Следует отметить, что при выводе (5)–(7) принимали во внимание то обстоятельство, что начальные распределения скорости и давления в окрестности рассматриваемой точки тождественно удовлетворяют уравнениям Навье – Стокса с постоянной динамической вязкостью. Естественно, что при окончательной записи (5), (6) ограничивались лишь линейными членами по отношению к малым безразмерным приращениям скоростей и давления в (3).

В частном случае, когда поперечной вязкостью допустимо пренебречь либо она не проявляется в силу выполнения условия $|I_2| < I_{2\eta}$, имеем $K_0 = 0$. В такой ситуации уравнения (5)–(7) после традиционной процедуры исключения p'_0 и перехода к функции тока сводятся к уравнению Орра – Зоммерфельда [18 - 20].

Анализ особенностей развития поля скоростей. Провести решение системы уравнений (5)–(7) для общего случая представляется затруднительным, в том числе и по той причине, что в рассматриваемой задаче о развитии течения в малой окрестности некоторой точки (начала координат) не совсем ясной является постановка граничных условий. Тем не менее можно получить некоторые результаты, касающиеся характерных особенностей в развитии поля скоростей на “стартовом” периоде, непосредственно следующим за начальным моментом времени.

Поскольку речь идет лишь о некоторой малой окрестности рассматриваемой точки (начала координат), разложим безразмерные приращения скоростей и давления здесь в ряд по степеням координат и представим их в виде

$$u'_k(t', x'_1, x'_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} w'_{k,n,m}(t') x_1'^n x_2'^m; \quad (8)$$

$k = 1, 2$;

$$p'_0(t', x'_1, x'_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} q'_{n,m}(t') x_1'^n x_2'^m, \quad (9)$$

где $w'_{k,n,m}(t')$, $q'_{n,m}(t')$ - безразмерные коэффициенты в разложениях (8), (9), представляющие собой неизвестные функции времени.

Кроме этого разложим функцию $U'(x'_2)$ в ряд по степеням поперечной координаты в окрестности рассматриваемой точки

$$U'(x'_2) = \sum_{m=0}^{\infty} U'_m x_2'^m, \quad (10)$$

где U'_m - известные коэффициенты разложения.

Говоря о разложении типа (10), заметим, что в целом ряде известных профилей скорости (например, параболического профиля скорости для течения Пуазейля и некоторых других) количество слагаемых здесь может быть конечным.

Поскольку предполагается, что имеют место соотношения (2) и, следовательно, вначале с учетом (3) приращения скоростей и давления отсутствуют, то безразмерные коэффициенты в (8), (9) должны удовлетворять начальным условиям:

$$\begin{aligned} \text{при } t' = 0; \quad w'_{k,n,m} = 0; \quad q'_{n,m} = 0; \\ k = 1, 2; \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Подставим (8)–(10) в систему уравнений (5)–(7). Тогда, выполняя соответствующие операции и приравнявая коэффициенты при одних и тех же степенях координат в левой и правой частях соотношений (5)–(7), приходим к системе уравнений относительно функций $w'_{k,n,m}(t')$ и $q'_{n,m}(t')$.

Сразу же укажем, что такая система уравнений не будет замкнутой. Ее замыкание следует проводить с привлечением соответствующих граничных условий, о сложности постановки которых уже говорилось выше.

Для примера приведем вид этой незамкнутой системы в случае, когда после соответствующих преобразований в (5), (6) допустимо ограничиться лишь по одному уравнению, построенному на основе коэффициентов при нулевой степени координат

$$\frac{dw'_{1,0,0}}{dt'} + U'_0 w'_{1,1,0} + U'_1 w'_{2,0,0} = -q'_{1,0} +$$

$$+ \frac{2}{K} (w'_{1,2,0} + w'_{1,0,2}) + 2U'_1 (w'_{1,1,1} + 2w'_{2,2,0});$$

$$\begin{aligned} \frac{dw'_{2,0,0}}{dt'} + U'_0 \cdot w'_{2,1,0} = -q'_{0,1} + \frac{2}{K} (w'_{2,2,0} + w'_{2,0,2}) + \\ + 2K_0 \{ 2U'_1 U'_2 + U'_1 (2w'_{1,0,2} + w'_{2,1,1}) + \\ + 2U'_2 (w'_{1,0,1} + w'_{2,1,0}) \}; \end{aligned}$$

$$w'_{1,1,0} + w'_{2,0,1} = 0;$$

$$2w'_{1,2,0} + w'_{2,1,1} = 0;$$

$$w'_{1,1,1} + 2w'_{2,0,2} = 0.$$

Три последних уравнения здесь следуют из уравнения неразрывности (7).

Принимая во внимание (11), перейдем в получаемой системе к пределу при $t' \rightarrow 0$. Тогда приходим к следующим выражениям для начальных значений производных по времени от искомых функций, определяющих с учетом (8) распределения скоростей на “стартовом” интервале времени,

$$\begin{aligned} \left. \frac{dw'_{1,n,m}}{dt'} \right|_{t'=0} = 0; \\ \left. \frac{dw'_{2,n,m}}{dt'} \right|_{t'=0} = \begin{cases} 0; & n = 1, 2, 3, \dots; \\ Q_m; & n = 0; \end{cases} \quad (12) \\ n, m = 0, 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

$$Q_m = 2K_0 \sum_{k=1}^{m+1} k(m+3-k)(m+2-k) U'_k U'_{m+3-k}.$$

Будем полагать, что начальное распределение скорости (10) в окрестности рассматриваемой точки таково, что не все значения Q_m равняются нулю. Например, для часто встречающегося параболического профиля из (10) получаем

$$\begin{aligned} Q_0 = 4K_0 U'_1 U'_2; \quad Q_1 = 8K_0 U'^2_2; \\ Q_m \equiv 0; \quad m = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Исключение составляют такие рассматриваемые точки, в окрестности которых начальный профиль описывается линейной функцией.

Таким образом, если для рассматриваемого начального профиля скорости хотя бы отдельные Q_m не равняются нулю, то производная по времени от поперечной составляющей скорости в начальный момент времени в окрестности изучаемой точки не будет тождественно равняться нулю.

Иначе говоря, при выполнении условия $|I_2| > I_{2\eta}$ на “стартовом” временном интервале, непосредственно следующим за начальным моментом времени, в окрестности рассматриваемой точки будут “генерироваться” поперечные составляющие скорости, которые до этого здесь отсутствовали.

Если же начальное распределение скорости таково, что выполняется условие $|I_2| < I_{2\eta}$ и $K_0 = 0$, то из (12) следует, что в начальный момент времени все производные обращаются в ноль. Это означает, что в такой ситуации не следует ожидать появления поперечной составляющей скорости.

Такое развитие поля скоростей для жидкости с реологической моделью (1) может интерпретироваться как начало перехода ламинарного режима течения в турбулентный.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов, Н. В. Упруго-пластические свойства нефтяных битумов [Текст] / Н. В. Михайлов // Коллоидный журнал. - 1955. - Т. 17. - № 3, - С. 242-246.
2. Гудкова, Т. И. К вопросу о влиянии структурно-механических свойств печатных красок на их поведение в печатном производстве [Текст] / Т. И. Гудкова, Л. А. Козаровицкий, Н. В. Михайлов // Коллоидный журнал. - 1960, Т. 22. - № 6. - С. 649-657.
3. Ябко, Б. М. Научно обоснованный метод выбора оптимальных составов водных красок [Текст] / Б. М. Ябко, Н.В. Михайлов. - Кишинев, 1962. - С. 17.
4. Nakamura Tadahisa, Ueki Masanori. The high temperature torsional deformation of a 0,06 % C mild steel. - Trans. Iron and steel Inst. Jap. - 1975. -Т. 15. - № 4. p. 185-193.
5. Кузин, В.Г. Движение нелинейно-вязкой среды в цилиндрическом канале произвольного сечения [Текст] / В. Г. Кузин // Прикладная механика. - 1979. - Т. XV. - № 7. с. 101-106.
6. Литвинов, В.Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости [Текст] / В.Г. Литвинов. - М.: Наука. 1982. - 376 с.
7. Овчинников, П. Ф. Виброреология [Текст] / П. Ф. Овчинников. - Киев: Наукова думка, 1983. - 272 с.
8. Анистратенко, В. А. Исследование реологических свойств фильтрационного осадка как объекта транспортирования [Текст] / В. А. Анистратенко, В. Н. Кошечая, Б. Н. Вавиловой // Известия ВУЗов. Пищевая технология. 1992. - № 1. - С. 54-57.
9. Колодежнов, В.Н. Исследование течений вязких жидкостей с пределом применимости ньютоновской модели. // Восьмой Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. УрО РАН, 2001. С. 346.
10. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа [Текст] / Л.Г. Лойцянский. - М.: Наука, 1987. - 840 с.
11. Колодежнов, В.Н. Об одном безразмерном комплексе для моделирования течений вязкой неньютоновской жидкости [Текст] // Сб. трудов международной школы-семинара. «Современные проблемы механики и прикладной математики». В 2 ч. Ч. 1. - Воронеж; ВГУ. 2005. - С. 166 – 168.
12. Артюшков, Л.С. Динамика неньютоновских жидкостей [Текст] / Л.С. Артюшков – Л. Ленинградский кораблестроительный институт, 1979. – 228 с.
13. Ryan N.W., Johnson M.M. Transition from Laminar to Turbulent Flow in Pipes. // AIChE Journal. 1959. Vol. 5. No 4, P. 433 – 435.
14. Hanks R.W. The Laminar-Turbulent Transition for Flow in Pipes, Concentric Annuli and Parallel Plates. // AIChE Journal. 1963. Vol. 9. No 1, P. 45 – 48.
15. Джаугаштин, К.Е. О критическом режиме струйных течений [Текст] / К.Е. Джаугаштин, // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа - 1990. - № 3. -С. 11 – 15.
16. Dou Hua-Shu. Mechanism of flow instability and transition to turbulence. // International Journal of Non-Linear Mechanics. Vol. 4, No 4, 2006. P. 512 – 517.
17. Колодежнов, В.Н. Безразмерные комплексы и критерии подобия [Текст]: справочник / В.Н. Колодежнов, – Воронеж: ВГПУ, 2011. – 580 с.
18. Линь Цзя-Цзяо, О неустойчивости течений с градиентом скорости [Текст] / Линь Цзя-Цзяо, Бинни Д.Дж. Гидродинамическая неустойчивость. – М.: Мир, 1964. С.9 – 36.
19. Гольдштик, М.А., Гидродинамическая устойчивость и турбулентность [Текст] / М.А. Гольдштик, В.Н. Штерн – Новосибирск: Наука, 1977. – 367 с.
20. Маслоу, С.А. Неустойчивости и переход в сдвиговых течениях [Текст] / – В кн.: Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. – М.: Мир, 1984. - С. 218 – 270.