УДК 532.135:532.5

Профессор В.Н. Колодежнов
(Воронеж. гос. ун-т инж. технол.) кафедра физики, тел. (473) 255-55-57

Анализ основных схем сдвигового поступательного течения жидкости, демонстрирующей проявление эффекта “отвердевания”, в зазоре между коаксиальными цилиндрами

Проведен анализ пяти основных схем поступательного течения жидкости, демонстрирующей проявление эффекта “отвердевания”, в зазоре между коаксиальными цилиндрами.

The analysis of the five major schemes of the forward flow of fluid, demonstrating the effect of “solidification”, in the clearance between coaxial cylinders is carried out.

Ключевые слова: реологическая модель, неньютоновская жидкость, эффект “отвердевания”

Ряд экспериментальных данных указывает на то, что некоторые суспензии на основе мелкодисперсных частиц проявляют аномальное реологическое поведение [1-4]. Основной особенностью такой аномалии является то, что в зависимости от диапазона изменения величины скорости сдвига кривые течения для таких сплошных сред демонстрируют два участка (или две ветви) с различным характером изменения эффективной вязкости. На первом участке эффективная вязкость снижается до некоторого минимального значения, а на втором – возрастает. При этом приближение скорости сдвига к некоторому максимальному по модулю значению приводит к резкому увеличению крутизны кривой течения, что может быть интерпретировано как проявление эффекта “отвердевания” жидкости.

В [5] была предложена реологическая модель суспензий мелкодисперсных частиц, демонстрирующих проявление эффекта “отвердевания”. В данной работе проводится анализ реализации возможных схем поступательного сдвигового течения таких сплошных сред в зазоре между двумя коаксиальными цилиндрами.

Далее представлена математическая модель сдвигового поступательного течения в зазоре между двумя коаксиальными цилиндрами. Будем предполагать, что внешний цилиндр радиуса R_2 остается неподвижным, а внутренний, соответственно, радиуса R_1 – движется в установившемся режиме с некоторой скоростью V вдоль своей оси под действием приложенного к нему внешнего усилия F . В данном случае под F будем понимать силу в расчете на единицу длины внутреннего цилиндра.

Согласно реологической модели из [5], зависимость эффективной вязкости $\mu(\dot{\gamma})$ от скорости сдвига $\dot{\gamma}$ имеет две ветви. Тогда область течения в общем случае можно подразделять на две зоны. При этом первой зоной будем считать ту часть области течения (зазора между цилиндрами), в которой реализуется первая ветвь зависимости $\mu(\dot{\gamma})$, характеризуемая псевдопластическим поведением жидкости. Второй же зоной, соответственно, другую часть области течения, где реализуется вторая ветвь зависимости $\mu(\dot{\gamma})$ с дилатантным поведением. Это означает, что распределение скорости жидкости $u(r)$ в зависимости от радиальной координаты r удобно искать в виде:

$$u'(r') = \begin{cases} u'^{(1)}(r'); & |\dot{\gamma}'| \le \dot{\gamma}'_1; \\ u'^{(2)}(r'); & \dot{\gamma}'_1 \le |\dot{\gamma}'| \le 1; \end{cases} \qquad (1)$$

$$u' = \frac{u}{u_s}; \quad u_s = R_1 \cdot \dot{\gamma}_2; \quad \dot{\gamma}' = \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_2} = \frac{du'}{dr'};$$

$$\dot{\gamma}'_1 = \frac{\dot{\gamma}_1}{\dot{\gamma}_2}; \quad 0 < \dot{\gamma}' < 1; \quad r' = \frac{r}{R_1},$$

где u_s - принимаемое в качестве масштабного значение скорости; $\dot{\gamma}_1$ - пороговое значение модуля скорости сдвига, определяющее границу между первой и второй ветвью зависимости $\mu(\dot{\gamma})$; $\dot{\gamma}_2$ - критическое значение модуля скорости сдвига, при приближении к которому начинает проявляться эффект “отвердевания”.

В приведенных выше соотношениях и далее верхним штрихом отмечены безразмерные величины, а верхний числовой индекс в скобках относит соответствующие величины к первой ($i=1$) и второй ($i=2$) зонам течения.

С учетом (1), уравнение (2) динамики жидкости [6] для определения скорости и вытекающие из реологической модели [5] основные соотношения (3), (4) в безразмерной форме записи принимают вид:

$$\frac{d}{dr'}\left(r' \cdot \tau'^{(i)}_{rz}\right) = 0; \qquad i = 1, 2; \qquad (2)$$

$$\tau'^{(1)}_{rz} = -\frac{\left|\dot{\gamma}'^{(1)}\right|^{n_1}}{(1+B)\cdot \dot{\gamma}'^{\,n_1}_1}; \qquad (3)$$

$$\tau'^{(2)}_{r\theta} = -\frac{1}{(1+B)} \cdot \left\{ 1 + B \cdot 1 - \left(\frac{1 - \left|\dot{\gamma}'^{(2)}\right|}{1 - \dot{\gamma}'_1} \right)^{n_2} \right\}; \qquad (4)$$

$$\dot{\gamma}'^{(i)} = \frac{du'^{(i)}}{dr'} < 0; \quad \tau'^{(i)}_{rz} = \frac{\tau^{(i)}_{r\theta}}{\tau_2}; \qquad i = 1, 2;$$

$$n_2 = \frac{n_1 \cdot K_1 \cdot \dot{\gamma}_1^{\,n_1 - 1} \cdot \left(\dot{\gamma}_2 - \dot{\gamma}_1\right)}{\left(\tau_2 - K_1 \cdot \dot{\gamma}_1^{\,n1}\right)}; \quad B = \frac{\tau_2}{K_1 \cdot \dot{\gamma}_1^{\,n_1}} - 1;$$

где $\tau_{r\theta}$– касательное напряжение; n_2 , B - принятые для краткости записи промежуточные параметры; K_1, n_1, τ_2 - эмпирические константы реологической модели [5].

При этом в безразмерной форме внешнее силовое воздействие на внутренний цилиндр будем определять величиной $F' = \dfrac{F}{2 \cdot \pi \cdot R_1 \cdot \tau_2}$.

Анализируя уравнения (2) – (3) с учетом предполагаемого вида (1) распределения скорости жидкости в зазоре, можно показать, что в зависимости от исходных параметров системы и прикладываемого внешнего усилия возможна реализация пяти различных схем течения.

Рассмотрим теперь на уровне постановки задач эти основные схемы течения.

Произведем постановку задачи для первой схемы течения. При достаточно малых значениях F можно ожидать выполнения условия $\left|\dot{\gamma}'(r')\right| < \dot{\gamma}'_1$; для $r' \in [1; R'_2]$. Это, с учетом особенностей используемой реологической модели [5], означает, что в зазоре между цилиндрами будет реализована схема течения с традиционным степенным законом вязкости (рисунок 1). При этом весь зазор будет “заполнен” лишь одной первой зоной. На рисунке 1 и следующих рисунках номера зон отмечены соответствующими цифрами.

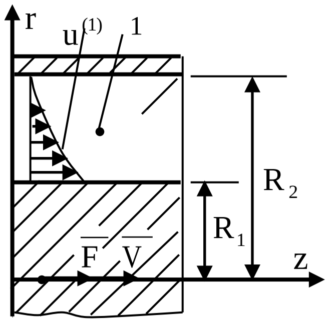

Рисунок 1 - Первая схема течения в зазоре.

Распределение скорости в зазоре должно определяться из решения системы уравнений (2), (3) с учетом граничных условий:

$r' = 1; \quad \tau'^{(1)}_{rz} = -F'$;

$r' = R'_2; \quad u'^{(1)} = 0$.

Такая схема (назовем ее первой схемой) течения будет иметь место до тех пор, пока приложенное усилие F' не достигнет некоторого порогового значения $F'_1 = (1+B)^{-1}$, при котором на поверхности внутреннего цилиндра скорость сдвига по модулю примет значение $\left|\dot{\gamma}'(1)\right| = \dot{\gamma}'_1$.

Далее произведем постановку задачи для второй схемы течения. При дальнейшем увеличении прикладываемого усилия ($F' > F'_1$) в окрестности поверхности внутреннего цилиндра начнет формироваться вторая зона течения, внутри которой будет реализовываться вторая ветвь зависимости эффективной вязкости $\mu(\dot{\gamma})$ от скорости сдвига. При этом можно предположить, что граница раздела между первой и второй зонами течения будет представлять собой цилиндрическую поверхность неизвестного заранее радиуса $R'_{\mu 2} = R_{\mu 2} / R_2$. Такой вариант будем называть второй схемой течения (рисунок 2).

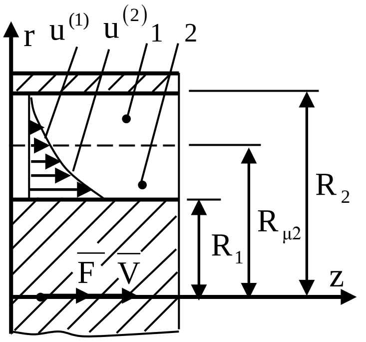

Рисунок 2 - Вторая схема течения в зазоре.

В этом случае распределение скорости в зазоре должно определяться из решения системы уравнений (2) - (4) с учетом следующих граничных условий:

$r' = 1; \quad \tau'^{(2)}_{rz} = -F'$;

$r' = R'_{\mu 2}; \quad u'^{(1)} = u'^{(2)}; \ \dot{\gamma}'^{(1)} = \dot{\gamma}'^{(2)} = -\dot{\gamma}'_1$;

$r' = R'_2; \quad u'^{(1)} = 0$.

В ходе решения такой задачи было показано, что:

$$R'_{\mu 2} = (1 + B) \cdot F' . \qquad (5)$$

Дальнейшее увеличение приложенного внешнего усилия в зависимости от исходных параметров может приводить еще к двум различным схемам течения.

Осуществим постановку задачи для третьей схемы течения. Пусть при некотором значении $F' = F'_2 > F'_1$ модуль скорости сдвига на поверхности внутреннего цилиндра достигает значения $\left|\dot{\gamma}'^{(2)}(1)\right| = 1$ при одновременном выполнении на поверхности внешнего цилиндра условия $\left|\dot{\gamma}'^{(1)}(R'_2)\right| < \dot{\gamma}'_1$. Это означает, что дальнейшее увеличение прикладываемого усилия ($F' > F'_2$) будет приводить к формированию в окрестности внутреннего цилиндра третьей зоны, заполненной материалом "отвердевшей" жидкости. При этом естественно, что $F'_2 = 1$. Здесь предполагаем, что третья зона "отвердевшей" жидкости будет двигаться поступательно вместе с внутренним цилиндром подобно единому твердому телу. Такой вариант будем называть третьей схемой течения (рисунок 3). Можно ожидать, что граница раздела между третьей и второй зонами будет представлять собой цилиндрическую поверхность неизвестного заранее радиуса $R'_{\mu 1} = R_{\mu 1} / R_1$.

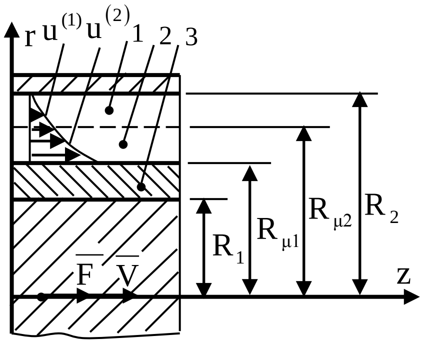

Рисунок 3 - Третья схема течения в зазоре.

Для такой схемы распределение скорости в зазоре определяется из решения системы уравнений (2) - (4) с учетом граничных условий:

$r' = R'_{\mu 1}; \quad \tau'^{(2)}_{rz} = -1$;

$r' = R'_{\mu 2}; \quad u'^{(1)} = u'^{(2)}; \ \dot{\gamma}'^{(1)} = \dot{\gamma}'^{(2)} = -\dot{\gamma}'_1$;

$r' = R'_2; \quad u'^{(1)} = 0$.

В ходе решения было показано, что граница раздела первой и второй зон течения здесь по-прежнему находится из (5), а внешняя граница третьей зоны "отвердевшей" жидкости определяется из выражения:

$$R'_{\mu 1} = F' . \qquad (6)$$

Третья схема течения по мере увеличения F' будет существовать до еще одного порогового значения $F' = F'_3 > F'_2 > F'_1$, при котором в первой зоне течения на границе с внешним цилиндром модуль скорости сдвига не достигнет значения $\left|\dot{\gamma}'^{(1)}(R'_2)\right| = \dot{\gamma}'_1$. Это условие будет означать, что выполняется условие $R'_{\mu 2} = R'_2$ и первая зона течения, фактически, исчезает.

В ходе решения задачи для третьей схемы течения было показано, что $F'_3 = R'_2 \cdot (1 + B)^{-1}$ при условии выполнения неравенства $1 < R'_2 \cdot (1 + B)^{-1}$.

Дальнейшее увеличение прикладываемого усилия ($F' > F'_3$) будет приводить к расширению третьей зоны "отвердевшей" жидкости и, соответственно, сокращению оставшейся теперь единственной второй зоны течения. Такой вариант будем называть пятой схемой течения (рисунок 5).

Произведем постановку задачи для четвертой схемы течения. Возвратимся снова ко второй схеме течения (рисунок 2). При определенных условиях эта, описанная уже выше схема течения, может по мере увеличения прикладываемого усилия F' трансформироваться и в другую, отличную от третьей, схему течения. Действительно, пусть при некотором значении $F' = F_4' > F_1'$ на поверхности внешнего цилиндра окажется выполненным соотношение $\left|\dot{\gamma}'^{(1)}(R_2')\right| = \dot{\gamma}_1'$ при одновременном выполнении на поверхности внутреннего цилиндра условия $\left|\dot{\gamma}'^{(2)}(1)\right| < 1$. Это означает, что оказывается выполненным условие $R_{\mu 2}' = R_2'$ и первая зона течения исчезает. Тогда дальнейшее увеличение прикладываемого усилия ($F' > F_4'$) будет приводить к очередному варианту, который будем называть четвертой схемой течения (рисунок 4).

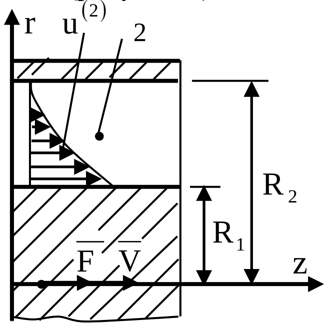

Рисунок 4 - Четвертая схема течения в зазоре.

В этом случае распределение скорости в зазоре должно определяться из решения системы уравнений (2) , (4) с учетом следующих граничных условий:

$r' = 1; \quad \tau_{rz}'^{(2)} = -F_1'$;

$r' = R_2'; \quad u'^{(2)} = 0$.

Эта схема течения будет существовать по мере возрастания усилия до некоторого значения $F' = F_5' > F_4' > F_1'$, при котором на поверхности внутреннего цилиндра окажется выполненным условие $\left|\dot{\gamma}'^{(2)}(1)\right| = 1$.

В ходе решения этой задачи было показано, что $F_4' = R_2' \cdot (1+B)^{-1}$; $F_5' = 1$ при условии выполнения неравенства $R_2' \cdot (1+B)^{-1} < 1$.

Продолжение увеличения усилия ($F' > F_5'$) приведет к формированию в окрестности поверхности внутреннего цилиндра третьей зоны "отвердевшей" жидкости при одновременном существовании второй зоны течения, что, опять же, будет представлять собой пятую схему (рисунок 5), в которую должна трансформироваться и третья схема течения

Далее произведем постановку задачи для пятой схемы течения. Как было показано выше, к пятой схеме (рисунок 5) трансформируются и третья, и четвертая схемы течения.

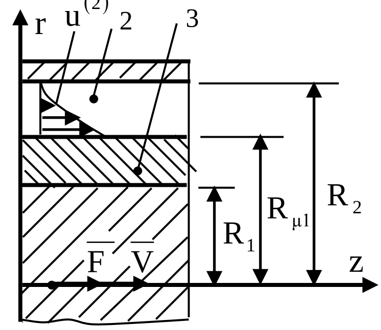

Рисунок 5 - Пятая схема течения в зазоре.

В рамках пятой схемы течения распределение скорости в зазоре должно определяться из решения системы уравнений (2), (4) с учетом следующих граничных условий:

$$r' = R_{\mu 1}'; \quad \tau_{rz}'^{(2)} = -1;$$

$$r' = R_2'; \quad u'^{(2)} = 0.$$

Здесь радиус внешней границы третьей зоны "отвердевшей" жидкости по-прежнему определяется из соотношения (6).

Дальнейшее увеличение прикладываемого усилия применительно к пятой схеме течения будет приводить к расширению третьей зоны "отвердевшей" жидкости и сужению второй зоны течения. По-видимому, такая схема течения будет существовать до тех пор, пока внешнее усилие не достигнет некоторого предельного для рассматриваемой задачи значения:

$$F' = F_6' = R_2', \tag{7}$$

при котором вторая зона течения полностью "исчезнет" ($\dot{\gamma}'^{(2)}(R_2') = -1$ и $R_{\mu 1}' = R_2'$), а следовательно, весь зазор между цилиндрами окажется заполненным "отвердевшей" жидкостью.

В качестве примера приведем результаты определения поля скоростей для второй схемы, соответственно, для первой и второй зон течения:

$$u'^{(1)}(r') = \frac{n_1 \cdot \dot{\gamma}_1'}{(1-n_1)} \cdot \left(R_{\mu 2}'\right)^{\frac{1}{n_1}} \cdot \left(\left(r'\right)^{\frac{n_1-1}{n_1}} - \left(R_2'\right)^{\frac{n_1-1}{n_1}}\right);$$

$$u'^{(2)}(r') = (R_{\mu 2}' - r') -$$

$$-(1-\dot{\gamma}_1') \cdot \int_{r'}^{R_{\mu 2}'} \left\{1 - \frac{1}{B} \cdot \left(\frac{R_{\mu 2}'}{r'} - 1\right)\right\}^{\frac{1}{n_2}} \cdot dr' +$$

$$+\frac{n_1 \cdot \dot{\gamma}_1'}{(1-n_1)} \cdot \left(R_{\mu 2}'\right)^{\frac{1}{n_1}} \cdot \left(\left(R_{\mu 2}'\right)^{\frac{n_1-1}{n_1}} - \left(R_2'\right)^{\frac{n_1-1}{n_1}}\right);$$

При этом скорость установившегося движения внутреннего цилиндра находится из соотношения $V' = \dfrac{V}{u_S} = u'^{(2)}(1)$.

Результаты решения по определению распределения скорости в зазоре для других схем течения здесь не приводятся в силу громоздкости формы их записи. Вместе с тем они могут быть без больших затруднений получены двукратным интегрированием в ходе решения системы уравнений (2)-(3) с учетом соответствующих (приведенных выше для каждой схемы течения в отдельности) граничных условий.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект № 12-08-00629.

Полученные результаты могут быть использованы при моделировании течения рабочих сред, демонстрирующих проявление эффекта “отвердевания”, в проточных элементах технологического оборудования.

ЛИТЕРАТУРА

1 Jae-Hyun So Microstructure evolution and rheological responses of hard suspensions [Text] / Jae-Hyun So, Seung-Man Yong, Jae Chun Hyun // Chemical Engineering Science. - 2001. - V. 56. - P. 2967 – 2977.

2 Lee, Y. S. Dynamic properties of shear thickening colloidal suspensions [Text] // Y.S. Lee, N.J. Wagner // Rheological Acta. – 2003. - № 42(3). – P. 199-208.

3 Wetzel, E.D. The Effect of Rheological Parameters on the Ballistic Properties of Shear Thickening Fluid (STF)-Kevlar Composites [Text] / E.D. Wetzel, Y.S. Lee, R.G. Egres Jr., K.M. Kirkwood et al // Proceedings of the 8th International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, Columbus, OH, June 13-17, 2004.

4 Lee, Y.S. Rheological Properties and Small – Angle Neutron Scattering of Shear Thickening, Nanoparticle Dispersion at High Shear Rates [Text] / Y.S. Lee, N.J. Wagner // Ind. Eng. Chem. Res. – 2006. - V. 45. - № 21. - P. 7015 – 7024.

5 Колодежнов, В. Н. Математическое моделирование реологического поведения нелинейно-вязких жидкостей, которые демонстрируют проявление эффекта “отвердевания” [Текст] / В.Н.Колодежнов // Вестник ВГУИТ. - 2012. - № 4. - С. 35-38.

6 Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа [Текст] / Л.Г. Лойцянский. –М.: Наука, 1973. - 848 с.

REFERENCES

1 Jae-Hyun So Microstructure evolution and rheological responses of hard suspensions [Text] / Jae-Hyun So, Seung-Man Yong, Jae Chun Hyun // Chemical Engineering Science. - 2001. - V. 56. - P. 2967 – 2977.

2 Lee, Y.S. Dynamic properties of shear thickening colloidal suspensions [Text] // Y.S. Lee, N.J. Wagner // Rheological Acta. – 2003. - № 42(3). – P. 199-208.

3 Wetzel, E.D. The Effect of Rheological Parameters on the Ballistic Properties of Shear Thickening Fluid (STF)-Kevlar Composites [Text] / E.D. Wetzel, Y.S. Lee, R.G. Egres Jr., K.M. Kirkwood et al // Proceedings of the 8th International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes, Columbus, OH, June 13-17, 2004.

4 Lee, Y.S. Rheological Properties and Small – Angle Neutron Scattering of Shear Thickening, Nanoparticle Dispersion at High Shear Rates [Text] / Y.S.Lee, N.J. Wagner // Ind. Eng. Chem. Res. – 2006. - V. 45. - № 21. - P. 7015 – 7024.

5 Kolodezhnov, V.N. Mathematical modeling of the rheological behavior of nonlinear-viscous liquids, which show a manifestation of the "hardening" [Text] / V.N. Kolodezhnov // Bulletin of VSUET. - 2012. - № 4. - P. 35-38.

6 Loitsyansky, L.G. Fluid and gas mechanics [Text] / L.G. Loitsyansky. -M. Nauka, 1973. - 848 p.