

Профессор А.В. Жучков

(Воронеж. гос. ун-т инж. технол.) кафедра машин и аппаратов химических производств, тел. (473) 249-91-13

доцент А.Н. Рязанов, аспирант Д.Ю. Уразов

(Воронеж. гос. ун-т инж. технол.) кафедра машин и аппаратов пищевых производств, тел. (473) 255-38-96

профессор В.В. Шитов

(Воронеж. гос. ун-т инж. технол.) кафедра промышленно энергетики, тел. (473) 255-44-66

Математическое моделирование процессов нагрева и охлаждения колбасных изделий

В статье проведено математическое моделирование процессов нагрева и охлаждения колбасных изделий с целью определения эталонных характеристик протекания процессов. В графическом виде представлены основные зависимости процессов.

In the article the mathematical modeling of the processes of heating and cooling of sausage products in order to define reference characteristics of the processes was carried out. Basic regularities of the processes are graphically shown.

Ключевые слова: колбасные изделия, процесс нагрева, процесс охлаждения, математическое моделирование

Технология термообработки претерпевает значительные изменения в связи с появлением новых видов оболочек, копильных препаратов, технических инноваций и других факторов. Тем не менее, подбирая режимы термообработки, необходимо руководствоваться не только рекомендациями изготовителей оборудования или упаковочных материалов, но и теоретическими знаниями о сущности и значении каждого этапа этого процесса.

От соблюдения специфического для каждого продукта температурного режима в процессе изготовления напрямую зависят его потребительские свойства, в том числе и вкусовые. Например, при варке и копчении колбас особенно важен контроль температуры как в копильной камере, так и непосредственно внутри продукта, который является гарантией отсутствия в готовой продукции болезнетворных бактерий, а следовательно, доброкачественности и стойкости мясных продуктов при их долговременном хранении. Для определения эталонных характеристик процессов нагрева и охлаждения колбасных изделий формализуем указанные процессы. Рассматривается батон колбасного изделия наружного радиуса R_n , длина которого много больше радиуса (рисунок 1).

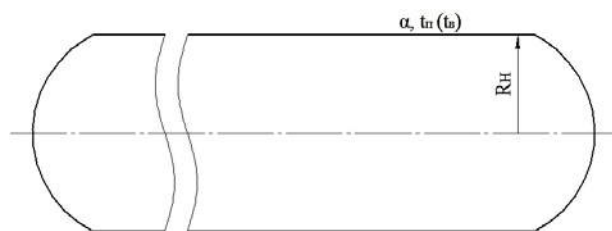


Рисунок 1 - Схематичное изображение колбасного изделия

Изделие помещается в варочную камеру, в которой обрабатывается паровоздушной смесью с температурой $t_n = 80^\circ\text{C}$. Процесс варки колбасы считается завершенным, если температура на оси батона в конце варки достигает 72°C .

После завершения процесса нагревания колбасное изделие перемещается в камеру охлаждения, где охлаждается воздухом с температурой $t_b = 8^\circ\text{C}$ в режиме свободной конвекции.

Цель работы состоит в оценке качества протекания процесса нагрева и охлаждения колбасного изделия по изменению температуры его поверхности в рамках технологического процесса.

Распределение температуры в колбасном изделии определяется уравнением теплопроводности Фурье [1]:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \alpha \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

где $\alpha = \lambda / C\rho$ - коэффициент температуропроводности колбасного изделия; λ - коэффициент теплопроводности; C - теплоёмкость колбасы; ρ - плотность колбасы; r, φ, z - цилиндрические координаты (текущие радиус, угол, высота).

Полагая процесс термообработки осесимметричным $\left(\frac{\partial t}{\partial \varphi} = 0 \right)$, а также пренебрегая краевыми эффектами $\left(\frac{\partial t}{\partial z} = 0 \right)$, из (1) получим:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \alpha \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial t}{\partial r} \right) \quad (2)$$

или после преобразования:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) \quad (3)$$

где J_0 - функция Бесселя первого рода нулевого порядка; J_1 - функция Бесселя первого рода первого порядка; M_n - корни характеристического уравнения.

$$\frac{J_0(M)}{J_1(M)} = \frac{M}{B_i}, \quad (8)$$

где $B_i = \frac{\alpha R_n}{\lambda}$ - число Био; $R = \frac{r}{R_n}$ - безразмер-

ный радиус; $F_0 = \frac{\alpha \tau}{R_n^2}$ - число Фурье.

Распределение температуры по радиусу колбасного изделия существенно влияет на процесс её последующего охлаждения.

Отметим, что начальные и граничные условия формируются по-разному для периодов нагрева и охлаждения колбасных изделий.

Начальное и граничное условия для уравнения Фурье (3) при нагревании колбасных изделий в процессе варки имеют вид:

$$t(0, r) = t_0, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (5)$$

$$\alpha(t - t_n) = -\lambda \left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{r=R_H}, \quad (6)$$

где α - коэффициент теплоотдачи от паровоздушной смеси к поверхности колбасного изделия; λ - теплопроводность колбасного изделия.

Граничное условие (5), записанное из условия симметрии температурного поля на оси (6), является граничным условием третьего рода для поверхности колбасного изделия.

Решение для нагревания колбасного изделия в процессе варки имеет вид [1]:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(M_n)}{M_n [J_0^2(M_n) + J_1^2(M_n)]} \cdot J_0(M_n R) \cdot \exp(-M_n^2 F_0), \quad (7)$$

$$\theta = \frac{t - t_n}{t_0 - t_n} - \text{безразмерная температура,}$$

Как следует из характеристического уравнения (8), значения M_n зависят от числа Био. Таблица для первых шести корней M_n в зависимости от B_i приведена в [1].

В конце процесса нагревания (обычно при $F_0 > 0,3$) реализуется так называемый регулярный режим теплообмена [2], при котором в решении (7) можно пренебречь всеми слагаемыми ряда, кроме первого:

$$\theta \approx \frac{2J_1(M_1)}{M_1 [J_0^2(M_1) + J_1^2(M_1)]} \cdot J_0(M_1 R) \cdot \exp(-M_1^2 F_0) \quad (9)$$

Рассмотрим предельные распределения температуры по радиусу колбасного изделия в конце процесса нагрева.

При достаточно высоком коэффициенте теплоотдачи α и малом наружном радиусе изделия R_n значение числа $Bi > 50,0$. В этом случае перепад температуры на границе пренебрежимо мал по сравнению с перепадом температуры в колбасном изделии (рисунок 2а). Температура поверхности $t_c \approx t_n$, и граничные условия III рода вырождаются в граничные условия I рода.

В этом случае из (8) следует:

$$J_0(M_1) \approx 0, \quad (10)$$

$$M_1 \approx 2.40 \quad (11)$$

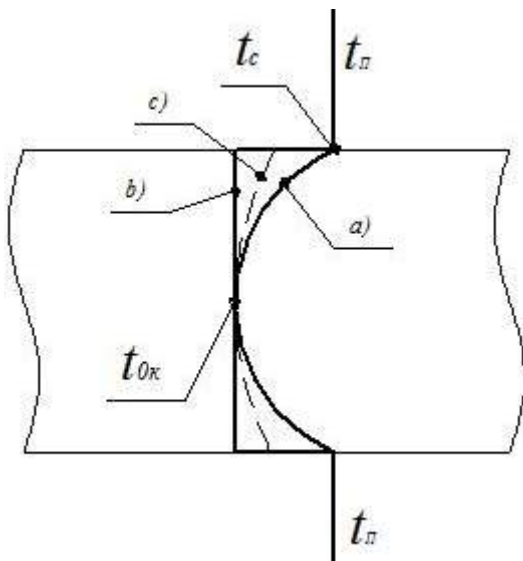


Рисунок 2 - Распределение температуры по радиусу колбасного изделия в конце процесса нагрева (a - для $Bi \geq 50,0$; b - для $Bi \leq 0,1$; c - для $0,2 < Bi < 50,0$)

Решение (7) преобразуется к виду:

$$\theta \approx \frac{2}{M_1 J_1(M_1)} \cdot J_0(M_1 R) \cdot \exp(-M_1^2 F_0) \quad (12)$$

В случае малого значения коэффициента теплоотдачи, когда $Bi < 0,2$, температурное поле в колбасном изделии однородно (рисунок 2b). При всех остальных значениях $0,2 < Bi < 50,0$ кривая c распределения температуры по радиусу в конце процесса варки лежит между кривыми a и b (рисунок 2).

Очевидно, что при последующем охлаждении колбасных изделий температура её поверхности в случае a будет несколько выше, чем в случае b.

После завершения процесса варки колбасное изделие помещается в помещение с температурой воздуха t_b , где охлаждается в режиме свободной конвекции. Коэффициент теплоот-

дачи определяется из критериального соотношения [2]:

$$Nu = 0,5 \cdot (Gr \cdot Pr)^{0,25}, \quad (13)$$

где $Gr = \frac{gd^3}{\nu^2} \cdot \frac{t_c - t_b}{t_c + 273}$ - число Грасгофа;

$g = 9,81 \text{ м/с}^2$ - ускорение свободного падения; $d = 2R_n$ - диаметр колбасного изделия; ν - кинематическая вязкость воздуха; t_c - температура поверхности колбасного изделия; Pr - число

Прандтля для воздуха; $Nu = \frac{\alpha \cdot d}{\lambda_a}$ - число

Нуссельта; α - коэффициент теплоотдачи; λ_a - теплопроводность воздуха.

Коэффициент теплоотдачи:

$$\alpha = 0,5 \frac{\lambda_a}{d} (Gr \cdot Pr)^{0,25} \quad (14)$$

Поскольку температура t_c существенно изменяется в процессе охлаждения, коэффициент теплоотдачи также сильно изменяется - в два и более раз (рисунок 3). Граничное условие (6) становится нелинейным, что не позволяет воспользоваться известными решениями теплообмена для цилиндра, полученными для постоянного коэффициента теплоотдачи α .

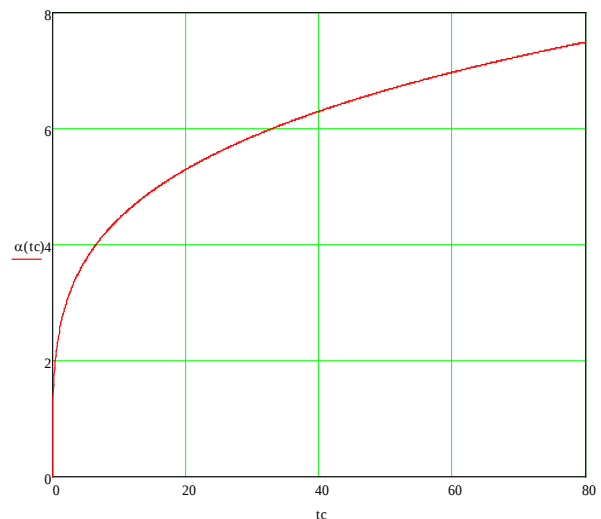


Рисунок 3 - Зависимость коэффициента теплоотдачи колбасы от температуры поверхности, $R_n = 0.04 \text{ м}$, $t_b = 0^\circ \text{C}$

Для решения задачи об охлаждении колбасного изделия воспользуемся численным методом [3].

Перейдём от дифференциального уравнения (3) к его дискретному аналогу на сетке с

постоянным шагом (рисунок 4) с использованием явной схемы.

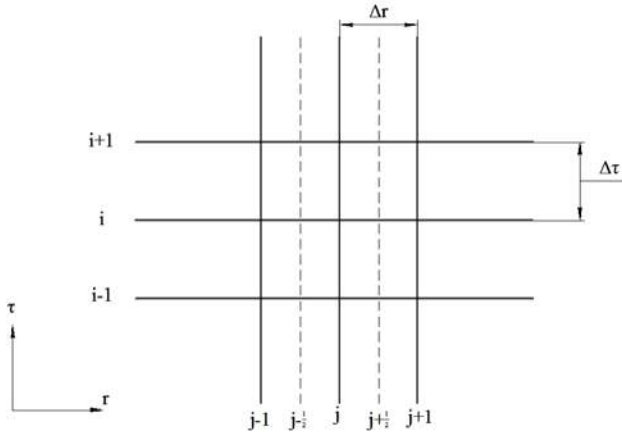


Рисунок 4 - Фрагмент дискретной сетки.

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} \approx \frac{t_{i+1,j} - t_{i,j}}{\Delta \tau}, \quad (15)$$

$$\frac{t_{i+1,j} - t_{i,j}}{\Delta \tau} = \frac{\alpha}{(\Delta r)^2} \left[\left(r_j + \frac{1}{2} \Delta r \right) (t_{i,j+1} - t_{i,j}) - \left(r_j - \frac{1}{2} \Delta r \right) (t_{i,j} - t_{i,j-1}) \right], \quad (19)$$

или

$$t_{i+1,j} = t_{i,j} + F_{0c} \left[\left(r_j + \frac{1}{2} \Delta r \right) (t_{i,j+1} - t_{i,j}) - \left(r_j - \frac{1}{2} \Delta r \right) (t_{i,j} - t_{i,j-1}) \right], \quad (20)$$

где $F_{0c} = \frac{\alpha \Delta \tau}{(\Delta r)^2}$ - сеточное число Фурье.

Выражение (20) позволяет вычислить значение температуры в узле j на последующем шаге по времени i+1, если известны значения температуры в трех узлах по радиусу на предшествующем шаге по времени i, т.е. $t_{i,j-1}$, $t_{i,j}$, $t_{i,j+1}$.

Для обеспечения устойчивости вычислительного процесса необходимо шаг по времени $\Delta \tau$ выбирать достаточно малым, так, чтобы выполнялось условие:

$$F_{0c} \leq \frac{1}{2} \quad (21)$$

Температура в узле j₁ (на наружной поверхности) определяется из (6) с учетом (14):

$$\frac{\vartheta_{i,j1} - \vartheta_{i,j1-1}}{\Delta r} = -0.5 \cdot \frac{\lambda_g}{\lambda d} \left[\frac{g d^3}{\nu^2} \cdot \frac{\text{Pr}}{(t_g + 273)} \right]^{0.25} \cdot \vartheta_{j1}^{1.25}, \quad (22)$$

где $\vartheta = t - t_g$ - избыточная температура.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(r \cdot \frac{\partial t}{\partial r} \right) &\approx \frac{1}{\Delta r} \left[r_{j+\frac{1}{2}} \cdot \frac{t_{i,j+1} - t_{i,j}}{\Delta r} - r_{j-\frac{1}{2}} \cdot \frac{t_{i,j} - t_{i,j-1}}{\Delta r} \right] = \\ &= \frac{1}{(\Delta r)^2} \cdot \left[r_{j+\frac{1}{2}} (t_{i,j+1} - t_{i,j}) - r_{j-\frac{1}{2}} (t_{i,j} - t_{i,j-1}) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где i - номер шага по времени τ; j - номер шага по радиусу r; Δτ - шаг по времени; Δr - шаг по радиусу.

$$r_{j+\frac{1}{2}} = r_j + \frac{1}{2} \Delta r, \quad (17)$$

$$r_{j-\frac{1}{2}} = r_j - \frac{1}{2} \Delta r, \quad (18)$$

После подстановки (12), (13) с учетом (17), (18) в уравнение (3) получим:

Из (22) можно получить рекуррентную формулу для вычисления температуры на границе $\vartheta_{i,j1}$:

$$\vartheta_{i,j1} = \frac{\vartheta_{i,j1-1}}{1 + A \cdot \vartheta_{i,j1}^{0.25}}, \quad (23)$$

где

$$A = 0.5 \cdot \Delta r \cdot \frac{\lambda_g}{\lambda} \left[\frac{g \cdot \text{Pr}}{\nu^2 d (t_g + 273)} \right]^{0.25} \quad (24)$$

Дискретный аналог граничного условия (5) для оси:

$$t_{i,0} = t_{i,1} \quad (25)$$

Начальное распределение температуры для процесса охлаждения колбасных изделий принимается по конечному распределению периода нагрева.

В ходе вычислений определяются температуры на оси и поверхности колбасного изделия во всех узлах по времени i. Наибольший интерес представляет температура поверхности колбасного изделия, поскольку по ее изменению оценивается процесс нагревания и охлаждения.

Ниже приводится пример расчета процесса термообработки колбасных изделий для следующих исходных параметров: $R_n=0,04$ м; $t_0=20^\circ\text{C}$; $t_{\kappa 0}=72^\circ\text{C}$; $\rho=994$ кг/м³; $c=3600$ Дж/(кг·К); $\lambda=0,4$ Вт/(м·К); $t_n=80^\circ\text{C}$; $t_\delta=0^\circ\text{C}$; $\rho_\delta=1,13$ кг/м³; $v_\delta=1,70\cdot 10^5$ м²/с; $\lambda_\delta=0,0276$ Вт/(м·К); $Pr=0,699$; $j_1=20$; $\Delta\tau=10$ с; $i_1=360$.

В результате расчетов определено время варки колбасного изделия, при котором достигается температура на оси $t_{\kappa 0}=72^\circ\text{C}$: $\tau_1=6178$ с (≈ 1 ч 43 мин), распределение безразмерной и размерной температуры в конце процесса варки (рисунок 5).

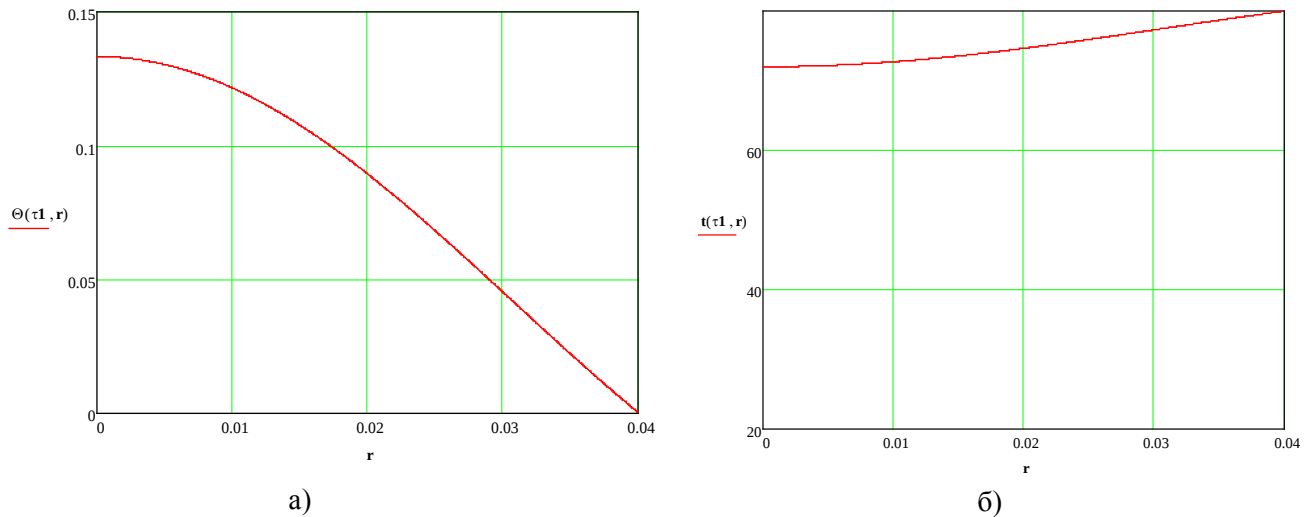


Рисунок 5 - Распределение температуры по радиусу в конце процесса нагрева.
а) - в безразмерном виде, б) - в размерном виде

На рисунке 6 показано распределение температуры по радиусу в конце процесса охлаждения колбасного изделия воздухом (при

$\tau_\kappa=3600$ с). Зависимость температуры центра и поверхности колбасного изделия от времени в процессе охлаждения представлены на рисунке 7

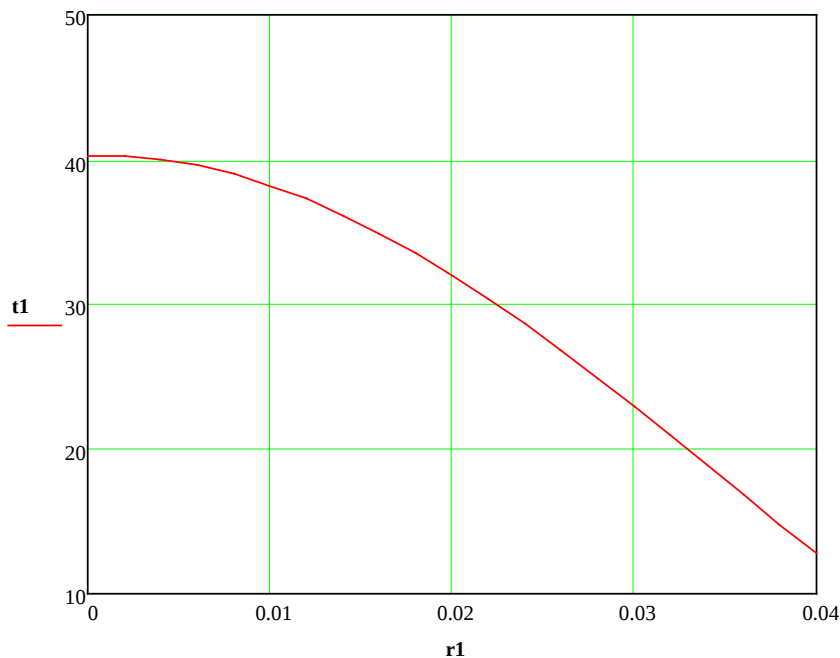


Рисунок 6 - Распределение температуры по радиусу в конце процесса охлаждения.

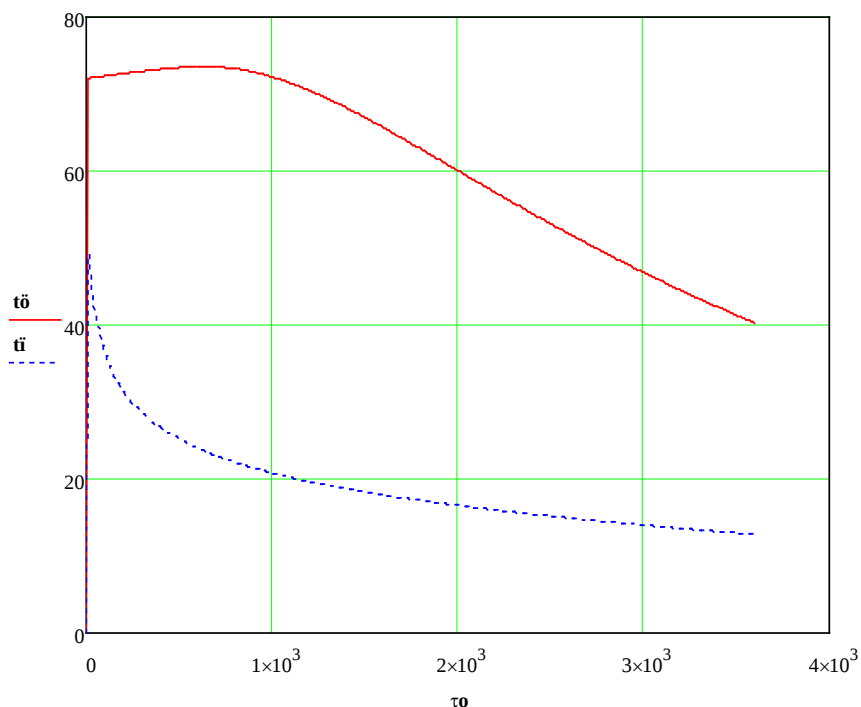


Рисунок 7 - Зависимости температур центра и поверхности колбасного изделия от времени в процессе охлаждения.

Полученные зависимости позволяют с высокой долей точности судить о распределении температуры по радиусу колбасного изделия, основываясь только на температуре его поверхности, что открывает возможность применения новых методов контроля и диагностики технологических процессов.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Лыков, А.В. Теория теплопроводности [Текст] / А.В. Лыков. - М.: Высшая школа, 1967. - 599 с.
- 2 Исаченко, В.П. Теплопередача [Текст] / В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел. - М.: Энергоиздат, 1981. - 416 с.
- 3 Бахвалов, Н.С. Численные методы [Текст] / Н.С. Бахвалов. - М.: Бином, 2010. - 636 с.

4 Гинсбург, А.С. Теплофизические характеристики пищевых продуктов [Текст] / А.С. Гинсбург, М.А. Громов, Г.И. Красовская. - М.: Пищевая промышленность, 1980. - 288 с.

REFERENCES

- 1 Lykov, A.V. Theory of heat conduction [Text] / A.V. Lykov. - M.: Vysshaya shkola, 1967. - 599 p.
- 2 Isachenko, V.P. Heat transfer [Text] / V.P. Isachenko, V.A. Osipova, A.S. Sukomel. - Energoizdat, 1981. - 416 p.
- 3 Bahvalov, N.S. Numerical methods [Text] / N.S. Bahvalov. - M.: Binom, 2010. - 636 p.
- 4 Ginsburg, A.S. Thermal characteristics of foodstuffs [Text] / A.S. Ginsburg, M.A. Gromov, G.I. Krasovskaya. - M.: Pishhevaya promyshlennost, 1980. - 288 p.