УДК 517.927

Доцент Е.В. Дикарева,
(Воронежский институт МВД России) кафедра высшей математики.
тел. (473) 200-50-50
E-mail: heiligenkreuz@gmail.com

Associate professor E.V. Dikareva,
(Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs of theRussian Federation)
Department of higher mathematics.
phone (473) 200-50-50
E-mail: heiligenkreuz@gmail.com

Метод функций Грина в математических моделях для двухточечных краевых задач

Method of Green Functions in Mathematical Modelling For Two-Point Boundary-Value Problems

Реферат. В различных прикладных задачах, в которых рассматриваются вопросы управления и оптимизации, теории систем, теоретической и строительной механике при изучении структур из струн и стержней, теории колебаний, теории упругости и пластичности, в задачах механике, связанных с разрушениями и моделированием ударных волн, используются математические модели, основанные на применении обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка. Подобная методология также применяется при исследовании математических моделей методами дифференциальных уравнений на графах, описывающих различные связанные системы с возможным упорядочиванием. Такие уравнения используются как в теоретическом обосновании математических моделей, так и служат основой для конструирования численных методов решения и компьютерных алгоритмов. В работе исследование таких моделей проводится методом функций Грина. В первой части работы приводятся общие сведения о методе функций Грина для многоточечных краевых задач. Описывается основное уравнение, вводятся понятия многоточечных краевых условий, граничных функционалов, вырожденных и невырожденных задач, фундаментальной матрицы решений. В основной части работы вначале даётся постановка задачи, включающая условия разрывов и деформаций. Далее приводятся основные результаты работы. В теореме 1 приведены условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи. В теореме 2 установлены условия строгой положительности решения и соизмеримости для пары решений. В теореме 3 установлено существования и оценки для минимального собственного значения, свойства точек спектра, положительность собственных функций. В теореме 4 доказана весовая монотонность функции Грина. В конце работы приводятся возможные приложения к теории сигналов и теории операторов преобразования.

Summary. In many applied problems of control, optimization, system theory, theoretical and construction mechanics, for problems with strings and nods structures, oscillation theory, theory of elasticity and plasticity, mechanical problems connected with fracture dynamics and shock waves, the main instrument for study these problems is a theory of high order ordinary differential equations. This methodology is also applied for studying mathematical models in graph theory with different partitioning based on differential equations. Such equations are used for theoretical foundation of mathematical models but also for constructing numerical methods and computer algorithms. These models are studied with use of Green function method. In the paper first necessary theoretical information is included on Green function method for multi point boundary-value problems. The main equation is discussed, notions of multi-point boundary conditions, boundary functionals, degenerate and non-degenerate problems, fundamental matrix of solutions are introduced. In the main part the problem to study is formulated in terms of shocks and deformations in boundary conditions. After that the main results are formulated. In theorem 1 conditions for existence and uniqueness of solutions are proved. In theorem 2 conditions are proved for strict positivity and equal measureness for a pair of solutions. In theorem 3 existence and estimates are proved for the least eigenvalue, spectral properties and positivity of eigenfunctions. In theorem 4 the weighted positivity is proved for the Green function. Some possible applications are considered for a signal theory and transmutation operators.

Ключевые слова: двухточечные краевые задачи, функции Грина, теория графов.

Keywords: two-point boundary-value problems, Green function, graph theory.

1. Общая методология использования функций Грина для многоточечных задач.

В работе сначала излагаются общие результаты о существовании и построении функции Грина в неклассической ситуации для многоточечных краевых задач. Затем рассматривается краевая двухточечная задача для системы дифференциальных уравнений четвёртого порядка, имеющая прикладное значение. Для этой задачи устанавливается существование функции Грина, и выводятся её основные свойства.

Сначала рассмотрим классический случай двухточечной задачи, изложив схему построения и анализа функции Грина, см. [1]. Пусть на $[a; b] \subset \mathbb{R}^1$ задана двухточечная краевая задача, определяемая линейным дифференциальным уравнением:

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = f(x) \qquad (1.1)$$

с непрерывными коэффициентами и n краевыми условиями:

$$l_j(y) = R_j \qquad (1.2)$$

с функционалами $l_j(y)$ вида:

$$l(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, y^{(i-1)}(a) + + \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, y^{(i-1)}(b). \qquad (1.3)$$

Теорема 1. Для того чтобы краевая задача (1.1)-(1.2) была однозначно разрешимой для любой правой части $f(x)$ и любого набора значений R_j необходимо и достаточно, чтобы однородная задача $f(x) \equiv 0, R_j \equiv 0$ имела только тривиальное решение.

Приведённая теорема делает полезным следующее определение.

Определение 1. Задачу (1.1)-(1.2) назовем невырожденной, если соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение.

Для простоты фундаментальную систему решений мы будем выбирать так, чтобы она оказалась биортогональной набору функционалов $l_j(.)$ (это по существу просто смена базиса в конечномерном пространстве). Эта система будет ниже обозначаться через $\{z_i(x)\}$, так что $l_j(z_i) = \delta_{ij}$ (δ_{ij}- символ Кронекера). Тогда решение краевой задачи выписывается явно:

$$y(x) = \left[y_0(x) - \sum_{j=1}^{n} z_j\,(x) l_j(y_0)\right] + + \sum_{j=1}^{n} R_j\, z_j(x). \qquad (1.5)$$

Далее мы будем рассматривать только однородные условия:

$$l_j(y) = 0. \qquad (1.6)$$

Определение 2. Функцией Грина задачи (1.1)-(1.2) будем называть любую функцию $G(x, s)$, позволяющую получить решение задачи (1.1)-(1.6) в виде интеграла:

$$\mathrm{y(x)} = \int_a^b G\,(x, s) f(s) ds. \qquad (1.7)$$

Теорема 2. Для любой невырожденной задачи (1.1)-(1.6) функция Грина существует.

Доказательство состоит попросту в выражении y_0 в формуле (1.5) через $f(x)$. Это можно сделать, например, с помощью функции Коши:

$$K(x, s) = \frac{1}{W(s)p_0(s)} \begin{vmatrix} z_1(s) \ldots z_n(s) \\ z_1{}'(s) \ldots z_n{}'(s) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1^{(n-2)}(s) \ldots z_n^{(n-2)}(s) \\ z_1(x) \ldots z_n(x) \end{vmatrix} \qquad (1.8)$$

($W(x)$ — определитель Вронского функций $z_1(x), \ldots, z_n(x)$) в виде:

$$y_0(x) = \int_a^x K\,(x, s) f(s) ds. \qquad (1.9)$$

Приведём фигурирующий здесь интеграл с переменным верхним пределом к интегралу с постоянными пределами вида (1.7), для этого представим (1.9) в виде:

$$y_0(x) = \int G_0\,(x, s) f(s) ds, \qquad (1.10)$$

где обозначено:

$$G_0(x, s) = K(x, s), a \leqslant s \leqslant x \leqslant b, 0, a \leqslant x \leqslant s \leqslant b. \qquad (1.11)$$

На диагонали $x = s$, очевидно, $K(s, s) \equiv 0$, поэтому включение значения $\mathrm{x} = s$ и в ту, и в другую строку не приводит к противоречиям. Подставляя (1.10) в (1.6), получаем:

$$\mathrm{y(x)} = \int G_0\,(x, s) f(s) ds - - \sum_{j=1}^{n} z_j\,(x) l_j\left(\int G_0\,(x, s) f(s) ds\right), \qquad (1.12)$$

так что вопрос о представимости y(x) в форме (1.7) упирается только в возможность перестановки функционалов l_j под знаком интеграла. Вообще говоря, такая перестановочность имеет место в силу известных свойств функции Коши: так как $K^{(i)}(s, s) = 0$ при $i = 0, \ldots, n - 2$, то из (1.9) следует:

$$y_0^{(i)}(x) = \int K^{(i)}\,(x, s) f(s) ds \; (i = 0, \ldots, n - 2),$$

и потому для функционала $l(\mathrm{y})$ вида (1.3):

$$l(y) = \int \left[\sum_{i=1}^{n} \beta_i\, K^{(i-1)}(b, s)\right] f(s) ds.$$

Обозначая здесь сумму в квадратных скобках через $\psi(s)$ (для $l_j(y)$ соответственно через $\psi_j(s)$), получаем из (1.12):

$$y(x) = \int \left[G_0(x,s) - \sum_{j=1}^{n} z_j\,(x)\psi_j(s) \right] f(s)ds,$$

что не только доказывает теорему, но и предъявляет $G(x,s)$ явно:

$$G(x,s) = G_0(x,s) - \sum_{i=1}^{n} z_i\,(x)\psi_i(s), \quad (1.13)$$

или в более «классической» форме:

$$G(x,s) = \begin{cases} K(x,s) - \sum_{i=1}^{n} z_i\,(x)\psi_i(s), a \leqslant s \leqslant x \leqslant b, \\ \quad - \sum_{i=1}^{n} z_i\,(x)\psi_i(s), a \leqslant x \leqslant s \leqslant b. \end{cases} \quad (1.14)$$

Следствие 1. $\psi_i(s)$ непрерывны на $[\mathrm{a}, b]$.

Действительно, если обозначить через:

$$l^b(y) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, y^{(i-1)}(b)$$

составляющую функционала (1.3), сосредоточенную в точке b, то получим:

$$K(x,s) = = \frac{1}{p_0(s)W(s)} \begin{vmatrix} z_1(s) \ldots z_n(s) \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ z_1^{(m-2)}(s) \ldots z_n^{(n-2)}(s) \\ l_j^b(z_1) \ldots l_j^b(z_n) \end{vmatrix} \quad (1.15)$$

Следствие 2. $G(x,s)$ непрерывна вместе со своими производными по x до порядка n в каждом треугольнике $a \leqslant x \leqslant s \leqslant b$ и $a \leqslant s \leqslant x \leqslant b$ вплоть до границы. Действительно, этим свойством обладает как сумма $\sum_{i=1}^{n} z_i\,(x)\psi_i(s)$, так и (см. (1.8)) функция K(x, s).

Следствие 3. Непрерывная функция $G(\mathrm{x}, s)$, дающая представление решения в виде (1.7), единственна.

Следствие 4. Для любого фиксированного $s \in (a,b)$:

$$G^{(i)}(s+0,s) - G^{(i)}(s-0,s) = = \begin{cases} 0, i \leqslant n-2, \\ \frac{1}{p_0(s)}, i = n-2. \end{cases} \quad (1.16)$$

В самом деле, из (1.15) следует, что разность (1.16) совпадает с $K^{(i)}(s,s)$, которая как раз равна правой части (1.7).

Следствие 5. Для любого фиксированного $s \in (a,b)$ и любого $l_j(y)$ из условий (1.3), $l_j\big(G(x,s)\big) = 0$.

Действительно,
$l_j\big(G(x,s)\big) = l_j\big(G_0(x,s)\big) - \psi_j(s)$, а

$$l_j\big(G_0(x,s)\big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^j\, G_0^{(i-1)}(a,s) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i^j\, G_0^{(i-1)}(b,s) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^j\, K^{(i-1)}(b,s) = \psi_j(s).$$

Следствие 6. Для любого фиксированного $s \in (\mathrm{a}, b)$ функция $G(x,s)$ является решением однородного уравнения (1.1) на $[\mathrm{a}, s]$ и на $[s, b]$.

Теорема 3. Если двухточечная задача (1.1)-(1.2) невырождена, то функция $G(x,s)$, определяемая для каждого фиксированного $s \in (\mathrm{a}, b)$ условиями:

(а) она является решением однородного уравнения на $[\mathrm{a}, s]$ и на $[s, b]$;

(б) при $\mathrm{x} = s$ она удовлетворяет условиям:

$$G^{(i)}(s+0,s) - G^{(i)}(s-0,s) = = \begin{cases} 0, i \leqslant n-2, \\ \dfrac{1}{p_0(s)}, i = n-2. \end{cases}$$

(в) она удовлетворяет краевым условиям $l_j G(.,s) = 0$; существует и единственна.

Доказательство по существу алгебраическое: из условия (а) следует:

$$G(x,s) = = \begin{cases} z_1(x)\chi_1(s) + \cdots + z_n(x)\chi_n(s), a \leqslant s \leqslant x \leqslant b, \\ -\big(z_1(x)\psi_1(s) + \cdots + z_n(x)\psi_n(s)\big), a \leqslant x \leqslant s \leqslant b. \end{cases}$$

Из условия (б) следует, что $\chi_i(s) + \psi_i(s)$ удовлетворяют системе:

$$z_1^{(j)}(s)[\chi_1(s) + \psi_1(s)] + \cdots z_n^{(j)}(s)[\chi_n(s) + \psi_n(s)] = = \begin{cases} 0, 0 \leqslant j \leqslant n-2, \\ \frac{1}{p_0(s)}, j = n-2, \end{cases} \quad (1.17)$$

откуда немедленно следует, что:

$$z_1^{(j)}(s)[\chi_1(s) + \psi_1(s)] + + \cdots z_n^{(j)}(s)[\chi_n(s) + \psi_n(s)] \equiv K(x,s),$$

и поэтому:

$$G(x,s) = G_0(x,s) - \sum_{i=1}^{n} z_i\,(x)\psi_i(s),$$

И, наконец, условие (в) (в предположении, что изначально была выбрана такая фундаментальная система решений, что $l_j(z_i) = \delta_{ij}$) немедленно дает:

$$\psi_i(s) = l_j\big(G_0(.,s)\big).$$

2. Постановка двухточечной краевой задачи.

Теперь рассмотрим конкретную прикладную задачу, возникающую при исследовании механических деформаций стержней или струн, аналогичные задачи возникают для дифференциальных уравнений на графах [1].

На промежутке $[0,l]$ рассматриваются дифференциальные уравнения:

$$(p1u1'')' = f1(x), \quad x \neq \xi \tag{2.1}$$
$$-(p2u2')'' = f2(x), \quad x \neq \xi \tag{2.2}$$

Первое из них возникает при описании поперечных деформаций классического стержня, а второе — обычной струны (или продольных деформаций стержня). В точке ξ (где, естественно, $0<\xi< l$) оба уравнения выключаются, так что фактически (2.1)-(2.2)— это система четырёх уравнений. Однако нас интересуют лишь решения, непрерывно склеенные в точке $x = \xi$, что значит $u_1(\xi-0) = u_1(\xi+0), u_2(\xi-0) = u_2(\xi+0)$. Более того, в этой точке непрерывно склеены и решения разностных уравнений, т. е.:

$$u_1(\xi \pm 0) = u_2(\xi \pm 0). \tag{2.3}$$

В этой же точке мы предполагаем выполненным условие взаимодействия (трансмиссии):

$$\delta(p_1u_1'')'(\xi) + \delta(p_2u_2')'(\xi) = 0, \tag{2.4}$$

где через $\delta\varphi(\xi)$ обозначается скачок φ в точке ξ, т. е. $\delta\varphi(\xi) = \varphi(\xi+0) - \varphi(\xi-0)$.

Допуская у $u_1(x)$ потерю гладкости в точке ξ, мы предполагаем при этом:

$$(p1u1'')(\xi-0) = (p1u1'')(\xi+0). \tag{2.5}$$

Последнее условие соответствует тому, что в точке $x = \xi$ его излома оба его куска шарнирно скреплены (склёпаны). Если на концах $x = 0, x = 1$ отрезка поставить стандартные условия закрепления, т. е.:

$$u_1(0) = u_1'(0) = 0, \quad u_1(l) = u_1'(l) = 0,$$
$$(0) = u_2'(l) = 0, \tag{2.6}$$

то мы сможем смотреть на систему (2.1) – (2.6) как на краевую задачу, моделирующую, например, деформации большого канатного моста. При $f_2 \equiv 0$ второе уравнение (2.2) вместе с условиями (2.3), (2.4) заменяются, как несложно проверить, условием:

$$\delta(p1u1'')'(\xi) + \gamma u_1(\xi) = 0, \quad \gamma > 0,$$

что вместе с (2.5) приводит (2.1) к модели двухзвенной цепочки стержней с упругой опорой в месте стыка ($x = \xi$). В нашей ситуации можно говорить о задаче на графе типа креста, на двух рёбрах которого задано уравнение типа (2.1), а на двух остальных — типа (2.2).

Можно считать, что f_1 и f_2 есть обобщённые производные ($f_1 = F_1', f_2 = F_2'$) от функций ограниченной вариации. Физичность условий требует предположения $f1(\xi) = f2(\xi)$, что в случае скачков F_1 и F_2 в точке ξ означает совпадение атомов меры или — физически — общую для обеих функций u_1, u_2 сосредоточенную силу.

Задача (2.1) – (2.6) рассматривается в классе достаточно гладких (при $x \neq \xi$) функций $u(x) = \{u_1(x), u_2(x)\}$ на $[0,l]$. Далее во всех формулировках и условиях мы предполагаем, что $x \neq \xi$ без дополнительных оговорок.

Всюду далее считаем, что $p_1(\cdot)$ и $p_2(\cdot)$ сильно положительны.

3. Основные результаты работы.

Теорема 1. *Для любых $F1, F2$ из $BV[0,l]$ задача (2.1) – (2.6) однозначно разрешима (при* $f_1 = F_1'$ и $f_2 = F_2'$*).*

Теорема 2. *Пусть F_1 и F_2 — первообразные функций f_1 и f_2. Тогда для любых неубывающих F_1, F_2 при наличии хотя бы одной точки роста F_1 или F_2 решение* $u(x) = \{u_1(x), u_2(x)\}$ *строго положительно в $(0,l)$, т. е. $u_1(x) > 0$ и $u_2(x) > 0$ на $(0,l)$. Более того, для любых двух "неотрицательных" пар $\{f_1, f_2\}$ соответствующие им решения* $u(x) = \{u_1(x), u_2(x)\}$ *и* $v(x) = \{v_1(x), v_2(x)\}$ *соизмеримы по конусу неотрицательных функций в $C[0,l] \times C[0,l]$, т. е.*

$$sup_{x,s} \frac{u_i(x)v(s)}{v_i(x)\, u_i(s)} < \infty \quad при \quad i = 1,2.$$

Последнее свойство означает усиленную положительную обратимость задачи (2.1) – (2.6). Более сильно это свойство можно описать так. Пусть K — конус неотрицательных функций в пространстве $C[0,l] \times C[0,l]$. Пусть A — обратный к задаче (2.1) – (2.6) оператор. Стандартным способом проверяется, что он имеет интегральный вид:

$$(AF)'(x) = \int_0^l G(x,s)\, dF(s), \tag{2.7}$$

где $G(x,s)$ — двумерная матрица-функция Грина. Определяемый этой функцией интегральный оператор действует в $E = C[0,l] \times C[0,l]$ и сильно положителен на конусе K.

Теперь рассмотрим вместо (1), (2) уравнения:

$$(p_1u_1'')'' = \lambda M1'u_1, -(p_2u_2')' = \lambda M2'u_2, \tag{2.8}$$

где M_1, M_2 — неубывающие функции, определяющие распределение масс соответственно на стержне и струне. Следующая теорема устанавливается на основе описанного свойства оператора в теореме 2.

Теорема 3. *Пусть одна из функций $M_1(x), M_2(x)$ имеет хотя бы одну точку роста (т. е. отлична от константы). Тогда минимальное по модулю собственное значение λ_0 задачи (2.8) при условиях (2.3) – (2.6) является строго положительным и простым (корневое пространство одномерно), любая другая точка λ спектра удовлетворяет неравенству $|\lambda| > \lambda_0$. Соответствующая λ_0 собственная функция $u(x)$ имеет обе строго положительные (на $(0, l)$) компоненты.*

Задача (2.1) – (2.6) оказывается самосопряжённой в естественном смысле, её функция-матрица Грина — симметричным положительным ядром. Поэтому весь спектр задачи (2.3) – (2.6), (2.8) состоит из вещественных положительных чисел. По всей видимости, все они простые, а соответствующие им собственные функции имеют (как в классической теории Штурма-Лиувилля) количество перемен знака, совпадающее с номером соответствующего собственного значения (в естественной иерархии). Однако даже набор слов "число перемен знака", очевидный для скалярных функций, допускает разные толкования для вектор-функций, и потому описание осцилляционных свойств собственных функций в рассматриваемом случае пока не получено.

Функция-матрица Грина $G(x, s)$ задачи (1) – (6) допускает стандартное задание через фундаментальную систему решений однородного "уравнения"

$$(p_1 u_1'')'' = 0, \quad (p_2 u_2')' = 0, \quad x \neq \xi, \quad (2.9)$$

где, аналогично взглядам теории уравнений на графах [1], условия (2.3) – (2.5) удобно отнести к определению решения и, более того, к толкованию обобщённого уравнения (2.9) в точке $x = \xi$. Функция $G(x, s)$ оказывается непрерывной на $[0, l] \times [0, l]$ и строго положительна (по каждой координате) внутри этого квадрата. Следует отметить, что даже непрерывность здесь — весьма непросто проверяемое свойство. Трудности сосредоточены в окрестности прямой $s = \xi$. Подобные трудности нетривиальны даже для скалярных задач с внутренними особенностями.

Для вектор-функции символ "$\leq$" означает у нас синхронное выполнение по обеим компонентам аналогичного скалярного неравенства.

Теорема 4. *Существует строго положительная функция $\varphi(x)(= \{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\})$ такая, что $\varphi(x) G(\tau, s) \leq G(x, s)$ при всех x, τ, s из $[0, l]$.*

Следствием этого факта для оператора (7) является неравенство $\varphi(x) \max_\tau (Az)(\tau) \leq (Az)(x)$ для любой $z(x) \geq 0$, где неравенства (и максимум) понимаются в синхронно-двухкомпонентном плане. Отсюда следует аналог классического свойства Харнака: *для любого нетривиального решения* $u(x)$ $(= \{u_1(x), u_2(x)\})$ *неравенств:*

$$(p_1 u_1'')'' \geq 0, \quad -(p_2 u_2')' \geq 0$$

при условиях (3) – (6) *имеет место* $\varphi(x) \max_\tau u(\tau) \leq u(x)$.

Рассмотренная задача и метод её решения на основе использования функций Грина могут оказаться полезными также при применении дифференциальных методов в теории сигналов [2-3], исследовании ядер операторов преобразования для дифференциальных уравнений [4], компьютерной графике с применением дифференциальных методов описания граничных кривых [5], в задачах квадратичной экспоненциальной интерполяции [6-8].

ЛИТЕРАТУРА

1 Дикарева Е.В. Метод функций Грина в математических моделях для двухточечных краевых задач // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. Материалы восемнадцатого научно-практического семинара. Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. 2015. С. 226-235.

2 Киселев Е.А., Минин Л.А., Новиков И. Я., Ситник С. М. О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов // Математические заметки. 2014. Т. 96. Вып. 2. С. 239-250.

3 Zhuravlev M.V., Kiselev E. A., Minin L. A., Sitnik S. M. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // Journal of Mathematical Sciences, Springer. 2011. V. 173. № 2. P. 231-241.

4 Sitnik S.M. Buschman-Erdelyi transmutations, classification and applications // In the Book: Analytic Methods Of Analysis And Differential Equations: AMADE 2012. (Edited by M.V.Dubatovskaya, S.V.Rogosin). Cambridge, Cambridge Scientific Publishers, 2013. P. 171-201.

5 Недошивина А.И., Ситник С.М. Приложения геометрических алгоритмов локализации точки на плоскости к моделированию и сжатию информации в задачах видеонаблюдений // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2013. Т. 9. № 4. С. 108-111.

6 Певный А.Б., Ситник С.М. Строго положительно определённые функции, неравенства М.Г. Крейна и Е.А. Горина // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. Материалы восемнадцатого научно-практического семинара. Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. 2015. С. 247-254.

7 Ситник С.М., Тимашов А.С. Расчёт конечномерной математической модели в задаче квадратичной экспоненциальной интерполяции // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика, Физика. 2013. №19 (162). Вып. 32. С. 184-186.

8 Ситник С.М., Тимашов А.С. Приложения экспоненциальной аппроксимации по целочисленным сдвигам функций Гаусса // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. 2013. № 2 (56). С. 90-94.

REFERENCES

1 Dikareva E.V. Green function method in mathematical models for two point boundary-value problems. Novye informatsionnye tekhnologii v avtomatizirovannykh sistemakh [New Informatics Technologies For Automated Systems. Materials of 18th scientific-practical seminar]. Moscow, M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, 2015, p. 226-235. (In Russ.).

2 Kiselev E.A., Minin L.A., Novikov I.Ya., Sitnik S.M. On Riesz constants for some systems of integer shifts. *Matematicheskie zametki*. [Math. surveys], 2014, vol. 96, no. 2, pp. 239-250. (In Russ.).

3 Zhuravlev M.V., Kiselev E.A., Minin L.A., Sitnik S. M. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions. Journal of Mathematical Sciences, Springer, 2011, vol. 173, no. 2, pp. 231-241.

4 Sitnik S.M. Buschman-Erdelyi transmutations, classification and applications. In the Book: Analytic Methods Of Analysis And Differential Equations: AMADE 2012. (Edited by M.V.Dubatovskaya, S.V.Rogosin). Cambridge, Cambridge Scientific Publishers, 2013. pp. 171-201.

5 Nedoshivina A.I., Sitnik S.M. Applications of geometrical algorithms for point localization to modelling and data compression for video surveillance problems. *Vestnik VGTU*. [Bulletin of Voronezh State Technical University], 2013, vol. 9, no. 4, pp. 108-111. (In Russ.).

6 Pevnyi A.B., Sitnik S.M. Strictly positively defined functions, inequalities of M.G. Krein and E.A. Gorin. Novye informatsionnye tekhnologii v avtomatizirovannykh sistemakh [New Informatics Technologies For Automated Systems. Materials of 18th scientific-practical seminar]. Moscow, M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, 2015, pp. 247-254. (In Russ.).

7 Sitnik S.M., Timashov A.S. Numerical analysis of finite dimensional mathematical model for a problem of quadratic exponential interpolation. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta*. [Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics], 2013, no. 19 (162), issue 32, pp. 184-186. (In Russ.).

8 Sitnik S.M., Timashov A.S. Applications of exponential approximations by integer shifts of the Gaussian functions. *Vestnik VGUIT*. [Bulletin of Voronezh State University of Engineering Technologies], 2013, no. 2 (56), pp. 90-94. (In Russ.).