УДК 681.322

Профессор В.К. Битюков, доцент А.Е. Емельянов
(Воронеж. гос. ун-т. инж. технол.) кафедра информационных и управляющих систем.
тел.: (473) 255-38-75
E-mail: emalexeg @ yandex.ru

Professor V.K .Bityukov, associate professor A.E. Emelyanov
(Voronezh state university of engineering technologies) Department of Information and Control Systems. phone (473) 255-38-75
E-mail: emalexeg @ yandex.ru

Модель канала передачи со случайной задержкой и потерей пакетов данных для сетевых систем управления

The channel model with random transmission delays and loss of data packets for networked control systems

Реферат. Системы управления с использованием сетевого канала для связи между элементами называются сетевыми системами управления. Использование сетей для подключения территориально-распределенных компонентов системы обладает рядом преимуществ, таких как снижение затрат на монтаж системы, компактность размеров и веса, простоты диагностики и обслуживания системы, и повышенной гибкости системы. Тем не менее, использование сетей также создает новые проблемы, которые не существовали у традиционных систем управления. К таким проблемам следует отнести случайное время передачи по сетевому каналу от одного устройства к другому сетевому устройству, возможную потерю пакта данных при передаче, асинхронный режим функционирования элементов системы управления. Сетевые характеристики делают анализ, моделирование и управление сетевыми системами управления более сложной и трудной задачей. Эта сложность обусловлена в первую очередь тем, что такие системы требуют комплексных исследований, включающих в себя исследования по теории связи и теории управления. Одной из трудных задач при моделировании таких систем управления является моделирование канала передачи. В данной работе предложен подход для моделирования частного случая процесса передачи. Рассмотрен сетевой канал передачи со случайной задержкой и потерей пакетов данных. При этом предполагается, что по каналу одновременно может передаваться несколько пакетов данных. Время случайной задержки моделируется законом распределения Эрланга соответствующего порядка. Вероятность потери пакета зависит как от частоты поступления пакетов данных в канал передачи, так и от параметров закона распределения Эрланга. Предложена модель канала в виде последовательного соединения дискретных элементов. Дискретные элементы производят независимое квантование входного сигнала. Такое представление позволяет моделировать случайную передачу данных. Получена формула для определения вероятности потери пакета в процессе передачи.

Summary. Control systems using a network channel for communication between the elements are called network management systems. Using networks to connect geographically distributed components of the system has a number of advantages, such as reducing the cost of system installation, compact size and weight, ease of diagnostics and system maintenance, and increased flexibility. Nevertheless, the use of networks has also created new problems that did not exist in conventional control systems. These issues should include a random time transmission over the network from one device to another network device, possible loss of data packets during transmission, an asynchronous mode of operation control system components. Network features make analysis, modeling, and management of network management systems more complex and difficult task. This complexity is due primarily to the fact that such systems require complex research, including research on the theory of communication and control theory. One of the challenges in the modeling of management systems, is a simulation of the transmission channel. In this paper we propose an approach for modeling the particular case of the transfer process. Considered a network channel with a random delay and packet loss. It is assumed that the channel can simultaneously transmit multiple data packets. Time delay is modeled random distribution law Erlang appropriate order. The probability of packet loss depends on the arrival rate of data packets in the channel transmission and the parameters of the law Erlang distribution. A model of the channel as a series connection of discrete elements. Discrete produce independent quantization of the input signal. This representation allows to model the random data. The formula for determining the probability of packet loss during transmission.

Ключевые слова: сетевой канал, случайная задержка, вероятность потери пакета.

Keywords: networks canal, random delay, packet loss probability.

Системы управления с использованием сетевого канала для обмена данными между элементами, называются сетевыми системами управления. Эти системы являются "системами управления третьего поколения", в отличие от своих предшественников: систем цифрового и аналогового управления. Использование сетевых каналов для подключения пространственно-распределенных компонентов системы обладает рядом преимуществ, таких как: снижение затрат на монтаж, проводку системы, простоты диагностики и обслуживания системы.

Традиционная теория управления динамическими системами предполагает, что сигналы передаются по идеальным каналам, задержки в процессе передачи являются незначительными или же постоянными, потери данных отсутствуют.

Эти два предположения больше не соответствуют для многих современных сетевых систем управления.

Возникающие случайные временные задержки и потери пакетов данных могут существенно снизить качество функционирования сетевой системы управления, а в отдельных случаях даже привести к потере устойчивости.

Сетевые характеристика канала передачи данных делают анализ, моделирование и синтез сетевых систем управления, по сравнению с традиционными системами управления, более трудной и сложной задачей.

При моделировании сетевых систем управления одной из трудных и ответственных задач является задача моделирования сетевого канала передачи данных.

Эта трудность обусловлена следующими факторами:

- передача данных по каналу носит вероятностный характер, т.е. наблюдается случайная временная задержка при передаче пакета данных по каналу;
- в процессе передачи по каналу возможна потеря пакета данных с определенной вероятностью;
- в канале могут находиться одновременно несколько пакетов передаваемых данных, причем их передача должна происходить последовательно.

Попытки удовлетворить все эти требования одновременно приводят к достаточно большой размерности математической модели, что существенно снижает ее ценность [1, 4, 5].

В данной работе предлагается подход для моделирования сетевого канала передачи данных, для которого закон распределения времени передачи можно представить законом Эрланга n-го порядка. При этом предполагается, что при передаче обязательно имеется вероятность потери пакета данных.

На рисунке 1 представлена структурная модель, с помощью которой предлагается моделировать процесс передачи данных по каналу в сетевой системе управления.

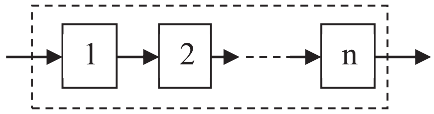

Рисунок 1. Структурная модель сетевого канала передачи

Данная модель представляет собой n последовательно соединенных дискретных элементов. Дискретный элемент представляет собой совокупность квантователя и интегратора, охваченных отрицательной обратной связью [2]. В данной модели предполагается, что квантователи функционируют независимо друг от друга. Предполагается, что при квантовании, входной сигнал мгновенно появляется на выходе соответствующего дискретного элемента. Таким образом, происходит последовательная передача сигнала от одного дискретного элемента к другому.

В работе рассмотрен случай, когда все квантователи подчиняются одному и тому же закону: квантование осуществляется случайным образом с интенсивностью λ и описывается экспоненциальным законом распределения:

$$f_{к}(t)=\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot t}, \qquad (1)$$

где $f_{к}(t)$ – плотность распределения вероятности времени между моментами квантования квантователя; t – время.

На вход канала подается информация (пакет данных, сигнал) с периодом T_0. Далее этот пакет последовательно проходит ряд квантователей.

Если пакет данных прошел все n квантователей, то передача считается успешной и информация поступает на дальнейшую переработку (например, в контроллер). Так как квантователи функционируют независимо друг от друга, то может случиться так, что пакет данных, который был передан позже, «догонит» передаваемый ранее пакет и «сотрет» его содержимое. Следовательно, данные этого пакета будут потеряны.

Таким образом, предложенная структурная модель позволяет моделировать сетевой канал, в котором:

1. осуществляется передача пакета данных со случайной временной задержкой, которая подчиняется закону Эрланга n-го порядка;

2. происходит потеря пакета данных в процессе передачи;

3. может одновременно осуществляться последовательная передача нескольких пакетов данных, т.е. в канале может находиться несколько пакетов данных одновременно.

Общее время передачи данных по каналу можно представить следующим образом:

$$T_{пер} = T_1 + T_2 + \cdots + T_n, \qquad (2)$$

где T_i – время передачи данных от $(i-1)$ квантователя к i кватователю; T_0 – время передачи данных от источника данных (вход канала передачи) к 1-му квантователю.

Как уже было сказано ранее, случайная величина $T_{пер}$ имеет плотность распределения $f(t)$, соответствующую закону Эрланга n-го порядка:

$$f(t) = \frac{\lambda \cdot (\lambda \cdot t)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}. \qquad (3)$$

Таким образом, изменяя число квантователей n и интенсивность квантования λ, можно моделировать достаточно широкий диапазон законов передачи данных по каналу и варьировать вероятность потери пакета данных в процессе передачи.

Определим вероятность потери пакета данных в процессе передачи по сетевому каналу.

Эту вероятность можно представить следующим образом:

$$P = \sum_{i=0}^{n-1} P_i, \qquad (4)$$

где P – вероятность потери пакета данных в процессе передачи по сетевому каналу; P_i – вероятность потери пакета данных на i квантователе $\left(i = \overline{1, n-1}\right)$; P_0 – вероятность потери пакета данных на входе в сетевой канал передачи, т.е. вероятность того, что 1-й квантователь не сработает за время T_0 и пакет данных не попадет в канал, так как новые данные «сотрут» старые.

Если пакет данных прошел n квантователей, то передача считается успешной.

Для P_0 имеем:

$$P_0 = e^{-\lambda \cdot T_0}. \qquad (5)$$

Для P_i можно записать:

$$P_i = \sum_{k=1}^{i} \left(\overline{P}_k \cdot P_{i-k,i}\right). \qquad (6)$$

где $\overline{P}_k$ – вероятность того, что за время T_0 пакет данных пройдет ровно k квантователей; $P_{i-k,i}$ – условная вероятность того, что пакет данных, прошедший за время T_0 ровно k квантователей, далее успеет пройти ровно $(i-k)$ квантователей $(i \geq k)$, когда как следующий за ним пакет пройдет i квантователей и «сотрет» его содержимое, т.е. этот пакет данных будет потерян.

С учетом (6) выражение (4) можно записать:

$$P = P_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{i} \left(\overline{P}_k \cdot P_{i-k,i}\right), \qquad (7)$$

Учитывая, что:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{i} \left(\overline{P}_k \cdot P_{i-k,i}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \overline{P}_k \sum_{i=0}^{n-k-1} P_{i,i+k}$$

выражение (7) запишем:

$$P = P_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \overline{P}_k \sum_{i=0}^{n-k-1} P_{i,i+k}. \qquad (8)$$

Вероятность $\overline{P}_k$ подчиняется закону Пуассона. Действительно, это вероятность того, что за время T_0 произойдет ровно k квантований:

$$\overline{P}_k = \frac{(\lambda \cdot T_0)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot T_0}, \qquad (9)$$

$$k = \overline{0, n-1}.$$

Определим вероятность $P_{i,i+k}$.

Это вероятность того, что до момента потери пакета данных произошло i квантований для данного пакета и $(k+i)$ квантований для пакета, который должен «стереть» передаваемые данные.

Так как квантователи одинаковые и независимые, то задачу о нахождении данной вероятности, можно свести к задаче о случайном блуждании, например, частицы по вертикальной линии. При случайном блуждании частицы, она на каждом шаге имеет равновероятную возможность подняться вверх или опуститься вниз на определенную одну и ту же величину. Будем считать, что подъем вверх соответствует работе квантователя для «стирающего» пакета, а опускание вниз – работе квантователя для передающего пакета. Всего шагов $x = i + (k+i) = 2i + k$ – число срабатываний квантователей для двух пакетов до момента «стирания» старого пакета. В момент, когда «стирающий» пакет достигнет передающий пакет, разность срабатываний квантователей для двух пакетов составит $y = (k+i) - i = k$. Необходимо соблюсти условие: до момента x разность срабатываний квантователей y не должна превышать k. Это обусловлено тем, что не должна рассматриваться ситуация, когда последующий пакет данных обгоняет предыдущий, а потом возвращается к нему. В данной модели это физически невозможно.

Таким образом, вероятность $P_{i,i+k}$ соответствует вероятности впервые достигнуть уровня $y=k$ в момент $x=2i+k$ при движении из начала координат.

Эту вероятность можно записать следующим образом:

$$P_{i,i+k}=\frac{M}{N}, \qquad (10)$$

где N – число всех путей выходящих из начала координат и достигающих точки (x,y), $x=2i+k$, $y=k$; M – число всех путей выходящих из начала координат и впервые достигающих уровня $y=k$ в момент $x=2i+k$.

Так как в каждой точке из $(2i+k)$ имеется 2 возможности (подняться вверх или опуститься вниз), то для N имеем:

$$N=2^{(2i+k)}. \qquad (11)$$

Для нахождения M воспользуемся результатом, представленном в [3]:

$$M=\frac{y}{x}\cdot C_x^{(x+y)/2}. \qquad (12)$$

Подставляя выражения для x и y в (12), имеем:

$$M=\left(\frac{k}{2i+k}\right)\cdot C_{2i+k}^{i+k}. \qquad (13)$$

Таким образом, для вероятности $P_{i,i+k}$ имеем:

$$P_{i,i+k}=\frac{1}{2^{(2i+k)}}\cdot\left(\frac{k}{2i+k}\right)\cdot C_{2i+k}^{i+k}. \qquad (14)$$

Окончательно, вероятность потери пакета данных в процессе передачи определяется по формуле:

$$P=e^{-\lambda\cdot T_0}\cdot\left[1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{(\lambda\cdot T_0)^k}{k!}\right)\times,\right.$$

$$\left.\times\sum_{i=0}^{n-k-1}\left(\frac{1}{2^{(2i+k)}}\cdot\left(\frac{k}{2i+k}\right)\cdot C_{2i+k}^{i+k}\right)\right], \qquad (15)$$

Для некоторых n получены формулы для вероятностей потерь.

1. $n=1$.

Закон распределения вероятностей времени передачи $f(t)=\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot t}$.

Вероятность потери пакета $P=e^{-\lambda\cdot T_0}$.

2. $n=2$.

Закон распределения вероятностей времени передачи $f(t)=\lambda^2\cdot t\cdot e^{-\lambda\cdot t}$. Вероятность потери пакета $P=e^{-\lambda\cdot T_0}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot(\lambda\cdot T_0)\right)$.

3. $n=3$.

Закон распределения вероятностей времени передачи $f(t)=\frac{\lambda\cdot(\lambda\cdot t)^2}{2!}\cdot e^{-\lambda\cdot t}$. Вероятность потери пакета $P=e^{-\lambda\cdot T_0}\cdot\left(1+\frac{5}{8}\cdot(\lambda\cdot T_0)+\frac{1}{8}\cdot(\lambda\cdot T_0)^2\right)$.

4. $n=4$.

Закон распределения вероятностей времени передачи $f(t)=\frac{\lambda\cdot(\lambda\cdot t)^3}{3!}\cdot e^{-\lambda\cdot t}$.

Вероятность потери пакета

$$P=e^{-\lambda\cdot T_0}\cdot\left(1+\frac{11}{16}\cdot(\lambda\cdot T_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{16}\cdot(\lambda\cdot T_0)^2+\frac{1}{48}\cdot(\lambda\cdot T_0)^3\right)$$

На рисунках 2 и 3 соответственно представлены графики законов распределения вероятностей времени передачи и вероятности потерь пакета данных при различных значениях n ($n=\overline{1,4}$). Здесь для каждого закона распределения использовалось одинаковое среднее значение времени передачи данных. С этой целью в формулах для законов распределения для каждого n интенсивность определялась как:

$$\lambda=n\cdot\lambda_1.$$

При этом среднее время передачи для всех законов распределения остается одинаковым:

$$m_t=1/\lambda_1.$$

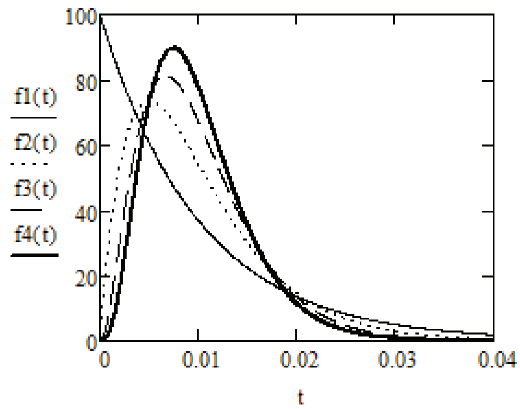

Рисунок 2. Плотность вероятности времени передачи данных по сетевому каналу $fn(t)$, $n=\overline{1,4}$

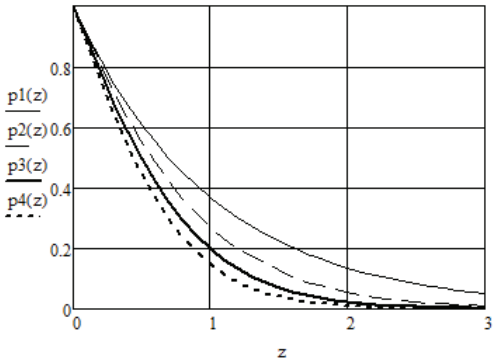

Рисунок 3. Вероятность потери пакета в процессе передачи по сетевому каналу $Pn(z)$, $n=\overline{1,4}$; $z=\lambda_1 \cdot T_0$

Рисунок 2 наглядно иллюстрирует, что с увеличением порядка n закона Эрланга разброс времени передачи по сетевому каналу относительно математического ожидания $m_t = 0{,}01$ уменьшается.

Как можно видеть из рисунка 3, с увеличением величины $z=\lambda_1 \cdot T_0$ вероятность потери пакета в процессе передачи по сетевому каналу системы уменьшается. Этот вывод справедлив для всех рассматриваемых законов распределения времени передачи. Увеличение величины z можно добиться различными путями:

- увеличением интенсивности квантования λ_1, что соответствует уменьшению времени передачи данных по каналу;
- увеличение такта квантования T_0 с одной стороны уменьшает вероятность потери при входе в канал, а с другой и вероятность потери в канале при передаче;
- одновременным увеличением λ_1 и T_0.

С увеличением числа квантователей n, что соответствует увеличению порядка закона распределения Эрланга, вероятность потери пакета в процессе передачи также снижается. Так при увеличении порядка закона распределения с 1 до 4, вероятность потери пакета уменьшается почти в два раза при $z=1$.

Надо отметить, что закон распределения, вероятность потери пакета и такт квантования жестко связаны между собой. Поэтому точное соответствие предлагаемой математической модели и реального сетевого канала, возможно только при численном совпадении всех выше указанных параметров.

Однако если один из параметров можно варьировать в достаточно широких пределах, то возможно нахождение такого режима, при котором данная математическая модель адекватно будет описывать реально функционирующий сетевой канал передачи.

Численный пример.

Предположим, что необходимо провести исследование сетевой системы управления, для которой допустимая область значений такта квантования T_0 представляет собой следующий интервал [0,005; 0,02] с. Допустим далее, что время передачи данных по сетевому каналу можно аппроксимировать законом Эрланга 2-го порядка с параметром:

$$\lambda_1 = 163{,}6 \text{ 1/c}.$$

Тогда при принятых ранее обозначениях:

$$\lambda = 2 \cdot \lambda_1.$$

Пусть также в реальном канале вероятность потери пакета данных равна $P=0{,}1$.

Введем обозначение:

$$z=\lambda_1 \cdot T_0.$$

Тогда формула для вероятности потери пакета данных примет вид:

$$P=e^{-2\cdot z}\cdot(1+z).$$

Численно решая полученное уравнение, имеем:

$$z=1{,}636.$$

Откуда

$$T_0 = 0{,}01 \text{c}.$$

Таким образом, полученный период дискретизации $T_0 = 0{,}01$ с для рассматриваемой сетевой системы управления является приемлемым и, следовательно, данный режим функционирования системы может быть исследован с помощью предложенной математической модели сетевого канала передачи.

ЛИТЕРАТУРА

1 Битюков В. К., Емельянов А. Е. Обобщенная математическая модель сетевой системы управления с передачей данных по каналу с конкурирующим методом доступа // Вестник ТГТУ. 2012. Т. 18. № 2. С. 319 - 326.

2 Абрамов Г.В., Емельянов А.Е., Ивлиев М. Н. Математическое моделирование цифровых систем управления с передачей информации по каналу множественного доступа. // Системы управления и информационные технологии. Москва-Воронеж. 2007. № 3 (29). С. 27 – 32.

3 Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В. Введение в теорию вероятностей. М.: Наука, 1982. 160 с.

4 Wu H., Lou L., Chen C.-C., Hirche S., Kuhnlenz K. Cloud-Based Networked Visual Servo Control // IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2013. V. 60. P. 554–566.

5 Zhang L, Gao H., Kaynak O. Network-Induced Constraints in Networked Control Systems - A Survey // IEEE Transactions on Industrial Informatics. 2013. V. 9. P. 403–416.

REFERENCES

1 Bityukov V.K., Emelyanov A.E. Generalized mathematical model of the network control system with data transmission over a channel with competing access method. *Vestnik TGTU* [Herald TSTU], 2012. vol. 18, no. 2, pp 319 – 326. (In Russ.).

2 Abramov G.V., Emelyanov A.E., Ivliev M.N. Mathematical modeling of digital control systems to the transmission of information via multiple access. *Sistemy upravlenia i infomatsionnye tekhnologii* [Control systems and information technology], 2007, no. 3 (29), pp. 27 – 32. (In Russ.).

3 Kolmogorov A.N., Zhurbenko I.G., Prokhorov A.V. Vvedenie v teoriyu veroiatnosti [Mathematics. Introduction to probability theory], Moscow, Nauka, 1982. 160 p. (In Russ.).

4 Wu H., Lou L., Chen C.-C., Hirche S., Kuhnlenz K. Cloud-Based Networked Visual Servo Control. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2013. vol. 60, pp. 554–566.

5 Zhang L, Gao H., Kaynak O. Network-Induced Constraints in Networked Control Systems - A Survey. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2013. vol. 9, pp. 403–416.