

Аспирант А.С. Бредихин, д.т.н. В.В. Червецов
(ГНУ ВНИИ молочной промышленности Россельхозакадемии, г. Москва)

Гидродинамика процесса охлаждения молочной сыворотки при поточной кристаллизации лактозы

Статья посвящена изучению стационарного осесимметричного течения молочной сыворотки в скребковом теплообменнике. Получены результаты для практического использования.

Article is devoted to studying of a stationary axisymmetric current of whey in the scraper heat exchanger. Results for practical use are received.

Ключевые слова: осесимметричное течение, молочная сыворотка, вязкость, давление, расход, кристаллизация лактозы, теплообменник непрерывного действия

Поточная кристаллизация лактозы развивается в сложных гидродинамических условиях и широком температурном диапазоне для молочной сыворотки. [1, 5, 6]. Для технической реализации поточной кристаллизации лактозы в ГНУ ВНИИ молочной промышленности Россельхозакадемии, разработана опытно-промышленная установка (рисунок 1). Основной частью этой установки является пластинчатый

скребковый теплообменник, который используют как охладитель-кристаллизатор.

Молочную сгущённую сыворотку с температурой 55-60 °С подают насосом в первую секцию пластинчатого скребкового теплообменника, где она охлаждается до температуры массовой кристаллизации лактозы, затем поступает в дисковый обработчик, состоящий из набора подвижных и неподвижных дисков.

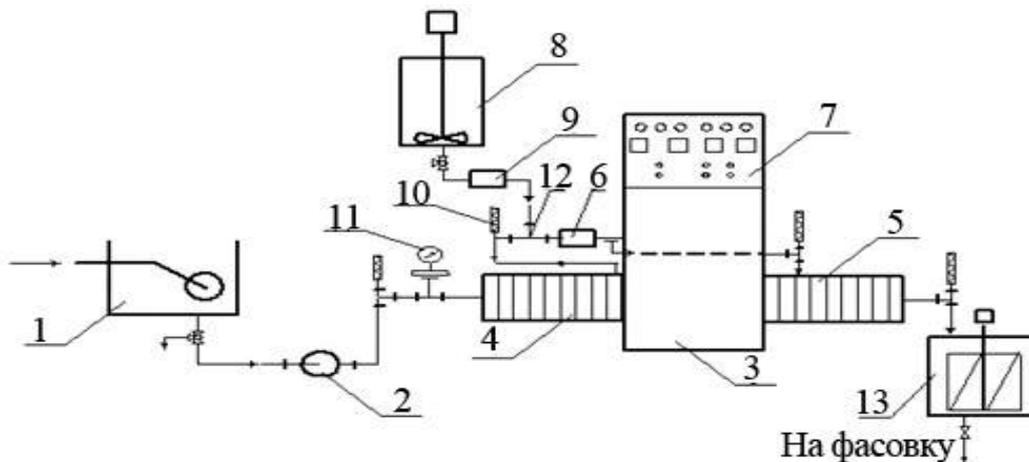


Рисунок 1 - Схема установки для поточной кристаллизации лактозы в молочной сыворотке:
1-приёмная ёмкость, 2-насос подачи продукта, 3-пластинчатый скребковый теплообменник, 4- I секция охлаждения, 5- II секция охлаждения, 6-дисковый обработчик, 7-щит управления, 8-ёмкость для затравки, 9-насос-дозатор, 10-термометры сопротивления, 11-манометр с разделительной мембраной, 12-струйный смеситель, 13-буферная ёмкость.

Подвижные диски снабжены выступами со специальными проточками, обеспечивающими кавитационный режим течения. Перед дисковым обработчиком в поток продукта через струйный смеситель насосом-дозатором впрыскивается взвесь затравки, которая диско-

вым обработчиком гарантированно распределяется по всему объёму продукта, при этом подвергая его интенсивному гидродинамическому воздействию. Охлажденный во II секции теплообменника до конечной температуры продукт поступает в буферную ёмкость и затем на фасовку.

Авторами проведено исследование гидродинамика охлаждения молочной сыворотки при поточной кристаллизации лактозы в пластинчатом скребковом теплообменнике. [1, 5-6]. Такой аппарат представляет собой набор чередующихся теплообменных и так называемых продуктовых пластин в форме диска, установленных и зажатых на специальных штангах. Набор последовательно соединенных теплообменных элементов образует теплопередающую поверхность аппарата для нагревания или охлаждения продукта. В зависимости от организации процесса молочная сыворотка может поступать в пространство между дисками как из центрального отверстия, так и из отверстий, расположенных на периферии дисков.

Внутри продуктовых пластин расположены подвижные диски, закрепленные на валу. С обеих сторон этих дисков подвижно закреплены полиамидные ножи специальной формы. При вращении дисков эти ножи счищают с поверхности теплообменных пластин пристенный ламинарный слой обрабатываемого продукта, при

этом происходит его перемешивание. В зависимости от направления движения молочной сыворотки и хладоносителя аппарат может работать по схеме прямотока и противотока.

Исследование основано на решении дифференциального уравнения теплопереноса в движущихся жидких средах, записанных в цилиндрической системе координат при осесимметричном распределении температуры, без учета диссипации энергии:

$$v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

где T – температура в точках продукта, °С, r и z – цилиндрические координаты точки продукта, v_r и v_z – проекции скорости точек продукта на оси r и z , a – коэффициент температуропроводности.

Расчётная схема процесса приведена на рисунке 2.

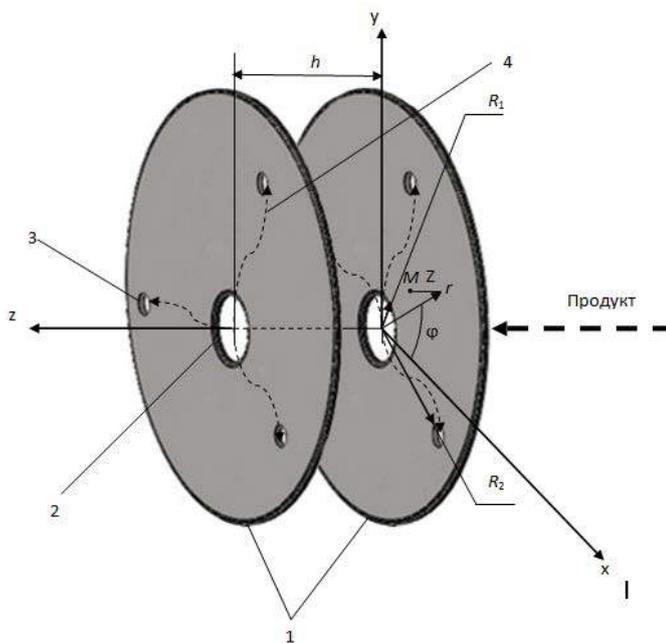


Рисунок 2 - Расчётная схема: 1 – продуктовые пластины; 2 – центральное отверстие; 3 – периферийные отверстия; 4 – линии тока продукта

Полагаем, что осевая скорость продукта V_z значительно меньше радиальной V_r и окружной V_ϕ скоростей, поэтому в уравнении (1) $v_z \frac{\partial T}{\partial z} \approx 0$ положим. Для определения радиальной скорости V_r воспользуемся

дифференциальным уравнением стационарного осесимметричного течения несжимаемой нелинейно-вязкой жидкости, полагая в нем реологические константы и плотность продукта ρ не зависящими от температуры для данной пары дисков (охлаждающего элемента). Для этого запишем общее дифференциальное уравнение осесимметричного

стационарного течения сплошной среды в напряжениях [2] в проекции на радиальное направление r :

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = F_r + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\varphi\varphi}}{r} \right\}, \quad (2)$$

где $\tau_{rr}, \tau_{\varphi\varphi}$ – нормальные напряжения на площадках перпендикулярных соответственно радиальной r и окружной φ осям, τ_{rz} – касательное напряжение на площадках перпендикулярных осям r и z .

Реологические исследования молочной сыворотки позволяют с большой точностью принять в качестве её реологической модели степенную модель Оствальда-Де Виля. Для такой модели компоненты тензора напряжений, входящие в уравнение (1), при сделанных ранее предположениях имеют вид [3, 4]:

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= -p + 2k|H|^{n-1} \frac{\partial v_r}{\partial r}, \\ \tau_{\varphi\varphi} &= -p + 2k|H|^{n-1} \frac{v_r}{r}, \\ \tau_{rz} &= k|H|^{n-1} \frac{\partial v_r}{\partial z} \end{aligned}, \quad (3)$$

где k и n – реологические константы молочной сыворотки, H – интенсивность скоростей деформации равная:

$$H = \sqrt{\frac{1}{6} \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{v_r}{r} \right)^2 + \left(-\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 \right] + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2}. \quad (4)$$

Величина $k|H|^{n-1}$ может рассматриваться как некоторая кажущаяся (эффективная) вязкость.

Уравнение неразрывности (несжимаемости) справедливое для любой жидкой среды при сделанных предположениях имеет вид:

$$\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = 0. \quad (5)$$

Интегрируя уравнение (5), находим:

$$v_r = \frac{1}{r} f(z). \quad (6)$$

На основании равенства (6) для интенсивности скоростей деформации H из (4) получим выражение:

$$H = \sqrt{\left(\frac{f(z)}{r^2} \right)^2 + \left(\frac{f'(z)}{2r} \right)^2}, \quad (7)$$

где штрих во втором слагаемом подкоренного выражения и далее означает производную по координате z .

Оценим порядки слагаемых в подкоренном выражении формулы (7), приведя ее к безразмерному виду. Для этого запишем следующие соотношения между размерными и безразмерными величинами, входящими в (7):

$$\begin{aligned} z &= \bar{z} h, \\ r &= \bar{r} R_2, \\ f(z) &= \bar{v}_r R_2 \overline{f(\bar{z})}, \\ f'(z) &= \frac{\bar{v}_r R_2}{h} \overline{f'(\bar{z})}, \end{aligned} \quad (8)$$

где в качестве характерных координат взяты: зазор h между дисками и радиус R_2 центров выходных отверстий (рисунок 1); маленькая дуга над v_r означает осреднение по координате r , а верхняя черта обозначает безразмерную величину. Подставив выражения размерных величин по соотношениям (8) в формулу (7), приведем ее к виду:

$$H = \frac{\bar{v}_r h}{\bar{r}} \times \sqrt{\left(\frac{\overline{f(\bar{z})}}{\bar{r}^2} \right)^2 \frac{h^2}{R_2^2} + \left(\frac{\overline{f'(\bar{z})}}{2} \right)^2}. \quad (9)$$

Так как в формуле (9) подкоренное выражение приведено к безразмерной форме, то порядки слагаемых в этом выражении будут определяться порядком коэффициентов при этих слагаемых. Коэффициент при первом слагаемом значительно меньше коэффициента при втором слагаемом, т. е. $\frac{h^2}{R_2^2} \ll \frac{1}{4}$. Так,

например, если положить $h \sim 10^{-3}$ м и $R_2 \sim 10^{-2}$ м, то $\frac{h^2}{R_2^2} \sim 0,01$. Таким образом, в

подкоренных выражениях (9) и (7) можно оставить только вторые слагаемые. На этом основании интенсивность скоростей деформации (7) запишется как:

$$H = \left| \frac{f'(z)}{2r} \right| = \frac{1}{2r} |f'(z)|. \quad (10)$$

В этом случае с учетом (6) соотношения (3) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= -p - 2k \left| \frac{f'(z)}{2r} \right|^{n-1} \frac{f(z)}{r^2}, \\ \tau_{\varphi\varphi} &= -p + 2k \left| \frac{f'(z)}{2r} \right|^{n-1} \frac{f(z)}{r^2}, \\ \tau_{rz} &= k \left| \frac{f'(z)}{2r} \right|^{n-1} \frac{f'(z)}{r} \end{aligned} \quad (11)$$

Так как продукт принудительно вращается при помощи крестообразных лопастей, то окружная скорость точек продукта не больше величины Ωr , где Ω – угловая скорость лопастей мешалки. Поэтому примем эту величину за окружную скорость v_φ , т. е.:

$$v_\varphi = \Omega r. \quad (12)$$

Подстановка выражений компонент тензора напряжений из (11) и окружной скорости (12) при условии $v_z \approx 0$ в уравнение (2) приводит это уравнение к следующему виду:

$$\begin{aligned} -\frac{[f(z)]^2}{r^3} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \times \\ &\times \left(p - \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} \right) + \\ &+ \frac{k}{\rho} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{1}{r} \right)^n \frac{\partial}{\partial z} \times \\ &\times [(f'(z))^n] \text{sign } f'(z) \end{aligned} \quad (13)$$

Выражение в левой части равенства (13) значительно меньше каждого из слагаемых в его правой части. Это следует из оценок, сделанных аналогично оценкам в формуле (7).

Тогда можно принять $\frac{[f(z)]^2}{r^3} \sim 0$ и в получившемся уравнении разделяются слагаемые, зависящие только от соответствующих координат r и z . Кроме того, в первом слагаемом правой части величина $\frac{\rho \omega^2 r^2}{2} \ll p$ и ей мож-

но пренебречь по сравнению с давлением p . Это следует из условия малости угловой скорости Ω вращения мешалок. Так, например, в реальных охладителях данного типа $p \sim 10^5 \text{ Па}$, $\omega \sim 4 \text{ с}^{-1}$, $r \sim 0,1 \text{ м}$, $\rho \sim 10^3 \text{ кг/м}^3$. Отсюда следует справедливость усиленного неравенства, написанного выше. На этом основании уравнение (13) запишется как:

$$\begin{aligned} r^n \frac{\partial p}{\partial r} &= k \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial z} [(f'(z))^n] \text{sign } f'(z) \end{aligned} \quad (14)$$

При этом считается, что давление p не зависит от поперечной координаты z . В дальнейшем, в силу симметрии профиля радиальной скорости относительно срединной плоскости дисков, будем при гидродинамических расчетах рассматривать область $0 \leq z \leq \frac{h}{2}$. Для этой

области $\text{sign } f'(z) = 1$. Приравнивая левую и правую части (14) к одной и той же константе A с учетом $\text{sign } f'(z) = 1$, получим два обыкновенных дифференциальных уравнения относительно функции $f(z)$ и давления p :

$$r^n \frac{\partial p}{\partial r} (p) = A, \quad (15)$$

$$k \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \frac{\partial}{\partial z} [(f'(z))^n] = A. \quad (16)$$

Уравнения (15), (16) будем решать при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} r = R_1, p(R_1) &= p_1; \\ r = R_2, p(R_2) &= p_2, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} z = 0, f(r, 0) &= 0; \\ z = \frac{h}{2}, f' \left(r, \frac{h}{2} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где R_2 – расстояние центров выходных отверстий от центров дисков; последнее из граничных условий (18) следует из симметрии профиля радиальной скорости относительно срединной плоскости $z = \frac{h}{2}$. Интегрированием

уравнений (15) и (16) при граничных условиях (17) и (18) получаем выражения для давления $p(r)$ и функции $f(z)$:

$$p(r) = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{R_2^{1-n} - R_1^{1-n}} \times (r^{1-n} - R_1^{1-n}) \quad (19)$$

$$f(z) = - \left[- \frac{(p_1 - p_2)(1-n)}{k(R_2^{1-n} - R_1^{1-n})} \right]^{\frac{1}{n}} \times \frac{n}{n+1} \left[\left(\frac{h}{2} - z \right)^{\frac{n+1}{n}} - \left(\frac{h}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (20)$$

Для полного гидродинамического расчета охладителя представляется важным получить зависимость между перепадом давления $p_1 - p_2$ на входе и выходе продукта из данного охладительного элемента и расходом продукта

q , используя формулу $q = 4 \pi r \int_0^{\frac{h}{2}} v_r dz$.

Подставив в эту формулу выражение v_r с учетом (20) и интегрируя, получим:

$$q = 2 \pi h \frac{2n}{2n+1} \left(\frac{h}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} \times \left[\frac{(p_1 - p_2)(1-n)}{k(R_2^{1-n} - R_1^{1-n})} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (21)$$

Таким образом, полученные формулы позволяют проводить гидродинамический расчет пластинчатых скребковых теплообменных аппаратов при охлаждении молочной сыворотки для кристаллизации в ней лактозы.

ЛИТЕРАТУРА

1 Бредихин, С.А. Технологическое оборудование предприятий молочной промышленности [Текст] / С.А. Бредихин. - М.: Колос, 2010. - 408 с.

2 Кулаков, А.В. Элементы механики пищевых сред [Текст] / А.В. Кулаков, В.М. Чесноков. - М.: МГУПБ, 2004. - 301 с.

3 Чеботарёв, Е.А. Вязкость молочной сыворотки и продуктов из неё [Текст] / Е.А. Чеботарев, П.Г. Нестеренко, Л.Е. Давыдянец и др. // Молочная промышленность. - 1983. - № 2. - С. 26-27

4 Шульман, З.П. Конвективный теплоперенос реологически сложных жидкостей [Текст] / З.П. Шульман. - М.: Энергия, 1975. - 352 с.

5 Broun, D.J. Crystal growth measurement and modeling of fluid flow in a crystallizer [Text] / D.J. Broun, F. Bousan //Zuckerindustrie. - 1992. - V. 117. - № 1. - P. 35-39.

6 Spreer, E. Technologie der Milchverarbeitung [Text] / E. Spreer. - Hamburg: Behr's Verlag, 1995 - 517 p.

REFERENCES

1 Bredikhin, S.A, Technological equipment of the dairy industry [Text] / S.A. Bredikhin. - М.: Kolos, 2010. - 408 p.

2 Kulakov, A.V. Elements of mechanics food media [Text] / A.V. Kulakov, V.M. Chesnokov. - М.: MSUAB, 2004. - 301 p.

3 Chebotarev, E.A. The viscosity of whey and products from it [Text] / E.A. Chebotarev, P.G. Nesterenko, L.E. Davydyants et al // Dairy industry. - 1983. - № 2. - P. 26-27

4 Shulman, Z.P. Convective heat transfer rheology of complex fluids [Text] / Z.P. Shulman. - М.: Energiya, 1975. - 352 p.

5 Broun, D.J. Crystal growth measurement and modeling of fluid flow in a crystallizer [Text] / D.J. Broun, F. Bousan //Zuckerindustrie. - 1992. - V. 117. - № 1. - P. 35-39.

6 Spreer, E. Technologie der Milchverarbeitung [Text] / E. Spreer. - Hamburg: Behr's Verlag, 1995 - 517 p.