

Профессор Ю.А. Фатыхов, доцент В.А. Шуманов,
(Калининградский государственный технический университет)
В.А. Зарудный
(Правительство Калининградской области)

Математическая модель процесса коэкструдирования пищевых масс

Рассмотрен процесс коэкструдирования пищевых масс. Получены уравнения движения в кольцевой и цилиндрической трубе двух соприкасающихся вязкопластичных жидкостей. Определены постоянные коэффициенты уравнений, зависящие от параметров процесса и конструктивных размеров коэкструзионной насадки.

The process of co-extruding food masses is considered. The equations of motion in a circular cylindrical tube and two adjoining viscous-plastic fluids are obtained. The constant equation coefficients, depending on the process parameters and structural dimensions of co-extrusion nozzle, are defined.

Ключевые слова: коэкструзия, пищевые массы, вязкость, модель, уравнения движения

В работах [1, 2] рассмотрен механизм и физическая картина получения комбинированных фаршевых изделий методом коэкструзии. В данной работе будет представлена математическая модель данного процесса.

Процесс формирования готовой продукции происходит в камере коэкструзионной насадки машинной системы Vemag893.

Камера формирования (рисунок 1) представляет собой полость цилиндрической формы, куда подается фаршевая оболочка. Коаксиально в данную полость подается начинка через кольцевой цилиндрический канал с клапаном, регулирующим подачу. Внизу камеры формирования установлена диафрагма с ножом в виде лепестков.

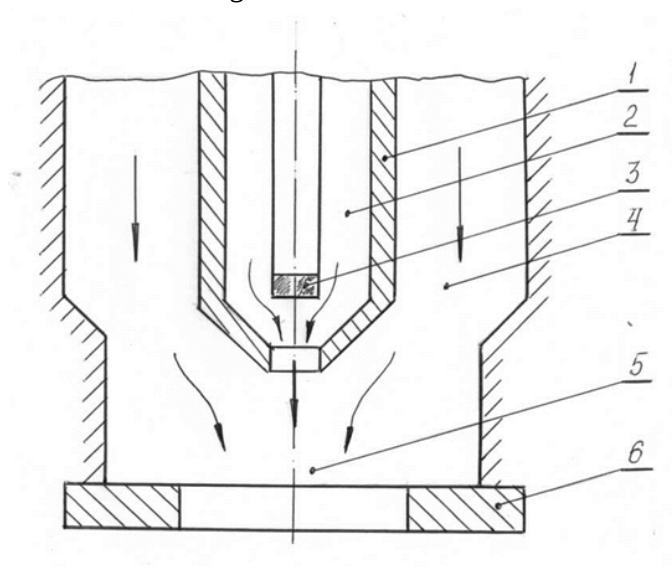


Рисунок 1 – Нижняя часть коэкструзионной насадки
1 – насадка; 2 – начинка; 3 – клапан; 4 – оболочка; 5 – камера формирования; 6 – диафрагма

Процесс формирования готового изделия связан с началом раскрытия ножей (лепестков) диафрагмы. По мере раскрытия диафрагмы поднимается клапан, связанный

с пневматическим исполнительным механизмом, и по цилиндрическому кольцевому каналу внутрь оболочки выдавливается начинка. Формирование готового продукта связано с полным раскрытием и закрытием диафрагмы и клапана.

На рисунке 2 схематично представлено движение начинки и оболочки в камере формиро-

рования. С индексом 1 связаны величины, характеризующие начинку, с индексом 2 – оболочку.

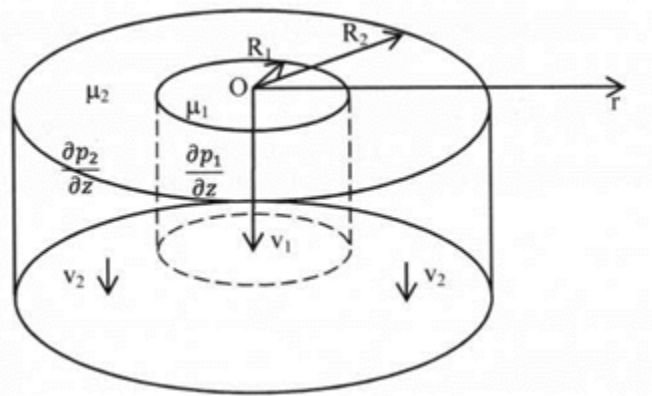


Рисунок 2 - Схема движения начинки и оболочки в камере формирования

За основу математической модели возьмем уравнение Навье-Стокса в цилиндрических координатах для движения очень вязких жидкостей [3] в трубе:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) \quad (1)$$

где $v(r, t)$ – скорость, ρ – плотность, $\frac{\partial P}{\partial z}$ – градиент давления, ν – кинематическая вязкость.

Стационарная задача ($\frac{\partial v}{\partial t} = 0$) коаксиального движения в трубе двухслойной жидкости при открытых клапане и диафрагме ранее была решена [4]. При решении нестационарного уравнения (1) используем зависимость градиента давления, меняющегося со временем по закону [5]:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = a |\sin(\omega t)|, \quad (2)$$

а скорость представим как:

$$v(r, t) = |\sin(\omega t)| \cdot U(r), \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1) и выделяя временную часть, получаем:

$$\frac{a + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial U}{\partial r}}{\omega U} = |\operatorname{ctg}(\omega t)|. \quad (4)$$

Уравнение (4) может иметь решение, если правая его часть равна постоянной величине. В нашем случае примем постоянную

равную нулю.

Окончательно получаем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\nu \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dU}{dr} + a = 0 \quad (5)$$

уравнение для удобства интегрирования, представим в виде:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) + \frac{ar}{\nu} = 0, \quad (6)$$

где $U = \begin{cases} U_1(r), & 0 \leq r \leq R_1, \\ U_2(r), & R_1 \leq r \leq R_2, \end{cases}$

а граничные условия:

$$\begin{cases} U_1(R_1) = U_2(R_1), \\ U_2(R_2) = 0, \\ \mu_1 \frac{dU_1}{dr} \Big|_{R_1} = \mu_2 \frac{dU_2}{dr} \Big|_{R_1}, \end{cases} \quad (7)$$

где μ_1, μ_2 – динамические вязкости.

Решение уравнения (6) с условиями (7) будет иметь следующий вид:

$$U = \begin{cases} \frac{a_1}{4\nu_1} r^2 + C_1 \ln r + C_2, \\ \frac{a_2}{4\nu_2} r^2 + C_3 \ln r + C_4. \end{cases} \quad (8)$$

где $C_1 = 0$ – из условия конечности скорости на оси трубы;

C_3 определяется, исходя из третьего условия (7), C_4 – из второго, C_2 – из первого.

$$\left\{ \begin{array}{l} C_2 = -\frac{1}{4\mu_1} \frac{\partial p_1}{\partial z} R_1^2 + \frac{1}{4\mu_2} \frac{\partial p_2}{\partial z} R_1^2 + \frac{R_1^2}{2} \left(\frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{\partial p_2}{\partial z} \right) \ln R_1 - \frac{1}{4\mu_2} \frac{\partial p_2}{\partial z} R_2^2 - \frac{R_1^2}{2} \left(\frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{\partial p_2}{\partial z} \right) \ln R_2, \\ C_3 = \frac{R_1^2}{2} \left(\frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{\partial p_2}{\partial z} \right), \\ C_4 = -\left[\frac{1}{4\mu_2} \frac{\partial p_2}{\partial z} R_2^2 + \frac{R_1^2}{2} \left(\frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{\partial p_2}{\partial z} \right) \ln R_2 \right]. \end{array} \right. \quad (9)$$

В (9) $\frac{\partial p_1}{\partial z}$ и $\frac{\partial p_2}{\partial z}$ – амплитуды градиентов давлений.

Окончательный вид нахождения скорости истечения жидкостей определяется постановкой (8) и (9) в (3).

Объем жидкости (фарша), протекающий в единицу времени через поперечное сечение трубы, определим по формуле:

$$Q = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{R_1} 2\pi r v_1 dr + \int_{R_1}^{R_2} 2\pi r v_2 dr \right). \quad (10)$$

Коэффициент $\frac{2}{\pi}$ получаем путем усреднения за время одного цикла функции $|\sin(\omega t)|$:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^T |\sin(\omega t)| dt = \frac{2}{\pi}. \quad (11)$$

Среднюю скорость течения можно определить по формуле:

$$\bar{v} = \frac{Q}{\pi R_2^2}. \quad (12)$$

Коэффициенты C_2 , C_3 , C_4 , обозначенные в уравнениях (9), находят, исходя из известных параметров процесса и конструктивных размеров коэкструзионной насадки.

В заключение, следует сделать некоторые выводы:

- получены уравнения, описывающие движение в цилиндрической трубе двух соприкасающихся вязкопластичных жидкостей;
- определены выражения для постоянных коэффициентов уравнений движения, зависящих от параметров процесса и конструктивных размеров коэкструзионной насадки.

ЛИТЕРАТУРА

1 Фатыхов, Ю.А. Анализ процесса коэкструдирования при производстве комбинированных фаршевых продуктов [Текст] / Ю.А. Фатыхов, В.Н. Эрлихман, Е.Е. Керевичене // Межвузовский сборник научных трудов КГТУ «Совершенствование технологических процессов и оборудования в линиях пищевых производств». - Калининград: ФГОУ ВПО «КГТУ», 2007. - С. 17-23.

2 Фатыхов, Ю.А. Совершенствование процесса коэкструзии куриной продукции [Текст] / Ю.А. Фатыхов и др. // Известия КГТУ. - 2005. - №7. - С. 86-90.

3 Кочин, Н.Е. Теоретическая гидромеханика в 2-х частях [Текст] / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. - М.: Физматгиз, 1963. - 728 с.

4 Фатыхов, Ю.А. К созданию математической модели процесса коэкструдирования пищевых масс [Текст] / Ю.А. Фатыхов, В.А. Шуманов, В.А. Зарудный // Известия КГТУ. - 2013. - № 29. - С. 16-21.

5 Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Гидромеханика [Текст] / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. - М.: Наука, 1988. - 736 с.

REFERENCES

1 Fatykhov, Y.A. Analysis of co-extrusion in the production process of combined minced products [Text] / Y.A. Fatykhov, V.N. Erlikhman, E.E. Kerevichene // Interuniversity collection of scientific papers KSTU "Improving processes and equipment in the lines of food production". - Kaliningrad: KSTU, 2007. - P. 17-23.

2 Fatykhov, Y.A. Improving the process of co-extrusion of chicken products [Text] / Y.A. Fatykhov et al // News of KSTU. - 2005. - № 7. - P. 86-90.

3 Cochinn, N.E. Theoretical fluid mechanics in 2 parts [Text] / N.E. Cochinn, I.A. Kibel, N.V. Rose. - M.: Fizmaggiz, 1963. - 728 p.

4 Fatykhov, Y.A. Towards the creation a mathematical model of the co-extrusion process of food masses [Text] / Y.A. Fatykhov, V.A. Shumanov, V.A. Zarudny // News of KSTU. - 2013. - № 29. - P. 16-21.

5 Landau, L.D. Theoretical physics. Fluid [Text] / L.D. Landau, E.M. Lifschitz. - M.: Nauka, 1988. - 736 p.