УДК 539.3;534.1

Научный сотрудник В.С. Поленов,
старший научный сотрудник Л.А. Кукарских,
(Воронеж, Военный учебно-научный центр Военно-воздушный сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина») 4 НИО НИЦ (БП и О ВВС).
тел. (473) 244-77-16
начальник факультета С.М. Логойда
(Воронеж, Военный учебно-научный центр Военно-воздушный сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина») факультет РТО.
тел. (473) 244-76-18

Scientist V.S. Polenov, senior scientist L.A. Kukarskikh,
(Voronezh, Military Educational Research Centre of Air Force «Air Force Academy after professor N.E. Zhykovsky and Y.A. Gagarin») 4 RD dep. res. cent. (BP and O VVC).
phone (473) 244-77-16
head of department S.M. Logoida
(Voronezh, Military Educational Research Centre of Air Force «Air Force Academy after professor N.E. Zhykovsky and Y.A. Gagarin») Department of electronic support.
phone(473) 244-76-18

О динамическом деформировании вязкоупругой двухкомпонентной среды

Dynamic deformation the viscoelastic two-component medium

Реферат. В статье рассматривается гармоническое деформирование двухкомпонентной среды, одна компонента которой представляет собой вязкоупругую среду, наследственные свойства которой описываются ядром последействия Абеля интегро-дифференциальных соотношений Больцмана-Вольтера, а вторая - сжимаемую жидкость. Рассматривается одномерный случай. Используются уравнения движения двухкомпонентной среды в перемещениях. Решение системы этих уравнений ищется в виде затухающих волн. Вводятся безразмерные коэффициенты. Система уравнений приводится к однородной системе с комплексными коэффициентами относительно амплитуды волн в вязкоупругой компоненте и в жидкости. В результате раскрытия определителя системы получается биквадратное уравнение. Упругий оператор выражается через ядро последействия Абеля для пространства Фурье. С помощью ряда преобразований и обозначений биквадратное уравнение сводится к квадратному уравнению. Делается вывод, что в двухкомпонентной вязкоупругой среде существует два типа звуковых волн. В результате решения квадратного уравнения находятся характеристики распространения звуковых волн в вязкоупругой двухкомпонентной среде, физико-механические свойства которой представлены комплексными параметрами. Получены формулы для определения скорости распространения звуковых волн, коэффициента затухания, тангенса угла механических потерь, зависящие от свойств пористой среды и круговой частоты. Построены графики зависимостей характеристик распространения звуковых волн от логарифма температуры и от параметра дробности γ.

Summary. In the article are scope harmonious warping of the two-component medium, one component which are represent viscoelastic medium, hereditary properties which are described by the kernel aftereffect Abel integral-differential ratio Boltzmann-Volterr, while second – compressible liquid. Do a study one-dimensional case. Use motion equation of two-component medium at movement. Look determination system these equalization in the form of damped wave. Introduce dimensionless coefficient. Combined equations happen to homogeneous system with complex factor relatively waves amplitude in viscoelastic component and in fluid. As a result opening system determinant receive biquadratic equation. Elastic operator express through kernel aftereffect Abel for space Fourier. With the help transformation and symbol series biquadratic equation reduce to quadratic equation. Come to the conclusion that in two-component viscoelastic medium exist two mode sonic waves. As a result solution of quadratic equation be found description advance of waves sonic in viscoelastic two-component medium, which physical-mechanical properties represent complex parameter. Velocity determination advance of sonic waves, attenuation coefficient, mechanical loss tangent, depending on characteristic porous medium and circular frequency formulas receive. Graph dependences of description advance of waves sonic from the temperature logarithm and with the fractional parameter γ are constructed.

Ключевые слова: вязкоупругая среда, упругий оператор, затухающая волна, ядро последействия.

Keywords: viscoelastic medium, elastic operator, damped wave, aftereffect kernel.

Распространению упругих волн в двухкомпонентных средах посвящены работы [1-3], в которых изучаются стационарные и нестационарные волны.

Систему уравнений движения двухкомпонентной среды в перемещениях для одномерного случая запишем в виде [1]:

$$\mu\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2}+Q\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2}=\rho_{11}\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2}+\rho_{12}\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \quad (1)$$
$$Q\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2}+R\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2}=\rho_{12}\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2}+\rho_{22}\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2},$$

где μ – модуль сдвига; $Q = (1 - m)R_0$, $R = mR_0$, m – пористость, R_0 – модуль сжимаемости жидкости; ρ_{12} – коэффициент динамической связи твердой компоненты и жидкости; $\rho_{11} = \rho_1 - \rho_{12}$, $\rho_{22} = \rho_2 - \rho_{12}$; ρ_{11} и ρ_{22} – плотности компонент; t – время.

Индексы в круглых скобках относятся: 1 – к вязкоупругой компоненте, 2 – к жидкости.

Запишем систему (1) в безразмерной форме:

$$G^2\left(\sigma_{11}\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2}+\sigma_{12}\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2}\right)=\gamma_{11}\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2}+\gamma_{12}\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \quad (2)$$
$$G^2\left(\sigma_{12}\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2}+\sigma_{22}\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2}\right)=\gamma_{12}\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2}+\gamma_{22}\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2}$$

Здесь:

$$H=\mu+2Q+R,\quad \rho=\rho_{11}+2\rho_{12}+\rho_{22},$$
$$G^2=H/\rho,\quad \sigma_{11}=\frac{\mu}{H},\ \sigma_{12}=\frac{Q}{H},\quad \sigma_{22}=\frac{R}{H},$$
$$\gamma_{11}=\frac{\rho_{11}}{\rho},\quad \gamma_{12}=\frac{\rho_{12}}{\rho},\quad \gamma_{22}=\frac{\rho_{22}}{\rho}.$$

Решение системы (2) будем искать в виде затухающих волн:

$$u^{(1)}=C_1e^{i\omega t-\left(\alpha+i\frac{\omega}{c}\right)x},\quad u^{(2)}=C_2e^{i\omega t-\left(\alpha+i\frac{\omega}{c}\right)x}, \quad (3)$$

где C_i (i=1,2) – амплитуда волн; α – коэффициент затухания; c – скорость волны; ω – круговая частота; i – мнимая единица ($i=\sqrt{-1}$); t – время; x – координата.

Подставим значения $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ в систему (2), получим:

$$[\gamma_{11}\omega^2+\tilde{\sigma}_{11}G^2\left(\alpha+i\frac{\omega}{c}\right)^2]C_1+[\gamma_{12}\omega^2+$$
$$+\tilde{\sigma}_{12}G^2\left(\alpha+i\frac{\omega}{c}\right)^2]C_2=0 \quad (4)$$
$$[\gamma_{12}\omega^2+\tilde{\sigma}_{12}G^2\left(\alpha+i\frac{\omega}{c}\right)^2]C_1+[\gamma_{22}\omega^2+$$
$$+\tilde{\sigma}_{22}G^2\left(\alpha+i\frac{\omega}{c}\right)^2]C_2=0$$

Здесь $\tilde{\sigma}_{11}=\frac{\tilde{\mu}}{H}$ – упругий оператор, $\tilde{\sigma}_{12}=\frac{\tilde{Q}}{H}$ и $\tilde{\sigma}_{22}=\frac{\tilde{R}}{H}$ – оператор коэффициентов Q и R.

Решая однородную систему (4), получим биквадратное уравнение относительно $\left(\alpha+i\frac{\omega}{c}\right)$:

$$\left(\tilde{\sigma}_{11}\tilde{\sigma}_{22}-\tilde{\sigma}_{12}^2\right)G^4\left(\alpha+i\frac{\omega}{c}\right)^4+\left(\gamma_{11}\tilde{\sigma}_{22}+\gamma_{22}\tilde{\sigma}_{11}-\right.$$
$$\left.-2\gamma_{12}\tilde{\sigma}_{12}\right)G^2\left(\alpha+i\frac{\omega}{c}\right)^2+\alpha\omega^4=0, \quad (5)$$
$$\alpha=\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2$$

Упругий оператор $\tilde{\sigma}_{11}$ выразим через ядро последействия Абеля, который в пространстве Фурье выражается формулой (4):

$$\tilde{\sigma}_{11}(\omega)=\left\{J_\infty\left[1+\nu_\mu\frac{1}{(i\omega\tau)^\gamma}\right]\right\}^{-1}, \quad (6)$$
$$\nu_\mu=\frac{J_\infty-J_0}{J_\infty},\quad 0<\gamma\le 1$$

где τ – время ретардации, ω – частота, J_∞ – нерелаксированное значение податливости; J_0 – релаксированное значение податливости; γ – параметр дробности, учитывающий структурные изменения, связанные с различными видами обработки и эксплуатации материалов. Операторы $\tilde{\sigma}_{12}$ и $\tilde{\sigma}_{22}$ в данной задаче равны коэффициентам σ_{12} и σ_{22}.

С учетом (6) уравнение (5) запишем в виде:

$$\left(\gamma_1-i\gamma_2\right)G^4\left(\alpha+i\frac{\omega}{c}\right)^4+\left(\Gamma_1+i\Gamma_2\right)\cdot$$
$$\cdot G^2\omega^2\left(\alpha+i\frac{\omega}{c}\right)^2+\alpha\omega^4=0 \quad (7)$$
$$\Gamma_1=\gamma_{11}\sigma_{22}+\gamma_{22}d_1-2\gamma_{12}\sigma_{12},$$
$$\Gamma_2=\gamma_{22}d_2$$
$$d_1=\frac{1}{k}\left[(\omega\tau)^\gamma+\nu_\mu\cos\frac{\pi\gamma}{2}\right],$$
$$d_2=\frac{1}{k}\nu_\mu\sin\frac{\pi\gamma}{2}$$

$$k = J_\infty \left[(\omega\tau)^\gamma + 2\nu_\mu \cos\frac{\pi\gamma}{2} + \nu_\mu^2 (\omega\tau)^{-\gamma} \right]$$

$$\gamma_1 = \sigma_{22} d_1 - \sigma_{12}^2, \quad \gamma_2 = \sigma_{22} d_2$$

Для получения характеристик звуковых волн разделим (7) на $\left(\alpha + i\dfrac{\omega}{c}\right)^2$ и введем обозначение:

$$z^* = \frac{1}{\left(\alpha + i\dfrac{\omega}{c}\right)^2} \tag{8}$$

где z^* – комплексное число.

Тогда (7) сводится к квадратному уравнению относительно z^*:

$$\alpha\omega^4 z^{*2} + (\Gamma_1 + i\Gamma_2) G^2 \omega^2 z^* + (\gamma_1 + i\gamma_2)^4 = 0 \tag{9}$$

Из (9) находим:

$$z^* = -\frac{G}{2\alpha\omega^2}(b_1 + ib_2) \tag{10}$$

$$b_1 = \Gamma_1 \pm \sqrt{r_1} \cos\frac{\varphi_1}{2}, \quad b_2 = \Gamma_2 \pm \sqrt{r_1} \sin\frac{\varphi_1}{2}$$

$$r_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad \varphi_1 = arctg\frac{a_2}{a_1}, \quad 0 \le \varphi_1 \le \frac{\pi}{2}$$

$$a_1 = \Gamma_1^2 - \Gamma_2^2 - 4\alpha\gamma_1, \quad a_2 = 2(\Gamma_1\Gamma_2 - 2\alpha\gamma_2)$$

Из (10) следует, что в двухкомпонентной среде существует два типа звуковых волн.

Отсюда с учетом (8) имеем:

$$\alpha + i\frac{\omega}{c} = i\sqrt{\frac{2\alpha\omega^2}{G^2(b_1^2 + b_2^2)}}\sqrt{b_1 - ib_2} \tag{11}$$

$$\alpha + i\frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{G}\sqrt{\frac{2\alpha}{r_2}}\left(\sin\frac{\varphi_2}{2} + i\cos\frac{\varphi_2}{2}\right) \tag{12}$$

$$r_2 = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, \quad \varphi_2 = arctg\frac{\Gamma_2 \pm \sqrt{r_1}\sin\dfrac{\varphi_1}{2}}{\Gamma_1 \pm \sqrt{r_1}\cos\dfrac{\varphi_1}{2}}, \tag{13}$$

$$0 \le \varphi_2 \le \frac{\pi}{2}$$

Равенство (12) позволяет определить характеристики звуковых волн:

- скорость

$$c = G\sqrt{\frac{r_2}{2\alpha}}\sec\frac{\varphi_2}{2} \tag{14}$$

- коэффициент затухания

$$\alpha = \frac{\omega}{G}\sqrt{\frac{2\alpha}{r_2}}\sin\frac{\varphi_2}{2} \tag{15}$$

- тангенс угла механических потерь

$$\mathrm{tg}\varphi_2 = \frac{\Gamma_2 \pm \sqrt{r_1}\sin\dfrac{\varphi_1}{2}}{\Gamma_1 \pm \sqrt{r_1}\cos\dfrac{\varphi_1}{2}} \tag{16}$$

Коэффициент затухания звуковых волн можно выразить через скорость распространения волны, используя (14):

$$\alpha = \frac{\omega}{c} tg\frac{\varphi_2}{2} \tag{17}$$

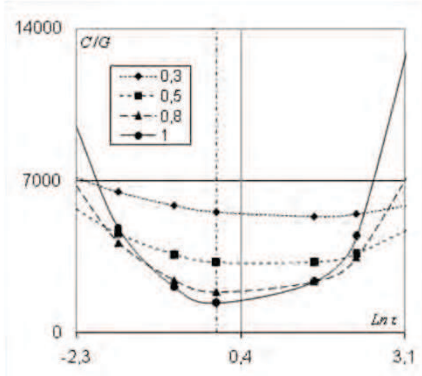

Рисунок 1. Зависимость скорости распространения звуковых волн от температуры

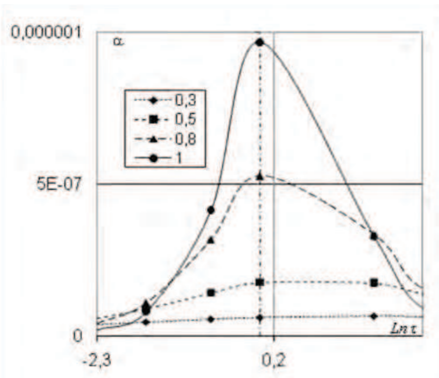

Рисунок 2. Зависимость коэффициента затухания распространения звуковых волн от температуры

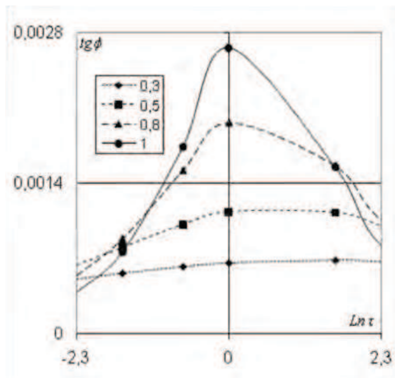

Рисунок 3. Зависимость тангенса угла механических потерь от температуры

На рисунках 1-3 показаны зависимости скорости, коэффициента затухания и тангенса угла механических потерь от логарифма температуры при следующих данных: $J_\infty = 1$, $\nu_\mu = 1$, $\sigma_{12} = 0.05$, $\sigma_{22} = 0.5$, $\gamma_{11} = 0.9$, $\gamma_{12} = -0.025$, $\gamma_{22} = 0.15$, $\omega = 1$. На каждом из графиков изображены четыре кривые для четырех значений параметра дробности γ. Сами значения параметра γ указаны на рисунках

.

ЛИТЕРАТУРА

1 Био М.А. Теория распространения упругих волн в насыщенной водой пористой среде. I. Диапазон низких частот // Акуст. общество. Америка. 1956. Т. 28. № 2. С. 168-178.

2 Косачевский Л.Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 6. С. 1115-1123.

3 Масликова Т.И., Поленов В.С. О распространении нестационарных упругих волн в однородных пористых средах // Известия РАН. МТТ. 2005. № 1. С. 104-108.

4 Зеленев В.И., Поленов В.С. О прохождении нормально падающей поперечной звуковой волны через вязкоупругий слой // Труды НИИ математики ВГУ. 1970. Вып. 2. С. 92-100.

REFERENCES

1 Biot M.A. Theory propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid I. Low-Frequency Range. J. Acoust. Soc. America, 1956, vol. 28, no. 2, pp. 168-178.

2 Kosahevskii L.Ya. Propagation of elastic waves in two-component medium. *PMM.* [Applied math], 1959, vol. 23, issue. 6, pp. 1115-1123. (In Russ.).

3 Maslikova T.I., Polenov V.C. Propagation of transitionals elastic waves in homogeneous porous medium. *Izvestiya RAN*. [Bulletin of RAS], 2005, no. 1, pp. 104-108. (In Russ.).

4 Zelenev V.I., Polenov V.C. Passing normal incident diametrical sonic wave over viscoelastic layer. *Trudy NII matematiki VGU*. [Proceedings of RI mathematician VSU], 1970, issue 2, pp. 92-100. (In Russ.).