

УДК 519.673, 664.649

Профессор А.Н. Остриков, студент И.Н. Столяров

(Воронеж. гос. ун-т инж. технол.) кафедра процессов и аппаратов химических и пищевых производств, тел. (473) 255-38-87

Математическая модель процесса обжарки каштанов перегретым паром

Выполнено математическое моделирование процесса обжарки каштанов перегретым паром. Для описания процесса применены коэффициенты диффузии и термодиффузии. Заданы начальные и граничные условия третьего рода для уравнений теплопроводности и массопереноса.

The mathematic modeling for chestnuts roasting process by superheated steam is conducted. Diffusion and thermal diffusion coefficients are used for process description. Initial conditions and boundary conditions of the third kind for thermal conductivity and mass transfer equations are set.

Ключевые слова: математическая модель, обжарка, каштаны.

Для получения полной картины протекания процесса обжарки, инженерных расчетов и проектирования оборудования важно создание математической модели. Определение рациональных параметров обжарки дает возможность интенсифицировать процесс и снизить энергозатраты.

Рассмотрим математическую модель процесса обжарки перегретым паром плодов каштана европейского, разрезанных на кубики с размером $a = 3 \dots 5$ мм. Она может быть рассмотрена для слоя частиц, имеющих форму куба с эквивалентным диаметром $d_{\text{экв}}$. Принимая это допущение, эквивалентный диаметр частицы определяем по формуле:

$$d_{\text{экв}} = 2a_c \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}, \quad (1)$$

где a_c – линейный размер частицы каштана, м.

Основной задачей изучения теплопроводности и диффузии влаги является изучение пространственно-временного изменения температуры и влагосодержания или температурного поля и поля влагосодержания соответственно в объеме слоя частиц каштана.

Теплоноситель, перегретый пар, представляет собой среду процесса обжарки, температура которой принимается постоянной $T = 473$ К. Частицы каштана в начале процесса обжарки имеют начальную температуру T_n , К, и влагосодержание u_n , кг/кг, равномерно распределенные по объему частицы.

Рассматриваемый процесс обжарки частиц каштана является типичным нестационарным. В условиях взаимодействия частиц твердой фазы с теплоносителем изменяются концентрация влаги и температура в каждой частице как по координатам, так и по времени. Средняя по объему частиц концентрация распределяемого вещества, характеризующаяся влагосодержанием, кг влаги/кг продукта, и температура в каждый момент времени определяются интегралами:

$$U(\tau) = \frac{1}{V} \int_{(V)} U(X, \tau) dV, \\ T(\tau) = \frac{1}{V} \int_{(V)} T(X, \tau) dV, \quad (2)$$

где V – объем частиц, м³; $X = (x, y, z)$ – координата точки в объеме частиц; U – влагосодержание, кг/кг; T – температура, К.

Поскольку распределение температуры и влагосодержания является постоянным по длине и ширине слоя продукта, то координата точки определяется ее высотой: $X = x$.

Рассмотрим процессы теплопереноса от перегретого пара к слою продукта и влагопереноса, протекающего в обратном направлении.

Коэффициент диффузии влаги (коэффициент потенциалопроводности переноса влаги, коэффициент турбулентной теплопроводности), $\text{м}^2/\text{с}$, вычисляется аналогично коэффициенту теплопроводности:

$$a_m = \frac{\lambda_m}{c_m \rho}, \quad (3)$$

где λ_m – коэффициент влагопроводности (турбулентная теплопроводность), $(\text{м}\cdot\text{с})^{-1}$; c_m – коэффициент массоемкости, кг^{-1} .

Коэффициенты диффузии a_m и термодиффузии a_m^T влажных тел связывает относительный коэффициент термодиффузии [1, 2]:

$$\delta = \frac{a_m^T}{a_m} \quad (4)$$

Величины a_m и δ являются функциями влагосодержания и температуры [1, 2]. Рассмотрим частицу каштана как коллоидное капиллярно-пористое тело; связанное вещество жидкость – пар.

$$a_m = a_{mcap} + a_{mk} \quad (5)$$

$$a_m^T = a_{mcap}^T + a_{mk}^T \quad (6)$$

$$\delta = \frac{\delta_{cap} \cdot a_{mcap} + \delta_k \cdot a_{mk}}{a_{mcap} + a_{mk}} \quad (7)$$

До достижения продуктом температуры 373 К (до перехода влаги из жидкого в газообразное состояние) удельная теплоемкость вычисляется по формуле:

$$c = c_0 + c_1 u_1, \quad (8)$$

а после:

$$c = c_0 + c_2 u_2, \quad (9)$$

где c_0 – удельная теплоемкость абсолютно сухого продукта, $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$; c_1 – удельная теплоемкость пара, $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$; c_2 – удельная теплоемкость воды, $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ (обозначение индексов: $i = 1$ – парообразная влага; $i = 2$ – жидкообразная влага).

При описании процесса обжарки каштанов были приняты следующие допущения: частицы каштана рассматриваются в виде куба; геометрическая форма обжариваемого продукта постоянна; начальное распределение темпе-

ратуры и влагосодержания по объему обжариваемого продукта постоянны; плотность потока теплоты и массы постоянны; разбиение на зоны позволяет достигать требуемой точности расчета температуры и влажности продукта.

Начальные условия:

$$T(x, \tau)|_{x=0} = 0,0012\tau^4 + 0,0807\tau^3 - 1,8278\tau^2 + 18,555\tau + 295,39 \quad (10)$$

$$u(x, \tau)|_{x=0} = 8 \cdot 10^{-5} \tau^2 - 0,0195\tau + 0,6813 \quad (11)$$

$$T(x, \tau)|_{\tau=0} = T_n \quad (12)$$

$$u(x, \tau)|_{\tau=0} = u_n \quad (13)$$

Граничные условия третьего рода: для уравнения теплопроводности

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=X(\tau)} = \alpha (T_{np} - T_n) \quad (14)$$

для уравнения массопереноса

$$-a_m \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=X(\tau)} = \beta (T_{np} - T_n) \quad (15)$$

где α – коэффициент теплоотдачи, $\text{Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$; T_{np} , T_n – температуры продукта и перегретого пара, К; β – коэффициент массоотдачи, $\text{м}/\text{с}$:

$$\beta = \frac{\text{Nu } a_m}{d_{\text{экв}}}, \quad (16)$$

где Nu – критерий Нуссельта; $d_{\text{экв}}$ – эквивалентный диаметр частицы каштана, м.

Поскольку течение теплоносителя является ламинарным, то критерий Нуссельта определяется по формуле:

$$\text{Nu} = 0,15 \text{Re}^{0,33} \text{Pr}^{0,43} \text{Gr}^{0,1} \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_{cm}} \right)^{0,25} \varepsilon_l, \quad (17)$$

где Re – критерий Рейнольдса; Pr – критерий Прандтля; Pr_{cm} – критерий Прандтля для теплоносителя при температуре стенки; Gr – критерий Грасгофа; ε_l – коэффициент, зависящий от критерия Рейнольдса, линейного размера частицы и ее эквивалентного диаметра.

$$\text{Pr} = \frac{c_n \mu_n}{\lambda_n}, \quad (18)$$

где c_n – удельная теплоемкость перегретого пара, $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$; μ_n – динамическая вязкость перегретого пара, $\text{Па}\cdot\text{с}$; λ_n – коэффициент теплопроводности перегретого пара, $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$.

$$Gr = \frac{g d_{\text{экв}}^3 \rho_n^2}{\mu_n^2} \beta_n \Delta T, \quad (19)$$

где ρ_n – плотность перегретого пара, кг/м³; β_n – коэффициент температурного расширения перегретого пара, К⁻¹; ΔT – разница температур теплоносителя и стенки, К.

Полученная система уравнений (10-15) представляет собой математическую модель процесса обжарки каштанов.

Поскольку в процессе обжарки продукт изменяется в объеме, задачу (14-15) необходимо рассматривать, как задачу с подвижными границами [3, 4]. Вследствие усадки продукта высота его слоя h , м, изменяется в зависимости от времени τ , с, по следующему закону:

$$h = (2 \cdot 10^{-6} \tau^2 - 0,0121\tau + 30,8) \cdot 10^{-3}. \quad (20)$$

Влагоперенос парообразной ($i=1$) и жидкообразной ($i=2$) влаги описывается следующими соотношениями [1, 2]:

$$\vec{j}_i = a_{mi} \rho_0 \nabla u - a_{mi}^T \rho_0 \nabla T = -a_{mi} \rho_0 (\nabla u + \delta_i \nabla T) \quad i = 1, 2, \quad (21)$$

а суммарный перенос пара и влаги равен:

$$\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 = -a_m \rho_0 \nabla u - a_m^T \rho_0 \nabla T = -a_m \rho_0 (\nabla u + \delta \nabla T). \quad (22)$$

Следовательно, система дифференциальных уравнений массопереноса будет иметь вид:

$$\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} = -\text{div} \vec{j}_1 + J_1, \quad (23)$$

$$\rho_0 \frac{\partial u_2}{\partial \tau} = -\text{div} \vec{j}_2 + J_2, \quad (24)$$

Суммируя (23) и (24), получаем:

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\text{div} \vec{j}_1 - \text{div} \vec{j}_2, \quad (25)$$

Подставив вместо $\vec{j}_1$ и $\vec{j}_2$ соответствующие выражения, получим:

$$\rho_0 \frac{\partial u_2}{\partial \tau} = -\text{div} [a_{m1} \rho_0 \nabla u + a_{m1}^T \rho_0 \nabla T] + \text{div} [a_{m2} \rho_0 \nabla u + a_{m2}^T \rho_0 \nabla T] \quad (26)$$

Дифференциальное уравнение переноса теплоты будет иметь вид:

$$c \rho_0 \frac{\partial T}{\partial \tau} = \text{div} (\lambda \nabla T) + r_{12} J_{12} - \sum_i c_i \vec{j}_i \nabla T, \quad (27)$$

где r_{12} – теплота парообразования, Дж/(кг·К).

Источник жидкости $J_2 = J_{12}$ определяется из уравнения (25), для чего полагаем $\partial u_1 / \partial \tau = 0$:

$$J_2 = J_{12} = -J_1 = -\text{div} \vec{j}_1. \quad (28)$$

Следовательно:

$$c \rho_0 \frac{\partial T}{\partial \tau} = \text{div} (\lambda \nabla T) + r_{12} \text{div} (a_{m1} \rho_0 \nabla u + a_{m1}^T \rho_0 \nabla T) - \sum_i c_i \vec{j}_i \nabla T \quad (29)$$

Для зональной системы расчета [5], когда для каждого интервала (зоны) u и T коэффициенты переноса λ , a_{m1} , a_{m2} , a_{m1}^T , a_{m2}^T полагаем постоянными, система дифференциальных уравнений тепломассопереноса будет иметь вид:

$$\frac{du}{d\tau} = a_m \nabla^2 u + a_m^T \nabla^2 T = a_m [\nabla^2 u + \delta \nabla^2 T] \quad (30)$$

$$\frac{dT}{d\tau} = \left(a + a_{m1} \frac{r_{12}}{c} \right) \nabla^2 T + a_{m1} \frac{r_{12}}{c} \nabla^2 u - \left[(c_1 a_{m1} + c_2 a_{m2}) \nabla u + (c_1 a_{m1}^T + c_2 a_{m2}^T) \nabla T \right] \frac{\nabla T}{c} \quad (31)$$

Так как перенос вещества происходит только в одном направлении, то градиент будет являться дифференциалом по координате x :

$$\frac{du}{d\tau} = a_m \frac{d^2}{dx^2} u + a_m^T \frac{d^2}{dx^2} T = a_m \left[\frac{d^2}{dx^2} u + \delta \frac{d^2}{dx^2} T \right] \quad (32)$$

$$\frac{dT}{d\tau} = \left(a + a_{m1} \frac{r_{12}}{c} \right) \frac{d^2}{dx^2} T + a_{m1} \frac{r_{12}}{c} \frac{d^2}{dx^2} u - \left[(c_1 a_{m1} + c_2 a_{m2}) \frac{du}{dx} + (c_1 a_{m1}^T + c_2 a_{m2}^T) \frac{dT}{dx} \right] \frac{dT}{c} \quad (33)$$

Дифференциалы, расписанные через правые конечно-разностные отношения:

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta t} \quad (34)$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} \quad (35)$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (36)$$

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t} \quad (37)$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (38)$$

Поставленная задача может быть решена методом конечно-разностной схемы, реализуемым через метод сетки. Это требует разработки программного модуля расчета, что позволяют сделать современные среды, применяемые для моделирования (Maple, MathCAD, Matlab).

Используя приведенные выше переходы от дифференциальных уравнений к записи уравнений в конечно-разностной форме, исходные дифференциальные уравнения (7), (8) преобразуют к виду:

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1,k} - u_{n,k}}{\Delta t} &= a_m \frac{u_{n,k+1} - 2u_{n,k} + u_{n,k-1}}{\Delta x^2} + \\ &+ a_m^T \frac{T_{n,k+1} - 2T_{n,k} + T_{n,k-1}}{\Delta x^2} = \\ &= \frac{u_{n,k+1} - 2u_{n,k} + u_{n,k-1}}{\Delta x^2} a_m + \\ &+ \delta a_m \frac{T_{n,k+1} - 2T_{n,k} + T_{n,k-1}}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \frac{T_{n+1,k} - T_{n,k}}{\Delta t} &= \left(a + a_{m1} \frac{r_{12}}{c} \right) \frac{T_{n,k+1} - 2T_{n,k} + T_{n,k-1}}{\Delta x^2} + \\ &+ a_{m1} \frac{r_{12}}{c} \frac{u_{n,k+1} - 2u_{n,k} + u_{n,k-1}}{\Delta x^2} - \\ &- (c_1 a_{m1} + c_2 a_{m2}) \left(\frac{u_{n,k+1} - u_{n,k}}{\Delta x} \right) \frac{T_{n,k+1} - T_{n,k}}{c} - \\ &- (c_1 a_{m1}^T + c_2 a_{m2}^T) \left(\frac{T_{n,k+1} - T_{n,k}}{\Delta x} \right) \frac{u_{n,k+1} - u_{n,k}}{c} \end{aligned} \quad (40)$$

где n – шаг разбиения по времени; k – шаг разбиения по координате.

После выражения из уравнений (39), (40) значений влагосодержания и температуры на следующем шаге квантования по времени через предыдущий получим:

$$\begin{aligned} u_{n+1,k} &= u_{n,k} + a_m dt \frac{u_{n,k+1} - 2u_{n,k} + u_{n,k-1}}{dx^2} + \\ &+ a_m^T dt \frac{T_{n,k+1} - 2T_{n,k} + T_{n,k-1}}{dx^2} \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} T_{n+1,k} &= T_{n,k} + dt \left(a + a_{m1} \frac{r_{12}}{c} \right) \frac{T_{n,k+1} - 2T_{n,k} + T_{n,k-1}}{dx^2} + \\ &+ dt a_{m1} \frac{r_{12}}{c} \frac{u_{n,k+1} - 2u_{n,k} + u_{n,k-1}}{dx^2} - \\ &- (c_1 a_{m1} + c_2 a_{m2}) \left(\frac{u_{n,k+1} - u_{n,k}}{dx} \right) \frac{(T_{n,k+1} - T_{n,k}) dt}{dx c} - \\ &- (c_1 a_{m1}^T + c_2 a_{m2}^T) \left(\frac{T_{n,k+1} - T_{n,k}}{dx} \right) \frac{(u_{n,k+1} - u_{n,k}) dt}{dx c} \end{aligned} \quad (42)$$

В полученных дифференциальных уравнениях температура и влагосодержание представлены в безразмерном виде, т. е. определяются как отношение текущей величины к ее начальному значению ($T_n = 293$ К; $u_n = 0,43$ кг/кг).

На термодинамические характеристики процесса оказывает влияние температура продукта [1]:

$$a_m = 2,1 \cdot 10^{-15} T_{n,k}^3 \quad (43)$$

$$a_{m1} = 0,3 \cdot 10^{-19} T_{n,k}^3 \quad (44)$$

Зависимости коэффициентов температуропроводности a и теплопроводности λ от температуры T выведены эмпирически.

Значения теплофизических характеристик каштанов для интервала температур 293...353 К:

при $u_n = 0,43$ кг/кг:

$$\lambda = 0,137 + 0,0002t; \quad (45)$$

$$a = (4,08 + 0,0037t) \cdot 10^{-8}. \quad (46)$$

при $u_k = 0,04$ кг/кг (обжаренный продукт):

$$\lambda = 0,084 + 0,0002t; \quad (47)$$

$$a = (3,9 + 0,0036t) \cdot 10^{-8}. \quad (48)$$

Коэффициент a_{m2} и относительный коэффициент термодиффузии δ от температуры зависят незначительно [6], поэтому в расчетах они приняты постоянными: $a_{m2} = 0,4 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $\delta = 1,149 \cdot 10^{-3}$.

Влагосодержание оказывает незначительное влияние на термодинамические коэффициенты [7], которым можно пренебречь.

Метод конечно-разностной схемы в явном виде реализуется через метод сетки [3, 8]. Суть метода сетки заключается в том, что вся заданная пространственно-временная область разбивается на равные интервалы времени и пространства через выбранные интервалы дискретизации Δt и Δx , и затем находятся значения интересующего нас параметра в каждом узле сетки. Решение поставленной задачи требует представления исходного дифференциального уравнения в виде конечно-разностных отношений (39), (40).

Значения температуры и влагосодержания на каждом следующем шаге по времени вычисляются по схеме (рисунок 1).

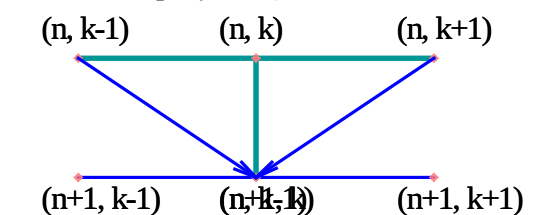


Рисунок 1 – Шеститочечная явная схема

Задача (41–42) представляет собой краевую задачу тепло- и массопроводности с одной статичной и одной движущейся границей [2, 4] и решена с использованием функциональных преобразований методом конечных разностей [9]. Разработан программный модуль расчета процесса обжарки каштанов перегретым паром в системе *Mathcad 15*.

Поверхности, отражающие изменение температуры T , К, и влагосодержания u , кг/кг, по ходу процесса τ , мин, и по слоям продукта, представлены на рисунках 2 и 3.

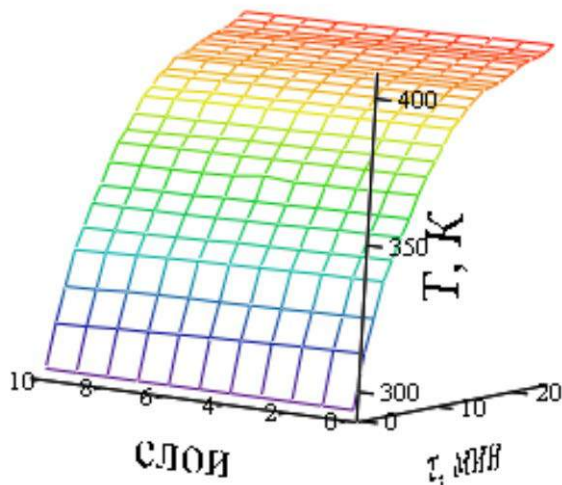


Рисунок 2 - Поверхность изменения температуры по ходу процесса и по слоям продукта

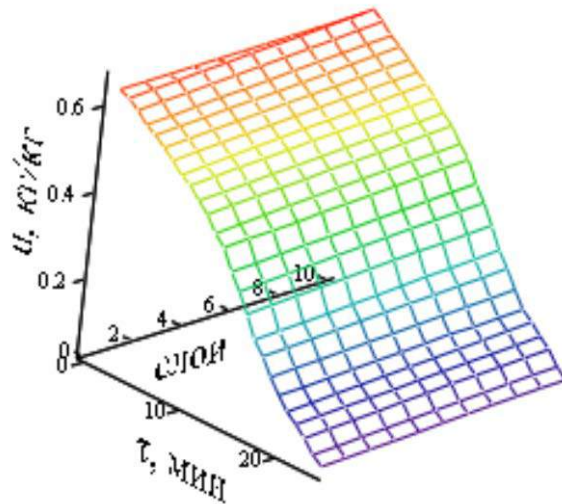


Рисунок 3 - Поверхность изменения влагосодержания по ходу процесса и по слоям продукта

По сравнительному анализу результатов аппроксимации расчетных и экспериментальных данных (рисунки 4, 5) установлено, что их отклонение по абсолютному значению не превышало для температуры 3,5 % и для влагосодержания 11,0 %.

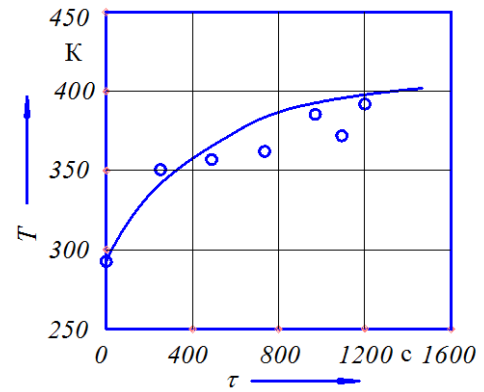


Рисунок 4 - Термограмма тепломассопереноса при обжарке каштанов: сравнение расчетных (—) и экспериментальных (o) данных при обжарке перегретым паром, $T_{II} = 473$ К; $q_{II} = 9,8$ кг/м²; $v = 1,3$ м/с

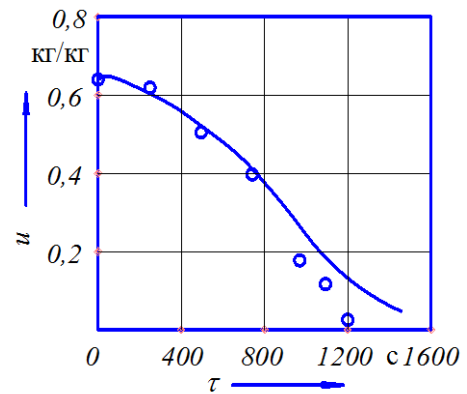


Рисунок 5 - Кривая обжарки каштанов: сравнение расчетных (—) и экспериментальных (o) данных при обжарке перегретым паром, $T_{II} = 473$ К; $q_{II} = 9,8$ кг/м²; $v = 1,3$ м/с

Таким образом, полученные результаты моделирования с достаточной для инженерных расчетов точностью отражают кинетические закономерности процесса обжарки каштанов перегретым паром как объекта с распределенными параметрами и могут быть использованы для анализа протекающих физико-химических изменений, расчета процесса, проектирования обжарочных аппаратов и разработки программно-логических алгоритмов управления технологическими параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Лыков, А.В. Тепломассообмен [Текст] / А.В. Лыков. – М.: Энергия, 1978. – 479 с.
- 2 Лыков, А. В. Теория сушки [Текст] / А.В. Лыков. – М.: Энергия, 1968. – 470 с.
- 3 Грачев, Ю. П. Моделирование и оптимизация тепло- и массообменных процессов пищевых производств [Текст] / Ю.П. Грачев, А.К. Тубольцев, В.К. Тубольцев. – М.: Легкая и пищевая промышленность, 1984. – 216 с.

4 Остапчук, Н.В. Основы математического моделирования процессов пищевых производств [Текст] / Н. В. Остапчук. – Киев: Выща школа, 1991. – 368 с.

5 Самарский, А.А. Численные методы [Текст] / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

6 Baehr, H.D. Heat and mass-transfer [Text] / H.D. Baehr, K. Stephan. – Berlin: Springer, 2011. – 688 p.

7 Dhole, S.D. Numerical study on the forced convection heat transfer from an isothermal and isoflux sphere in the steady symmetric flow regime [Text] / S.D. Dhole, R.P. Chhabra, V.A. Eswaran // International Journal of Heat and Mass Transfer. –2006. - V. 49. – P. 984-994.

8 Добкин, В.М. Системный анализ в управлении [Текст] / В. М. Добкин. – М.: Химия, 1984. – 224 с.

9 Кондратов, А.П. Основы физического эксперимента и математическая обработка результатов измерений [Текст] / А.П. Кондратов. – М.: Атомиздат, 1977. – 196 с.

REFERENCES

1 Lykov, A.V. Heat-mass-exchange [Text] / A.V. Lykov. – М.: Energiya, 1978. – 479 p.

2 Lykov, A.V. Theory of drying [Text] / A.V. Lykov. – М.: Energiya, 1968. – 470 p.

3 Grachev, U.P. Modeling and optimization of heat- mass-exchange process of food industry [Text] / U.P. Grachev, A.K. Tuboltsev, V.K. Tuboltsev. – М.: Legkaya pishevaya promyshlennost, 1984. – 216 p.

4 Ostapchuk, N.V. Fundamentals of process of food industries mathematic modeling [Text] / N.V. Ostapchuk. – Kiev: Vysha shkola, 1991. – 368 p.

5 Samarsky, A.A. Numerical methods [Text] / A. A. Samarsky, A. V. Gulin. – М.: Nauka, 1989. – 432 p.

6 Baehr, H.D. Heat and mass-transfer [Text] / H.D. Baehr, K. Stephan. – Berlin: Springer, 2011. – 688 p.

7 Dhole, S.D. Numerical study on the forced convection heat transfer from an isothermal and isoflux sphere in the steady symmetric flow regime [Text] / S.D. Dhole, R.P. Chhabra, V.A. Eswaran // International Journal of Heat and Mass Transfer. –2006. - V. 49. – P. 984-994.

8 Dobkin, V.M. System analysis in control [Text] / V. M. Dobkin. –М.: Khimiya, 1984. -224 p.

9 Kondratov, A.P. Fundamentals of physical experiment and mathematical processing of measurement results [Text] / A.P. Kondratov. – М.: Atomizdat, 1977. – 196 p.