

УДК 664.8/9

Профессор В.Е. Куцакова, доцент Т.В. Шкотова,  
аспирант С.В. Ефимова

(Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Институт холода и биотехнологий) кафедра технологии мясных, рыбных продуктов и консервирования холодом.  
тел. (812) 571-80-16

профессор С.В. Фролов

(Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Институт холода и биотехнологий) кафедра математики.  
тел. (812) 572-21-59

E-mail: vekprof@mail.ru

Professor V.E. Kutsakova, associate Professor T.V. Shkotova,  
graduate S.V. Efimova

(St. Petersburg State university of information technologies, mechanics and optics, Institute of biotechnology and cold) Department of technology of meat, fish products and cold canning.  
tel (812) 571-80-16

professor S.V. Frolov

(St. Petersburg State university of information technologies, mechanics and optics, Institute of biotechnology and cold) Department of mathematics.  
tel (812) 572-21-59

E-mail: vekprof@mail.ru

## Расчет продолжительности термообработки и замораживания хлебобулочных изделий с начинкой

## Calculation of the heat treatment and freezing of bakery products with filling

Реферат. Хлебобулочные изделия относятся к продуктам повседневного спроса. Качество хлебобулочных изделий напрямую зависит от продолжительности выпечки. Момент готовности изделий на хлебопекарных предприятиях до настоящего времени определяется экспериментально. Наличие же теоретических зависимостей продолжительности выпечки от режимных параметров позволит оптимизировать как процесс выпечки, так и качество готового изделия. На сегодняшний день отсутствуют методы расчета времени выпекания таких сложных многослойных объектов, как хлебобулочные изделия с начинкой. В данной статье предложены методы расчета продолжительности выпечки хлебобулочных изделий с начинкой на примере пирожка. Расчетные и экспериментальные значения времени выпечки совпадают с погрешностью в пределах 5-7 %. Предлагаемые методы обладают свойством общности и могут быть использованы для всех видов симметричных многослойных изделий. Рынок хлебобулочных изделий за последние годы перераспределился, появилось новое направление в хлебопечении - производство замороженных хлебобулочных изделий различных рецептур. Следует отметить, что на сегодняшний день в состав начинок хлебобулочных изделий вносятся разнообразные влагосвязывающие добавки растительного и животного происхождения, вследствие чего увеличивается доля связанной влаги в начинке, что в свою очередь приводит к уменьшению (в некоторых случаях значительному) криоскопической температуры продукта и соответственно уменьшению времени замораживания изделия. Существующие на данный момент расчетные соотношения для расчета продолжительности замораживания не учитывают данный факт, что ведет к увеличению энергозатрат на производство данного вида продукции. В данной статье представлен метод решения и расчетные соотношения для определения продолжительности замораживания хлебобулочных изделий с начинками, с учетом влияния снижения криоскопической температуры начинки на примере пирожка. Расчетные и экспериментальные значения продолжительности замораживания совпадают с погрешностью менее 8 %. Предлагаемые методы обладают свойством общности и могут быть использованы для всех видов многослойных симметричных изделий.

Summary. Bakery products are used on a daily basis. The quality of bakery products directly depends on the duration of baking. Today bread-baking enterprises have no direct guidelines on determining when the product is ready. Certain theoretical guidelines to determine the baking time depending on operating parameters would considerably improve both the baking itself and the quality of the end product. To date there have not been established any methods of calculating the time needed to bake such complex multi-layered food as bakery products with filling. This article features the methods of calculating the baking time when it comes to products with filling, e. g. buns. The inaccuracy of calculating the baking time within the experiment comes to 5-7 %. The suggested methods are general in nature and, therefore, can be applied for all kinds of symmetric multi-layer products. In recent years the market of bakery products has been reshaped, that is a new sector has entered the market, namely the production of frozen pastry of various recipes. It should be noted that to date fillings for bakery products contain numerous water binding additives of plant and animal origin, which results in increasing the share of the bound water in a filling, which in turn decreases (in some cases rather significantly) the cryoscopic temperature of a bakery product and, accordingly, reduces the time needed to freeze such a product. The existing schemes to calculate the freezing time do not take into account that this method leads to the increased consumption of energy needed to make such a product. The article presents the solution, which is the calculation of the freezing time of bakery products with filling considering the decreasing cryoscopic temperature of a filling of a bakery product, e. g. that of a bun. The inaccuracy of calculating the freezing time within the experiment comes to less than 8 %. The suggested methods are general in nature and, therefore, can be applied for all kinds of symmetric multi-layer products.

*Ключевые слова:* продолжительность выпекания, продолжительность замораживания, двухслойное тело, пирожок, начинка.

*Keywords:* duration of baking, duration of freezing, two-layer body, pie, filling.

© Куцакова В.Е., Шкотова Т.В.,  
Ефимова С.В., Фролов С.В., 2014

Расчет продолжительности термообработки и замораживания хлебобулочных изделий с начинкой рассмотрен на примере процесса выпекания и замораживания пирожков с начинкой. Пирожки – одно из самых любимых блюд в многонациональной кухне России. Практически каждый предпочитает пирожки из теста с начинками другим видам изделий. Пирожки могут быть приготовлены практически из любого теста: дрожжевого сдобного, простого, слоено-дрожжевого, бездрожжевого, слоеного и др. При этом начинки могут быть самыми разными: мясными, мясо-овощными, мясо-крупяными, овощными, фруктовыми, грибными и др. Как правило, пирожки делают небольшими (50–100 г), что удобно для их употребления в любых условиях: при застольях, «на ходу» и т.п.[1]. Пирожки выпускают как в выпеченном, так и в замороженном виде. Технология производства пирожков включает ряд операций, основными из которых, во многом определяющими качество и выход готовых изделий, являются выпечка и замораживание. В настоящее время отсутствуют методы расчета времени выпекания и замораживания таких сложных многослойных структур.

Для расчета времени выпекания представим пирожок как квазидномерное тело, форма которого учитывается введением в расчетные соотношения коэффициента формы. Пирожок является составным телом, включающим тестовую оболочку и начинку. Теплопроводность начинки и тестовой оболочки соответственно  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , Вт/(м<sup>0</sup>С); температуропроводность  $a_1$  и  $a_2$  м<sup>2</sup>/с, соответственно. Так как в процессе выпечки значения удельной теплопроводности и коэффициента температуропроводности теста и выпеченного продукта различаются не существенно, в последующих расчетах приняты их осредненные значения. Внешний характерный размер тела -  $R$ , м; размер начинки -  $R_1$  соответственно. В начальный момент времени  $\tau = 0$  тело, имеющее температуру  $T_b$ , погружается в духовой шкаф с температурой воздушной среды  $T_0$ . К поверхности продукта от окружающей среды посредством конвекции подводится теплота с коэффициентом теплоотдачи  $\alpha$ . Физико-математическая модель процесса представлена ниже:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \tau} = a_1 \left( \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{k}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right); T_1(r, 0) = T_b; \left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \tau} = a_2 \left( \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{k}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} \right); T_2(r, 0) = T_b; \quad (2)$$

$$-\lambda_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial r} \right|_{r=R} = \alpha (T_2|_{r=R} - T_0)$$

$$T_1(R_1, \tau) = T_2(R_1, \tau); -\lambda_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=R_1} = -\lambda_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial r} \right|_{r=R_1} \quad (3)$$

Здесь  $r$  – координата поперёк тела, м ( $r = 0$  отвечает центру тела,  $r = R_1$  – границе теста и начинки и  $r = R$  – внешней границе тела);  $k$  – безразмерный коэффициент, учитывающий форму тела и определяющийся как  $k = SR/V - 1$ , где  $V$  – объём тела, м<sup>3</sup>, а  $S$  – площадь его поверхности, м<sup>2</sup>.

Уравнения (1) и (2) представляют собой уравнение теплопроводности с начальным и граничным условием в центре и краевым условием на границе соответственно для начинки и тестовой оболочки. Уравнение (3) описывает граничные условия на границе начинки и тестовой оболочки – равенство температур и тепловых потоков.

Представленная задача допускает точное решение в терминах функций Бесселя и Неймана, что затруднительно и требует обширных численных расчётов. Для практических целей удобнее иметь приближённые простые и явные расчетные соотношения.

Ранее, в работе [2], воспользовавшись прямым вариационным методом, были получены такие формулы для однородного тела [3]. В данной работе обобщен предложенный ранее метод применительно к двухслойному телу.

Осуществим переход к безразмерным переменным:

$$\theta_{1,2} = \frac{T_{1,2} - T_0}{T_b - T_0}; Fo = \frac{a_2 \tau}{R^2}; \rho = \frac{r}{R}; Bi = \frac{\alpha R}{\lambda_2};$$

$$\xi = \frac{a_1}{a_2}; \psi = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

В безразмерных переменных уравнения (1) – (3) выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial Fo} = \xi \left( \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \rho^2} + \frac{k}{\rho} \frac{\partial \theta_1}{\partial \rho} \right); \left. \frac{\partial \theta_1}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} = 0; \theta_1(\rho, 0) = 1;$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \rho^2} + \frac{k}{\rho} \frac{\partial \theta_2}{\partial \rho};$$

$$-\left. \frac{\partial \theta_2}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = Bi \theta_2(1, Fo); \theta_2(\rho, 0) = 1;$$

$$\theta_1(\rho_1, \tau) = \theta_2(\rho_1, \tau); \psi \frac{\partial \theta_1}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_1} = \frac{\partial \theta_2}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_1} \quad (4)$$

Разделим переменные в уравнениях (4):

$$\theta_1(\rho, \tau) = \Sigma_1(\rho) \exp(-\omega F_0);$$

$$\theta_2(\rho, F_0) = \Sigma_2(\rho) \exp(-\omega F_0)$$

Функцию, зависящую от координат, представим следующим образом:

$$\xi \left( \frac{\Sigma_1''}{\Sigma_1} + \frac{k \Sigma_1'}{\rho \Sigma_1} \right) = -\omega; \frac{\Sigma_1''}{\Sigma_1} + \frac{k \Sigma_1'}{\rho \Sigma_1} = -\omega \quad (5)$$

Согласно вариационному принципу [3] наименьшее собственное число задачи (5) равно абсолютному минимуму функционала:

$$\omega_1 = \text{MIN} \frac{\int_0^{\rho_1} \left( \rho^k \Sigma_1' \right)' \Sigma_1 d\rho - \int_0^{\rho_1} \left( \rho^k \Sigma_2' \right)' \Sigma_2 d\rho}{\int_0^{\rho_1} \rho^k \Sigma_1^2 d\rho + \int_0^{\rho_1} \rho^k \Sigma_2^2 d\rho} \quad (6)$$

Минимум (6) ищется на функциях, удовлетворяющих граничным условиям (4). Приближённый метод решения задачи заключается в том, что минимум (6) ищется на функциях простого вида, аппроксимирующих истинное решение задачи. Следуя [2], будем искать минимум на функциях степенного вида:

$$\Sigma_1(\rho) = 1 - c\rho^d; \Sigma_2(\rho) = 1 - a\rho^b \quad (7)$$

Подставляя функции (7) в граничные условия (4), получим:

$$a = \frac{Bi}{Bi+b}; d = \frac{b}{\psi}; c = \frac{Bi}{Bi+b} \rho_1^{b-b/\psi} \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7) и далее в (6) и производя интегрирование, получим:

$$\omega_1 \approx \text{MIN} \frac{\xi \frac{Bib(b/\psi + k - 1)}{(Bi+b)\psi} \left[ \frac{\rho_1^{b+k-1}}{b/\psi + k - 1} - \frac{Bi}{Bi+b} \frac{\rho_1^{2b+k-1}}{2b/\psi + k - 1} \right] + \frac{\rho_1^{k+1}}{k+1} - \frac{2Bi}{Bi+b} \frac{\rho_1^{b+k+1}}{b/\psi + k + 1} + \frac{Bi^2}{(Bi+b)^2} \frac{\rho_1^{2b+k+1}}{2b/\psi + k + 1}}{\frac{1 - \rho_1^{k+1}}{k+1} - \frac{2Bi}{Bi+b} \frac{1 - \rho_1^{b+k+1}}{b+k+1} + \frac{Bi^2}{(Bi+b)^2} \frac{1 - \rho_1^{2b+k+1}}{2b+k+1}} \quad (9)$$

Далее находим минимум выражения (9) по переменной  $b$ . Для этого воспользуемся найденным в [2] значением  $b$  для однородного тела, так как это значение зависит только от константы  $k$ , то есть только от формы тела (и никак не связано с его теплофизическими параметрами):

$$b = \frac{\sqrt{2k+6} - k + 1}{2} \quad (10)$$

Подстановка (10) в (9) позволяет приближённо определить первый корень характеристического уравнения, а, следовательно, темп нагревания тела. Далее, для расчёта продолжительности нагревания необходимо знать константу  $A$  [2], [3], которая зависит от координаты, в которой измеряется температура. В случае выпекания пирожка такой точкой является граница между тестовой оболочкой и начинкой. Примерно в этой области находится термический центр тела, то есть точка, температура в которой численно равна среднеобъёмной – в [3] показано, что термический центр находится в точке:

$$\rho^* = \sqrt{\frac{k+1}{k+3}}$$

Также в [2] и [3] показано, что при не очень высоких числах Био, какие бывают при условиях выпекания пирожков в воздушной среде, коэффициент  $A$  для среднеобъёмной температуры практически равен единице. Таким образом, продолжительность нагревания до заданной температуры  $T$  в необходимой нам точке может быть определена как:

$$\tau \approx \frac{R^2}{a_2 \omega_1} \ln \left\{ \frac{T_b - T_0}{T - T_0} \right\} \quad (11)$$

Полученные расчетные соотношения обладают свойством общности и могут быть использованы для всех видов многослойных изделий.

Рассмотрим расчет времени выпечки на примере пирожка с черничной начинкой. Определяющий размер пирожка (половина толщины) составляет  $R = 0,021$  м; толщина начинки  $R_1 = 0,012$  м. Коэффициент, учитывающий форму тела  $k = 1,22$ . Параметры тестовой оболочки и начинки следующие [4]: для теста  $\lambda_2 = 0,26$  Вт/(м<sup>0</sup>С) и  $a_2 = 18,2 \cdot 10^{-8}$  м<sup>2</sup>/с; для начинки (черничная)  $\lambda_1 = 0,414$  Вт/(м<sup>0</sup>С) и  $a_1 = 19,5 \cdot 10^{-8}$  м<sup>2</sup>/с. Начальная температура  $T_b = 24,3$ °С, температура в духовом шкафу  $T_0 = 230$ °С, температура на границе теста и начинки в конце выпечки  $T = 81$  °С. Коэффициент теплоотдачи  $\alpha = 7,82$  Вт/(м<sup>2</sup>°С);  $Bi = 0,63$ ;  $\psi = 1,6$ ;  $\rho_1 = 0,57$ ;  $\xi = 1,07$ ;  $b = 1,39$ ;  $\omega_1 = 1,32$ ; тогда  $\tau = 588$  с = 9,8 мин

Расчетные и экспериментальные значения времени выпечки совпадают с погрешностью в пределах 5-7 %.

Далее рассмотрим кинетические закономерности замораживания пирожка с начинкой. Следует отметить что, в настоящее время в состав начинок хлебобулочных изделий вносятся разнообразные влагосвязывающие добавки, вследствие чего увеличивается доля связанной влаги в начинке, что в свою очередь приводит к уменьшению (в некоторых случаях значительному) криоскопической температуры продукта и, соответственно, уменьшению времени замораживания изделия.

Пирожок представляет собой двухслойное изделие: слой теста толщиной  $D$  снаружи и начинкой внутри. Тесто имеет следующие теплофизические характеристики: плотность  $\rho_1$ , кг/м<sup>3</sup>; влажность  $w_1$ ; теплопроводность  $\lambda_1$ , Вт/(м·°C); криоскопическая температура  $t_{кр1}$ , °C; характерный размер  $R_1$ , м (в данном случае  $R_1 = R$  – это характерный размер всего тела); а начинка соответственно: плотность  $\rho_2$ , кг/м<sup>3</sup>; влажность  $w_2$ ; теплопроводность  $\lambda_2$ , Вт/(м·°C); криоскопическая температура  $t_{кр2}$ , °C; характерный размер  $R_2 = R - D$ , м. Продолжительность замораживания двухслойного тела можно определить, используя известное соотношение [3]:

$$\tau_{з.п.} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{\Phi * q * \rho_1 * R_1 * w_1}{(t_{кр1} - t_{хл})} * \left\{ \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{\Phi * R_1}{(2 * \Phi - 1) \lambda_1} \right) * \left( 1 - \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^{\frac{1}{\Phi}} \right) - \frac{R_1^2 - R_2^2}{2 * (2 * \Phi - 1) \lambda_1 R_1} \right\} + \frac{\Phi * q * \rho_2 * R_2 * w_2}{(t_{кр2} - t_{хл})} * \left\{ \frac{R_1}{2 * \lambda_2} + \frac{R_2^{\frac{1}{\Phi} - 1}}{\alpha * R_1^{\frac{1}{\Phi} - 1}} + \frac{\Phi * R_2^{\frac{1}{\Phi} - 1} (R_1^{2 - \frac{1}{\Phi}} - R_2^{2 - \frac{1}{\Phi}})}{(2 * \Phi - 1) * \lambda_1} \right\} \quad (12)$$

Здесь  $q = 3.3 * 10^5$  Дж/кг – теплота кристаллизации воды;  $\tau_1$  и  $\tau_2$  – время замораживания слоя теста и начинки соответственно.

Однако данный способ расчета не совсем корректен в случае, если криоскопическая температура начинки значительно ниже криоскопической температуры теста.

Существует поправка к формуле (12), учитывающая данный факт [3]:

$$\Delta \tau = - \frac{q * w * \rho * R^2}{\lambda (t_{кр} - t_{хл})} * F(Bi, a, k);$$

$$Bi = \frac{\alpha R}{\lambda_2}; \quad a = \frac{-t_{кр}}{t_{кр} - t_{хл}} \quad (13)$$

Функция  $F(Bi, a, k)$  может быть определена лишь численно [3, табл.7.1-7.3]. Необходимо отметить, что при расчете коэффициента Био нужно использовать эффективный коэффи-

циент теплоотдачи  $\alpha_{эф}$ , учитывающий тепловое сопротивление замороженного слоя теста:

$$\alpha_{эф} = \frac{1}{\frac{R}{2\lambda_2} + \frac{1}{\alpha} \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^{\frac{1}{\Phi} - 1}}$$

Кроме того, так как криоскопическая температура начинки ниже криоскопической температуры теста, то начинка начнет замерзать лишь при достижении криоскопической температуры. Соотношения для расчета времени охлаждения продукта  $\tau_{охл}$  представлены в [3]. Необходимо отметить, что в уравнении [3]  $C_{н2}$  и  $\lambda_{н2}$  – теплоемкость (Дж/(кг·°C)) и теплопроводность (Вт/(м·°C)) незамороженной начинки значительно отличаются от показателей замороженной начинки.

Итоговая продолжительность замораживания равна:

$$\tau_{зам} = \tau_1 + \tau_2 + \Delta \tau + \tau_{охл}$$

Таким образом, представлен метод решения и расчетные соотношения для определения продолжительности замораживания хлебобулочных изделий с начинками, с учетом влияния снижения криоскопической температуры начинки на примере пирожка с начинкой.

Рассмотрим расчет времени замораживания на примере пирожка с черничной начинкой. Слой теста составляет  $D = 0.005$  м. Характерный размер тестовой части (половина толщины) составляет  $R_1 = 0.015$  м, характерный размер начинки  $R_2 = 0.01$  м. Коэффициент формы пирожка  $\Phi = 0.4$ . Параметры тестовой оболочки и начинки следующие [4]: для теста  $\lambda_1 = 0.35$  Вт/(м·°C),  $\rho_1 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $w_1 = 0.3$ ,  $t_{кр1} = -2$  °C; для начинки (черничная)  $\lambda_2 = 1.3$  Вт/(м·°C),  $\rho_2 = 1300$  кг/м<sup>3</sup>,  $w_2 = 0.75$ ,  $t_{кр2} = -12$  °C,  $C_{н2} = 3800$  (Дж/(кг·°C)) и  $\lambda_{н2} = 0.7$  (Вт/(м·°C)). Температура охлаждающего воздуха  $t_{хл} = -30$  °C, скорость движения воздуха 3 м/с; коэффициент теплоотдачи  $\alpha = 50$  Вт/(м<sup>2</sup>·°C); тогда  $\tau_{з.п.} = 2315$  с = 38,6 мин,  $\alpha_{эф} = 60$  Вт/(м<sup>2</sup>·°C),  $Bi = 0.46$ . При  $t_{кр1} = -2$  °C, величина  $a = 0.071$  и  $F(0.46; 0.071; 0.4) = 0.069$ ;  $\Delta \tau = -60$  с, которой можно пренебречь. При  $t_{кр2} = -12$  °C величина  $a = 0.67$  и  $F(0.46; 0.67; 0.4) = 0.93$ ;  $\Delta \tau = -1279$  с = -21,3 мин. Продолжительность охлаждения поверхности начинки до  $t_{кр2} = -12$  °C составит  $\tau_{охл} = 105$  с = 1,75 мин. Итоговая продолжительность замораживания  $\tau_{зам} = 19$  мин.

Расчетные и экспериментальные значения продолжительности замораживания совпадают с погрешностью менее 8 %.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Алехина Л.В., Андреенков В.А. Пирожки печенье // Мир мороженого и быстрозамороженных продуктов. 2012. №4. С.32-34.
- 2 Фролов С.В., Мереминский Г.И., Поляков К.Ю. Расчет времени охлаждения пищевых объектов методом квазиодномерного приближения // Вестник МАХ. 2004. №3. С. 42 – 44.
- 3 Фролов С.В., Багаутдинова А.Ш. Высшая математика. Этюды по теории и приложениям. СПб.: ГИОРД, 2012. 576 с.
- 4 Бараненко А.В. и др. Холодильная технология пищевых продуктов. Часть III. Теплофизические основы. СПб: ГИОРД, 2008. 697 с.

REFERENCES

- 1 Alekhina L.V., Andreenkov V.A. Baked cakes. *Mir morozhenogo i bystrozamorozhennykh produktov*. [World of ice cream and frozen foods], 2012, no 4, pp. 32-34. (In Russ.).
- 2 Frolov S.V., Mereminskii G.I., Poliakov K.Iu. Calculation cooling of food items by the quasi approximation. *Vestnik MAKh*. [Bulletin of International academy of refrigeration], 2004, no 3, pp. 42-44. (In Russ.).
- 3 Frolov S.V., Bagautdinova A.Sh. *Vysshaia matematika. Etiudy po teorii i prilozheniiam* [Higher mathematics. Essays on the theory and applications]. Sent Petersburg, GIORД, 2012. 576 p. (In Russ.).
- 4 Baranenko A.V. et al. *Holodil'naia tehnologiia pishchevykh produktov. Chast' III. Teplofizicheskie osnovy* [Refrigerated food technology. Part III. Thermo-physical basis]. Sent Petersburg, GIORД, 2008. 697 p. (In Russ.).