

УДК 532

Профессор В.Н. Колодежнов

(Воронеж. гос. ун-т инж. технол.) кафедра физики
тел. 8-910 -249 32-58

E-mail: kvn117@mail.ru

Professor V.N. Kolodezhnov

(Voronezh state university of engineering technology) Department of physics

phone 8-910 -249 32-58

E-mail: kvn117@mail.ru

Математическая модель реологического поведения вязкопластической жидкости, которая демонстрирует проявление эффекта “отвердевания”

Mathematical model of the rheological behavior of viscoplastic fluid, which demonstrates the effect of “solidification”

Реферат. Дана характеристика аномального поведения некоторых видов суспензий на основе полимерных композиций и мелкодисперсных частиц. В случае простейшего, одномерного, сдвигового, вискозиметрического течения такие материалы демонстрируют следующее механическое поведение. Если касательное напряжение не превосходит некоторого критического значения, то деформирование материала отсутствует. При превышении этого порогового значения начинается процесс течения. Такое поведение хорошо известно и соответствует реологическим моделям вязкопластической жидкости. Однако дальнейшее увеличение скорости сдвига приводит к проявлению эффекта “отвердевания”. Предложена реологическая модель механического поведения таких вязкопластических жидкостей, которые демонстрируют проявление эффекта “отвердевания”. Эта модель содержит четыре эмпирических параметра. Графически представлено влияние показателя степени в реологической модели на зависимости касательного напряжения и эффективной вязкости от скорости сдвига. Проведено обобщение рассмотренной реологической модели на случай пространственного течения.

Summary. The irregular behavior of some kinds of suspensions on the basis of polymeric compositions and fine-dispersed fractions is characterized. As a simple, one-dimensional, shearing, viscometric flow such materials demonstrate the following mechanical behavior. There is no deformation if the shear stress does not exceed a certain critical value. If this critical value is exceeded, the flow is begins. This behavior is well-known and corresponds to the rheological models of viscoplastic fluid. However, further increase in the shear rate results in “solidification”. The rheological model of such viscoplastic fluids, mechanical behavior demonstrating the “solidification” effect is offered. This model contains four empirical parameters. The impact of the exponent on the dependence of the shearing stress and effective viscosity on the shear rate in the rheological model is graphically presented. The rheological model extrapolation on the three-dimensional flow is proposed.

Ключевые слова: реологическая модель, вязкопластическая жидкость, эффект “отвердевания”.

Keywords: rheological model, viscoplastic fluid, the effect of “solidification”.

Известен целый ряд материалов на основе полимерных композиций и мелкодисперсных частиц, которые демонстрируют аномальные реологические свойства. Существо таких аномалий заключается в следующем. В обычном (как правило, статическом) состоянии изделия из этих материалов под воздействием сравнительно небольших усилий не деформируются и, вполне, сохраняют свою форму. При превышении же прикладываемым усилием некоторого предельного (порогового) значения начинается процесс “течения” (деформирования). Такое поведение сплошных сред хорошо известно и укладывается в представление о вязкопластических жидкостях [1]. Однако по мере

увеличения скорости деформирования (скоростей сдвига), материалы такого рода проявляют уже дилатантное поведение. Причем, приближение модуля скорости сдвига к некоторому критическому (но конечному) значению $\dot{\gamma}_1$ приводит к тому, что кривая течения, построенная в координатах “скорость сдвига – касательное напряжение”, начинает демонстрировать резкое возрастание своей крутизны. При этом, дилатантное поведение жидкости усиливается настолько, что наиболее деформируемые области течения (где скорость сдвига непосредственно приближается к своему критическому значению) начинают вести себя практически подобно твердому телу.

© Колодежнов В.Н., 2014

Такое поведение рассматриваемых материалов можно интерпретировать, как проявление эффекта “отвердевания” [2-4]. Известны примеры практического применения таких вязкопластических материалов [5], демонстрирующих эффект “отвердевания”. В [6] на уровне соответствующего механического аналога указывалось на возможность построения реологической модели вязкопластических жидкостей, которые могут также демонстрировать и проявление эффекта “отвердевания”.

Далее представлена реологическая модель вязкопластической жидкости, демонстрирующей проявление эффекта “отвердевания”. Рассмотрим, прежде всего, сдвиговое вискозиметрическое течение с одной, тождественно не равной нулю, составляющей скорости.

Качественно, зависимость касательного напряжения $\tau(|\dot{\gamma}|)$ от скорости сдвига $\dot{\gamma}$ для материалов с указанным выше реологическим поведением должна иметь вид, представленный на рисунке 1.

Особенности такой кривой течения заключаются в следующем.

До тех пор, пока выполняется условие $|\tau| < \tau_0$, скорость сдвига равняется нулю (деформирование отсутствует). В этом диапазоне изменения касательного напряжения материал должен вести себя подобно твердому телу.

При превышении же модулем касательного напряжения соответствующего порогового значения $\tau_0 > 0$ начинается процесс течения (деформирования). При этом связь между $|\tau|$ и $|\dot{\gamma}|$ должна иметь нелинейный характер, поскольку при приближении скорости сдвига к некоторому критическому значению ($|\dot{\gamma}| \rightarrow \dot{\gamma}_1$), крутизна кривой течения должна неограниченно возрастать:

$$\lim_{|\dot{\gamma}| \rightarrow \dot{\gamma}_1} \left\{ \frac{d|\tau(|\dot{\gamma}|)|}{d|\dot{\gamma}|} \right\} = \infty. \quad (1)$$

Поскольку крутизна кривой течения характеризует, вообще говоря, эффективную вязкость μ_{eff} жидкости, такой характер зависимости $\tau(|\dot{\gamma}|)$, связанный с неограниченным возрастанием μ_{eff} , и можно интерпретировать, как проявление эффекта “отвердевания”.

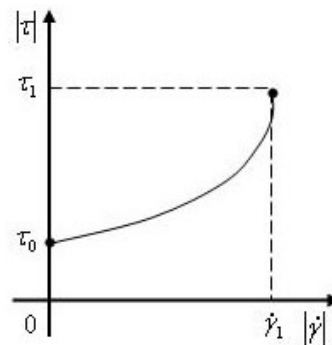


Рисунок 1. Характер кривой течения для вязкопластических материалов с эффектом “отвердевания”.

Таким образом, собственно течение будет иметь место лишь в тех зонах области, заполненной рассматриваемой жидкостью, где выполняется условие:

$$\tau_0 < |\tau| < \tau_1. \quad (2)$$

Все вышеизложенное означает, что в той области, где находится жидкость, наряду с зоной течения могут иметь место и зоны, в которых жидкость ведет себя подобно твердому телу. Причем, эти зоны могут быть двух типов.

Жесткие зоны первого типа должны быть обусловлены пластическими свойствами материала. На границе этих жестких зон с зоной течения выполняется условие $|\tau| = \tau_0$.

Жесткие зоны второго типа должны быть обусловлены проявлением эффекта “отвердевания” и на их границах с зоной течения должно выполняться условие $|\tau| = \tau_1$.

Учитывая, что, априори, предполагается выполнение неравенства $\tau_0 < \tau_1$, жесткие зоны первого и второго типов всегда должны быть разделены зоной течения.

Все эти особенности механического поведения сплошных сред такого рода можно для диапазона (2) описать в рамках реологического соотношения:

$$|\tau| = A + B \cdot (\dot{\gamma}_1 - |\dot{\gamma}|)^n. \quad (3)$$

Константы A и B определяются с учетом удовлетворения следующим условиям:

$$|\tau(0)| = \tau_0; \quad |\tau(\dot{\gamma}_1)| = \tau_1$$

и могут быть представлены через основные реологические параметры модели следующим образом:

$$A = \tau_1; \quad B = -(\tau_1 - \tau_0) \cdot \dot{\gamma}_1^{-n}. \quad (4)$$

В соотношении (3) предполагается, что на реологическую константу n накладывается ограничение вида:

$$0 < n < 1.$$

Последнее условие заведомо обеспечивает выполнение (1) при $|\dot{\gamma}| \rightarrow \dot{\gamma}_1$ и, соответственно, моделирование эффекта “отвердевания”.

Характер влияния реологической константы n на кривые течения, построенные в безразмерных координатах:

$$|\tau'| = \frac{|\tau| - \tau_0}{\tau_1 - \tau_0}; \quad |\dot{\gamma}'| = \frac{|\dot{\gamma}|}{\dot{\gamma}_1}, \quad (5)$$

иллюстрируют данные, представленные на рисунке 2. В соотношениях (5) и далее верхним штрихом отмечены безразмерные величины.

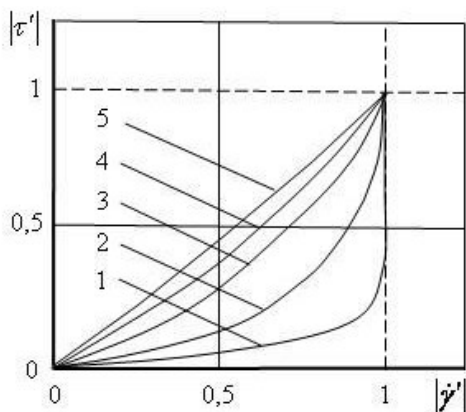


Рисунок 2. Влияние параметра n на кривые течения вязко-пластической жидкости с эффектом “отвердевания”: $n = 0.1$ (1); 0.3 (2); 0.5 (3); 0.7 (4); 0.9 (5).

Влияние этого же параметра на безразмерную эффективную вязкость:

$$\mu'_{eff} = \frac{\mu_{eff}}{\mu_s};$$

$$\mu_{eff} = \frac{d|\tau|}{d|\dot{\gamma}|}; \quad \mu_s = \frac{\tau_1 - \tau_0}{\dot{\gamma}_1},$$

можно проследить по зависимостям, представленным графически на рисунке 3. Здесь μ_s представляет собой принимаемое в качестве масштабного значение динамической вязкости.

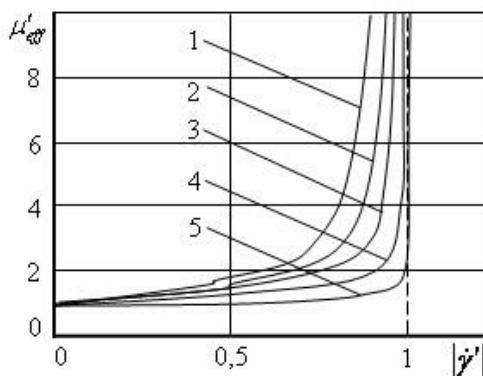


Рисунок 3. Влияние параметра n на эффективную вязкость: $n = 0.1$ (1); 0.3 (2); 0.5 (3); 0.7 (4); 0.9 (5).

На рисунке 3 линия $|\dot{\gamma}'| = 1$ является вертикальной асимптотой к графикам зависимости эффективной вязкости от модуля скорости сдвига.

Проведенное рассмотрение для простейшего вискозиметрического течения с одной, тождественно не равной нулю, составляющей скорости приводит к следующей реологической модели вязко-пластической жидкости с четырьмя константами $n, \dot{\gamma}_1, \tau_0, \tau_1$, которая демонстрирует проявление эффекта “отвердевания”:

$$|\dot{\gamma}| = \begin{cases} 0; & |\tau| < \tau_0; \\ \left[1 - \left(\frac{\tau_1 - |\tau|}{\tau_1 - \tau_0} \right)^{\frac{1}{n}} \right] \cdot \dot{\gamma}_1; & \tau_0 \leq |\tau| \leq \tau_1; \end{cases}$$

Рассмотрим теперь обобщение предложенного соотношения (3) с учетом (4) на случай произвольного течения.

Наиболее часто модель нелинейно-вязкой жидкости на уровне связи между компонентами тензоров напряжений и скоростей деформаций представляют в форме:

$$\tau_{ij} = -P \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \mu(I_2) \cdot \varepsilon_{ij}; \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (6)$$

$$I_2 = \varepsilon_{11} \cdot \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22} \cdot \varepsilon_{33} + \varepsilon_{33} \cdot \varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{31}^2,$$

где $\tau_{ij}, \varepsilon_{ij}$ - компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций, соответственно; P - давление; δ_{ij} - символ Кронекера; $\mu(I_2)$ - функция второго инварианта I_2 тензора скоростей деформаций.

Принимая за основу выражение (3), с учетом (4) можно для зоны течения вязкопластической жидкости с эффектом “отвердевания” в общем случае предложить следующее соотношение:

$$\mu(I_2) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{|I_2|}} \cdot \left\{ \tau_1 - (\tau_1 - \tau_0) \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{|I_2|}{I_{2crit}}} \right)^n \right\}; \quad (7)$$

$$|I_2| \leq I_{2crit},$$

где I_{2crit} - критическое значение модуля второго инварианта тензора скоростей деформаций, при приближении к которому ($|I_2| \rightarrow I_{2crit}$) начинает проявляться эффект “отвердевания”.

Заметим, что в частном случае простейших вискозиметрических течений, когда:

$$\dot{\gamma} = 2 \cdot \varepsilon; \quad I_2 = -\varepsilon^2 = -\frac{1}{4} \cdot \dot{\gamma}^2; \quad \dot{\gamma}_1 = 2 \cdot \sqrt{I_{2crit}},$$

соотношения (6), (7) трансформируются к виду (3) с учетом (4). Здесь ε - единственная, тождественно не равная нулю, составляющая тензора скоростей деформаций.

Естественно, что параметр $I_{2,crit}$ следует рассматривать, как самостоятельную реологическую константу, характеризующую поведение конкретной жидкости. Эта константа, как и три другие n , τ_0 , τ_1 должна определяться на основе обработки соответствующих экспериментальных данных.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Климов Д.М., Петров А.Г., Георгиевский Д.В. Вязкопластические течения: динамический хаос, устойчивость, перемешивание. М.: Наука, 2005. 394 с.
- 2 Wagner N., Brady J. F. Shear thickening in colloidal dispersions // *Physics Today*. 2009. V. 62 (10). P. 27–32.
- 3 Galindo-Rosales F.J., Rubio-Hernández F.J., Velázquez-Navarro J.F. Shear-thickening behavior of Aerosil R816 nanoparticles suspensions in polar organic liquids. // *Rheologica Acta*. 2009. V. 48. P. 699–708.
- 4 Колодежнов В.Н. Течение в плоском канале дилатантной жидкости с эффектом “отвердевания” // *Обозрение прикладной и промышленной математики*. 2010. Т. 17. № 3. С. 422.
- 5 D3O — материал из будущего! [Электронный ресурс] Режим доступа: <https://qwintry.com/ru/articles/d3o-material-iz-budushchego> (19 февраля.2014).
- 6 Колодежнов В.Н. Механический аналог реологических моделей, демонстрирующих проявление эффекта “отвердевания” // *Вестник ВГУИТ*. 2012. № 4. С. 51-53

Предложенная выше математическая модель носит обобщенный характер и может быть использована при описании механического поведения вязкопластических жидкостей, демонстрирующих проявление эффекта “отвердевания”.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект № 12-08-00629а.

REFERENCES

- 1 Klimov D.M., Petrov A.G., Georgievskii D.V. Viazkoplasticheskie techeniia: dinamicheskii khaos, ustoichivost', peremeshivanie [Viscoplastic flow: dynamic chaos, stability and mixing]. Moscow, Nauka, 2005. 394 p. (In Russ.).
- 2 Wagner N., Brady J. F. Shear thickening in colloidal dispersions. [*Physics Today*], 2009, vol. 62 (10), pp. 27–32.
- 3 Galindo-Rosales F.J., Rubio-Hernández F.J., Velázquez-Navarro J.F. Shear-thickening behavior of Aerosil R816 nanoparticles suspensions in polar organic liquids. [*Rheologica Acta*], 2009, vol. 48, pp. 699–708.
- 4 Kolodezhnov V.N. Flow in a plane channel of dilatant fluid with the effect of “solidification”. *Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki*. [Review of applied and industrial mathematics], 2010, vol.17, no 3, pp. 422. (In Russ.).
- 5 D3O - material iz budushchego! [D3O – material from the future]. Available at: <https://qwintry.com/ru/articles/d3o-material-iz-budushchego> (Accessed 19 February 2014). (In Russ.).
- 6 Kolodezhnov V.N. Mechanical analogue of rheological models, demonstrating the effect of “solidification”. *Vestnik VGUIT*. [Bulletin of VSUET], 2012, no. 4, pp. 51-53. (In Russ.).