

УДК 519.85

Профессор Ю.В. Бугаев, доцент С.В. Чикунов,  
магистр Н.А. Смородинова

(Воронеж. гос. ун-т. инж. технол.) кафедра информационных технологий,  
моделирования и управления.  
тел. (473) 255-25-50  
E-mail: chiksv@rambler.ru

Professor Iu.V. Bugaev, associate Professor S.V. Chikunov,  
master N.A. Smorodinova

(Voronezh state university of engineering technology) Department of information technologies,  
modeling and management.  
phone (473) 255-25-50  
E-mail: chiksv@rambler.ru

## **Модели многокритериального поэтапного выбора решений, их использование в сахарной промышленности**

## **Models of multicriterial step by step choice decisions, their use in the sugar industry**

Реферат. Оптимальное управление действующими системами может быть сведено к задаче многокритериального поэтапного выбора эффективных решений в дискретных системах. Их структуру можно описать в виде ориентированного графа с заданными на его дугах векторными весами, а проблему выбора свести к проблеме поиска оптимальных путей на графе. Существующие методы поиска применяются только для линейных систем, структура которых описывается ациклическими графами. Нелинейные структуры содержат в своем составе разветвления и/или возвраты технологических потоков и для них методы многокритериального поэтапного выбора непосредственно неприменимы. Для решения таких задач предлагается использовать модель декомпозиции графа, описывающего структуру рассматриваемой системы, на ациклические подграфы и модель синтеза эффективных интегральных путей. Последнее будем осуществлять последовательным объединением их фрагментов – эффективных путей, найденных в ациклических подграфах, и сужением посредством функции выбора с учетом условия целостности системы. Далее в статье приводится численная реализация моделей декомпозиции и синтеза интегральных решений. Предлагаемые модели проверялись на примере оптимизации отделения кристаллизации в сахарной промышленности. Задача заключалась в выборе из множества возможных управляющих воздействий некоторой совокупности альтернативных вариантов, оптимальных по 3 аддитивным критериям эффективности. На каждой стадии процесса были выбраны соответствующие управляющие воздействия и построен граф вариантов управляющих воздействий с заданными на его дугах количественными оценками критериев эффективности. В результате применения разработанных моделей было получено множество эффективных интегральных путей, состоящее из 38 вариантов. Каждому такому решению соответствовал вариант значений управляющих воздействий на стадиях процесса.

Summary. Optimal control of existing systems can be reduced to the problem of multi-criteria step by step choice of effective solutions in discrete systems. Their structure can be described as a directed graph with a given vector weights in its arches. The problem of choice can be reduced to the problem of search of optimal ways on the graph. Available methods of search are used only for linear systems whose structure is described by acyclic graphs. Nonlinear structures contain branches and/or return process streams. The methods of multi-criteria step by step choice are not applicable for them. To solve such problems we propose the model of decomposition of a graph that describes the structure of the system, into acyclic subgraphs and the synthesis model of effective integrated ways. The latter will be implemented by the consistent integration of their fragments i.e. effective ways found in acyclic subgraphs, and narrowing down through the choice function by taking into account the conditions of the system integrity. Further on, the article dwells upon a numerical realization of decomposition model and synthesis of integrated solutions. The proposed models were tested on the example of optimization of crystallization process in the sugar industry. The task was to select from a variety of possible control actions some set of alternatives, optimal in 3 additive performance criteria. At each stage of the process the appropriate control actions were selected and graph options of control actions with the given its arches quantitative estimates of the efficiency criteria was developed. As a result of application of the developed models numerous effective integrated ways, consisting of 38 options were received. Each such decision was corresponding to the option value of control impacts on the stages of the process.

*Ключевые слова:* многокритериальный поэтапный выбор, граф, эффективные пути, динамическое программирование, кристаллизация сахара

*Keywords:* multicriterial step by step choice, graph, effective ways, dynamic programming, crystallization of sugar

© Бугаев Ю.В., Чикунов С.В., Смородинова Н.А., 2014

Многие задачи выбора, такие как оптимальное управление действующими технологическими системами (ТС), могут быть сведены к задачам многокритериального поэтапного выбора (МПВ) эффективных решений в дискретных ТС. Структуру практически любой ТС можно описать в виде ориентированного графа с заданными на его дугах векторными весами, а проблему МПВ формально свести к проблеме выбора на графах. Тогда оптимальную последовательность действий можно ассоциировать с оптимальным путем на таком графе.

Существующие методы поиска оптимальных путей на графах применяются только для ТС, структура которых описывается ациклическими графами: метод случайного поиска с многокритериальной локальной оптимизацией; методы, основанные на сведении многокритериальной задачи оптимизации к множеству однокритериальных; метод, использующий принцип оптимальности Беллмана (ПОБ), для решения поэтапных задач оптимизации и применяемый на многодольных графах и др.

Однако многие ТС имеют более общую структуру, которая состоит не только из цепочки выполняемых операций (этапов, стадий), как в случае последовательной переработки сырья, но и разветвлений и возвратов различных технологических потоков. Например, получение сахара-песка в продуктовом отделении сахарных заводов. То есть, в общем случае, структура ТС представляет собой ориентированный граф с разветвлениями и/или контурами и оптимальное решение такой многостадийной задачи, соответственно, содержит в своем составе разветвление и/или контур.

В данной работе рассматриваются модели МПВ оптимальных решений и их использование на примере оптимизации отделения кристаллизации в сахарной промышленности.

Алгоритмическая сложность задачи МПВ, главным образом, зависит от выбранного типа структуры технологической системы:

#### 1. Линейные структуры ТС:

а) Структура в виде совокупности линейных цепочек с постоянным числом операций. Задача в этом случае представляет собой выбор на каждой  $i$ -й операции,  $i = 1, 2, \dots, s$  оптимального варианта ее реализации (тип оборудования, вариант управляющего воздействия и многое другое).

Теоретико-множественное объединение возможных вариантов структуры (обобщенная структура) представляет собой многодольный граф  $G_1$ , например граф на рисунке 1, содержащий 11 вершин и 5 этапов (операций), в котором все множество вершин  $V$  разбито на подмножества  $U_1, U_2, \dots, U_k$  таким образом, что каждая

дуга соединяет две вершины  $u, w$  из смежных подмножеств:  $u \in U_i, w \in U_{i+1}$ . В этом случае количество подмножеств  $k$  (этапов) совпадает с количеством операций  $s$ , т. е. каждый элемент  $u \in U_i$  есть новый вариант реализации  $i$ -й операции технологического маршрута. Решение в этом случае представляет собой совокупность путей на графе  $G_1$  с оптимальным вектором весов, соединяющих начальную и конечную вершины, и может быть найдено посредством алгоритмов, использующих ПОБ и обобщенных на случай нескольких критериев [1, 2].

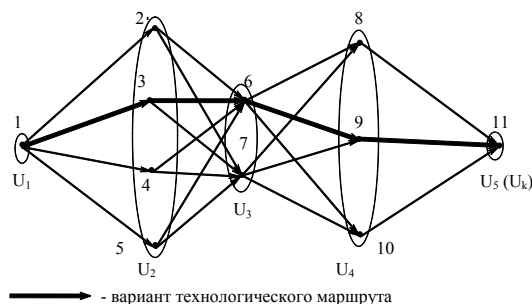


Рисунок 1. Линейная цепочка с постоянным числом операций

б) Структура в виде совокупности линейных цепочек с различным числом операций. В ТС этого типа допускается вариантность в функциональном назначении каждой операции, то есть различные варианты технологических маршрутов могут иметь разное число операций и, соответственно, пути на графе имеют разное число звеньев.

Обобщенная структура такой ТС представляет собой бесконтурный ориентированный граф общего вида  $G_2$ , например граф на рисунке 2. Здесь все множество вершин  $V$  также разбито на подмножества  $U_1, U_2, \dots, U_k$ , где  $k = s$  – количество операций, но, в отличие от предыдущего случая, каждая дуга соединяет две вершины  $u, w$ , из которых  $u \in U_i$ , а  $w \in U_j$ ,  $i \neq j$  и  $i, j = \overline{1, k}$ , то есть необязательно вершины из смежных подмножеств (например, дуги 1-5 и 5-12 на рисунке 2).

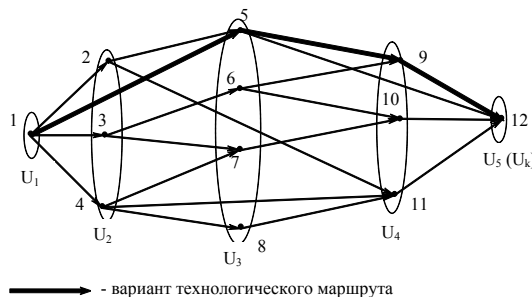


Рисунок 2. Линейная цепочка с различным числом операций

Решение задачи в этом случае также представляет собой набор эффективных путей на графе и может быть найдено с помощью алгоритмов, использующих ПОБ и обобщенных на случай нескольких критериев [1, 2].

## 2. Нелинейные структуры ТС:

а). Структура ТС с разветвлениями. В структурах этого типа каждый вариант технологического маршрута содержит разветвление материальных, энергетических и других потоков, например, как показано на рисунке 3. Здесь выделенный вариант технологического маршрута после операции, обозначаемой вершиной 2, разветвляется на две отдельные части, которые, согласно технологии, проходят промежуточные операции обработки (вершины 7 и 5), и соединяются вновь на операции 9.

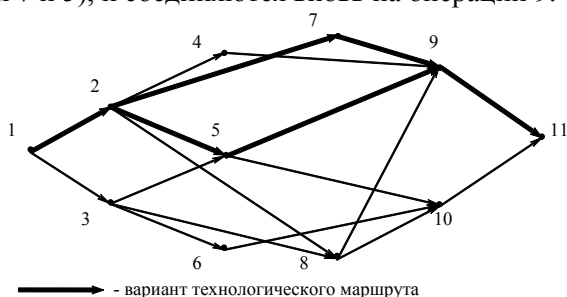


Рисунок 3. Структура с разветвлениями технологических потоков

б) Структура ТС с контурами. Каждый допустимый вариант технологического маршрута содержит в своем составе возврат технологических потоков, то есть одна и та же операция может применяться несколько раз на различных стадиях обработки предмета производства, например, как показано на рисунке 4.

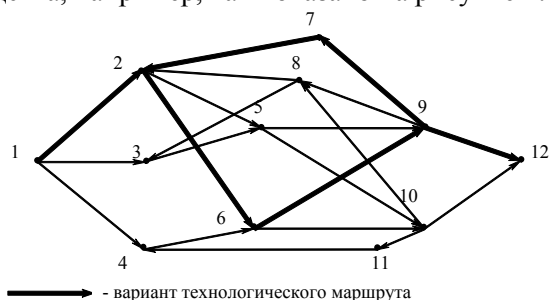


Рисунок 4. Структура с возвратами технологических потоков

Здесь выделенный технологический маршрут  $1 - 2 - 6 - 9 - 12$  содержит контур  $9 - 7 - 2$ : операция, обозначаемая вершиной 2, является входом контура, а операция, обозначаемая вершиной 9 — разветвлением технологического потока. Причем вершины 6 и 7 обозначают промежуточные, по отношению к 2 и 9, операции. Вариант маршрута  $1 - 4 - 6 - 9 -$

12 недопустим, так как не содержит технологический контур  $9 - 4$ .

Два последних варианта структуры ТС не допускают представление решения в виде множества путей на графе, так как каждый вариант изначально содержит в своем составе разветвление и/или контур и для таких ТС, методы поэтапного выбора, обобщенные на случай нескольких критериев, непосредственно неприменимы. Для решения задач МПВ эффективных решений в таких ТС будем использовать декомпозицию графа, описывающего структуру рассматриваемой ТС.

Будем предполагать, что все возможные технологические маршруты, являющиеся допустимыми решениями задачи, имеют одинаковую структуру с точностью до числа звеньев в линейных цепочках. Иными словами, характер и число разветвлений и/или возвратов одинаково у всех альтернатив. Кроме того, будем предполагать, что граф  $G_3$  обобщенной структуры не содержит кратных дуг, а его вершины представляют собой несовпадающие варианты реализации технологических операций.

Обозначим  $W_1, W_2, \dots, W_k$  — подмножества вершин графа  $G_3$ , каждое из которых представляет собой совокупность однотипных вершин, соответствующих разветвлениям, соединениям или местам входа возвратов технологических потоков. Добавим к этому набору множества  $W_0, W_{k+1}$ , состоящие из одного элемента — начальная и конечная вершина, соответственно (рисунок 5).

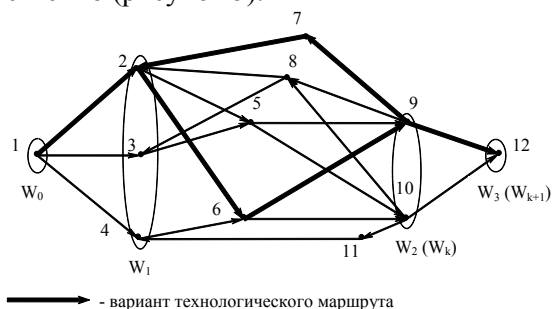


Рисунок 5. Декомпозиция графа  $G_3$  с возвратами технологических потоков

Пусть  $Next(W_i)$  — подмножество вершин из совокупности  $\{W_j\}$ ,  $j \neq i$ , смежных с подмножеством  $W_i$ . Тогда подмножества  $W_0, W_1, \dots, W_{k+1}$  разбивают исходный граф обобщенной структуры  $G_3$  на отдельные фрагменты — ациклические подграфы  $G_{3\psi}$ ,  $\psi = \overline{1, J}$ , где  $J$  — количество таких подграфов,

причем все пути в них начинаются в вершинах  $u \in W_i$  и заканчиваются в вершинах смежного подмножества  $w \in \text{Next}(W_i)$ . В этом случае каждый допустимый технологический маршрут является объединением путей, соединяющих вершины, принадлежащие смежным подмножествам  $W_i$  и  $\text{Next}(W_i)$ .

Поскольку каждый подграф  $G_{3\psi}$ ,  $\psi = \overline{1, J}$  графа  $G_3$  является ациклическим графом без кратных дуг, то поиск эффективных путей в них будем проводить с помощью обобщенных на случай нескольких критериев алгоритмов поэтапного выбора, использующих ПОБ [1, 2]. Здесь для каждой вершины  $u \in W_i$ ,  $i = \overline{0, k}$  определяем множество эффективных путей, соединяющих ее со всеми вершинами  $w \in \text{Next}(W_i)$ . В результате получаем  $\{p^*\}_{\psi}$  – множества эффективных путей в каждом подграфе  $G_{3\psi}$ .

Композиция решений. Синтез эффективных интегральных путей (вариантов технологических маршрутов) будем осуществлять последовательным объединением их фрагментов – эффективных путей, найденных в ациклических подграфах между подмножествами  $W_i$  и  $\text{Next}(W_i)$ , то есть определенных на декартовом произведении  $W_i \times \text{Next}(W_i)$ ,  $i = \overline{0, k}$  и сужением посредством функции выбора. Эта процедура имеет место лишь в том случае, если соблюдается условие целостности ТС [3], заключающееся в совпадении вершин смежных фрагментов путей при их объединении.

Численная реализация модели синтеза интегральных решений.

1. Выбираем смежные подграфы:  $G_{3\psi}$ , расположенный между подмножествами  $W_i$  и  $\text{Next}(W_i) \subseteq W_j$ , и  $G_{3\psi+1}$  – между  $W_j$  и  $\text{Next}(W_j) \subseteq W_r$ ,  $i \neq j \neq r$ .

2. Все эффективные пути, найденные между вершинами  $u \in W_i$  и  $w \in W_j$ , объединяем со всеми эффективными путями между вершинами  $w \in W_j$  и  $z \in W_r$ ,  $i \neq j \neq r$ , при условии существования интегрального пути через вершину  $w$  (условие целостности). Причем, если в графе присутствует контур, то подмножества  $W_i$  и  $W_r$ , ( $i = r$ ) – одно и то же подмножество и, следовательно, вершина  $z$  есть вершина  $u$ . В результате такой процедуры получаем множество интегральных путей, каждый из которых

характеризуется совокупностью оценок критериев, полученных, в силу условия аддитивности, изначально накладываемого на критерии, сложением оценок отдельных фрагментов.

Среди найденных вариантов могут оказаться неэффективные, которые необходимо отбросить. Действительно, если фрагменты конечного пути из вершины  $u \in W_i$  в вершину  $w \in W_j$  и из  $w \in W_j$  в  $z \in W_r$  являются эффективными, то суммарная оценка критериев результирующего пути из  $u$  в  $z$  может оказаться неэффективной и данный вариант технологического маршрута должен быть исключен из дальнейшего рассмотрения. Для отсева таких решений можно использовать функцию выбора по бинарному отношению предпочтения  $R$  (в частности, по отношению Парето).

В результате получаем множество эффективных интегральных путей из  $u$  в  $z$ . Согласно [4], любые фрагменты этих путей также эффективны. То есть, не может быть эффективного интегрального пути, состоящего из неэффективных фрагментов.

3. Между вершинами  $u \in W_i$ ,  $z \in W_r$  и всеми  $w \in W_j$ , при выполнении условия целостности, определяем множество интегральных решений  $\{p^*\}_{\psi}^{u-w} \cup \{p^*\}_{\psi+1}^{w-z}$ , которое затем сужаем посредством функции выбора  $C$ :

$$\{p^*\}_{\psi, \psi+1}^{u-z} = C(\{p^*\}_{\psi}^{u-w} \cup \{p^*\}_{\psi+1}^{w-z}).$$

4. Для всех вершин  $u \in W_i$  и  $z \in W_r$  аналогично определяем множество эффективных интегральных путей в графе  $G_{\psi} \cup G_{\psi+1}$ :

$$\{p^*\}_{\psi, \psi+1} = C(\{p^*\}_{\psi} \cup \{p^*\}_{\psi+1}).$$

5. После рассмотрения всех подграфов  $G_{3\psi}$ , получаем множество эффективных интегральных путей  $\{p^*\} = C(\bigcup_{\psi} \{p^*\}_{\psi})$ ,  $\psi = \overline{1, J}$

на графе обобщенной структуры  $G_3$ , среди которых, согласно требованиям, предъявляемым к конечному решению, нужно выбрать один или несколько окончательных.

Например, для графа (см. рисунок 5) объединяются эффективные пути между вершинами 2 – 9 и 9 – 2, 2 – 10 и 10 – 2, 3 – 9 и 9 – 3, 3 – 10 и 10 – 3, 4 – 10 и 10 – 4. К ним добавляются фрагменты 1 – 2, 1 – 3, 1 – 4 и 9 – 12, 10 – 12. Вариантов конечных маршрутов с фрагментами 4 – 9 и 9 – 4 не существует, так как не выполняется условие целостности ТС – отсутствуют пути между вершинами 9 и 4.

Здесь множество  $W_i$  ( $W_1$ ) состоит из вершин 2, 3, 4; множество  $Next(W_i) \subseteq W_j$  ( $W_2$ ) – из вершин 9 и 10, а множества  $W_0$  и  $W_{k+1}$  ( $W_3$ ) – из вершин 1 и 12, соответственно.

Предлагаемые модели МПВ решений в ТС проверялись на примере решения задачи оптимизации двухпродуктового отделения кристаллизации в производстве сахара-песка.

Отделение кристаллизации сахарных заводов служит для извлечения сахарозы из кипящих пересыщенных растворов в вакуум-аппаратах (ВА) периодического действия при низкой температуре и отделения кристаллического сахара на центрифугах.

Основным показателем сахарного производства является поцентное отношение выхода сахара к массе переработанной свеклы. Чем выше это отношение, тем большее количество сахарозы извлекается из исходного сырья. Повышение выхода сахара-песка достигается за счет уменьшения потерь сахарозы на всех стадиях технологического процесса (ТП) и, в частности, с мелассой, являющейся отходом производства, в процессе варки сахара в продуктовом отделении. Это достигается, например, за счет оптимального ведения ТП.

Структурно-технологическая схема двухпродуктового кристаллизационного отделения в виде ориентированного графа представлена на рисунке 6.

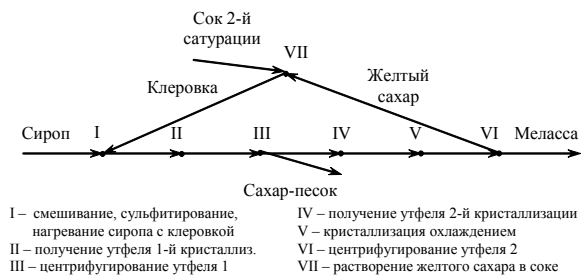


Рисунок 6. Структурно-технологическая схема в виде ориентированного графа

Как видно из рисунка 6, ТП имеет контур материального потока – возврат раствора желтого сахара (клеровки) со стадии VI на уваривание утфеля 1 (стадия II) через стадию I, где происходит операция смешивания, и другие операции, сиропа с клеровкой.

Отделение должно функционировать в таком режиме, чтобы разность доброкачественности сиропа с выпарной станции и мелассы была как можно больше. В данном случае задача оптимизации процесса кристаллизации заключалась в выборе из множества

возможных управляющих воздействий, при постоянной структуре ТП, некоторой совокупности альтернативных вариантов, оптимальных по следующим основным аддитивным критериям эффективности: разность доброкачественности продуктов на входе и выходе каждой стадии ТП  $x_1 \rightarrow \max$ ; энергозатраты  $x_2 \rightarrow \min$ ; время обработки  $x_3 \rightarrow \min$ . Аддитивность каждого критерия объясняется возможностью их использования как для характеристики отдельных стадий, так и всего варианта ТП.

В качестве управляющих воздействий на стадиях были выбраны следующие:

- количество сиропа с клеровой;
- количество подкачиваемого сока в ВА 1-го продукта;
- количество воды на промывку сахара 1 в центрифугах;
- количество подкачиваемого раствора в ВА 2-го продукта;
- количество воды, подаваемой в мешалку-кристаллизатор;
- температура утфеля 2, подаваемого на центрифуги;
- количество сока 2-й сатурации, подаваемого на растворение желтого сахара.

В связи с тем, что для продуктового отделения из-за сложности протекающих здесь процессов отсутствуют модели в аналитическом виде, для расчетов значений критериев на стадиях ТП использовались данные, полученные на основе текущей производственной ситуации и опыта технолога завода, выступавшего в данном случае в качестве эксперта. На их основе был построен граф вариантов управляющих воздействий ТП отделения – граф обобщенной структуры, приведенный на рисунке 7 в сокращенном виде, с заданными на его дугах количественными оценками критериев эффективности.

Здесь обозначения I, II, III, ..., VII – стадии ТП, соответствующие обозначениям рисунку 6. Численные значения управляющих воздействий и их количество на каждой стадии процесса, а, следовательно, количество и численные значения вершин зависели от выбранного шага дискретизации и были заданы экспертом. При этом каждая вершина  $i$ -й стадии соединялась дугой с каждой вершиной  $i+1$  стадии и имела свой сквозной, в пределах всего графа, порядковый номер, где вершины 1, 52 – начальная и конечная соответственно. Кроме того, на графе обозначены:  $W_1$  – подмножество вершин графа, представляющее собой совокупность однотипных вершин, соответствующих месту входа кон-

тура технологического потока;  $W_2$  – подмножество вершин графа, соответствующих разветвлению технологического потока;  $W_0, W_3$  – подмножества, состоящие из одного элемента – начальной и конечной вершин, соответственно.

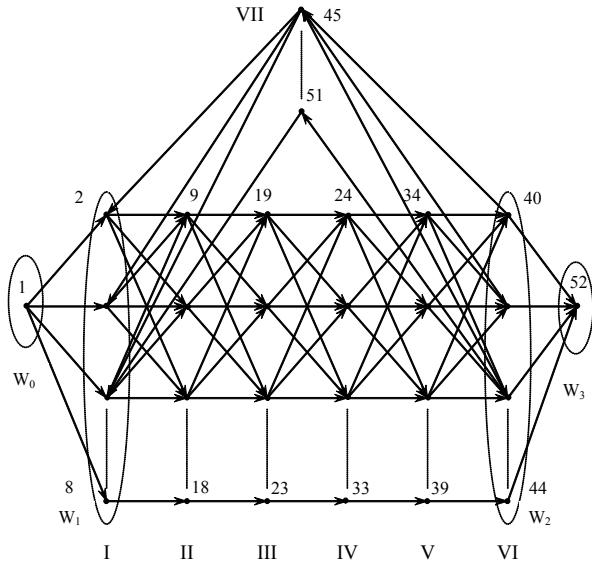


Рисунок 7. Граф вариантов управляющих воздействий ТП (фрагмент)

В связи с тем, что ТП имеет контур материального потока, была произведена декомпозиция исходного графа на ациклические подграфы по подмножествам вершин  $W_i$ . В каждом таком подграфе, используя многокритериальные алгоритмы (на основе метода динамиче-

ского программирования [1, 2]) поиска нехудших путей, например, в бесконтурном графе, был проведен поиск эффективных вариантов путей между всеми парами вершин из смежных подмножеств  $W_i$  этих графов. С помощью обобщенного алгоритма, численная схема которого описана выше, проводилось объединение полученных эффективных фрагментов путей.

В результате было получено 67 интегральных вариантов решений, каждый из которых характеризовался совокупностью оценок критериев, полученных, в силу условия аддитивности, накладываемого на каждый критерий, сложением оценок отдельных фрагментов. Среди полученных решений были неэффективные, которые необходимо было отбросить. Используя для отсева “худших” вариантов отношение Парето, было получено множество эффективных интегральных путей, состоящее из 38 вариантов, из которого нужно было выбрать несколько результирующих эффективных решений. Каждому такому решению соответствовал вариант значений управляющих воздействий на стадиях ТП. Полученные результаты экспертом были признаны удовлетворительными.

Анализ полученных данных позволяет сделать вывод о возможности применения предлагаемых в работе моделей МПВ при решении задачи оптимизации двухпродуктового отделения кристаллизации в производстве сахара-песка.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Бугаев Ю.В. Применение прямого обобщения скалярных алгоритмов в векторной оптимизации на графах // Дискретная математика. 2001. Т. 13. № 3. С. 110-124.
- 2 Бугаев Ю.В., Блинов И.В., Чикунов С.В. Обобщение алгоритма Флойда–Уоршалла на случай нескольких критериев // Вестник ТГТУ. 2009. Т. 15. № 4. С. 885-892.
- 3 Николаев В.И., Брук В.М. Системостроение: методы и приложения. Л.: Машиностроение, 1985. 199 с.
- 4 Сысоев В.В. Структурные и алгоритмические модели автоматизированного проектирования производства изделий электронной техники. Воронеж: ВТИ, 1993. 207 с.

## REFERENCES

- 1 Bugaev Yu.V. Application of a direct generalization of scalar algorithms in vector optimization on graphs. *Diskretnaia matematika*. [Discrete Mathematics], 2001, vol. 13, no. 3, pp. 110-124. (In Russ.).
- 2 Bugaev Yu.V., Blinov I.V., Chikunov S.V. Generalization of Floyd-Warshall algorithm in case of several criteria. *Vestnik TGTU*. [Bulletin of TSTU], 2009, vol. 15, no. 4, pp. 885-892. (In Russ.).
- 3 Nikolaev V.I., Bruk V.M. *Sistemotekhnika: metody i prilozheniia* [Systems engineering: methods and applications]. Leningrad, Mashinostroenie, 1985. 199 p. (In Russ.).
- 4 Sysoev V.V. *Strukturnye i algoritmicheskie modeli avtomatizirovannogo proektirovaniya proizvodstva izdeli elektronnoi tekhniki* [Structural and algorithmic models of computer-aided design of electronic equipment production]. Voronezh, VTI, 1993. 207 p. (In Russ.).