

УДК 519.81

Профессор Ю.В. Бугаев, доцент И.Е. Медведкова,
аспирант М.К. Бабаян
(Воронеж.гос. ун-т. инж. технол.) кафедра информационные технологии
моделирования и управления. тел. (473) 255-25-50
E-mail: mixabmk@gmail.com

Professor Iu.V. Bugaev, associate Professor I.E. Medvedkova,
graduate M.K. Babaian
(Voronezh state university of engineering technology) Department of information technolo-
gies for modeling and management. phone (473) 255-25-50
E-mail: mixabmk@gmail.com

Методы проверки транзитивности индивидуальных экспертных предпочтений

Methods of test for transitivity of individual expert preferences

Реферат. Результатом обработки экспертной информации является построение бинарного отношения предпочтения, на основе которого будет осуществляться выбор. Одним из важнейших свойств такого отношения является транзитивность. Однако в силу несовершенности человеческой системы переработки информации, при оценивании выборки в результат вносятся случайные ошибки, вследствие которых может возникать нетранзитивность и противоречивость в предпочтениях. Во многом проблема нарушения транзитивности индивидуального экспертного ранжирования связана с тем, что эксперт, сравнивая альтернативы попарно, вообще говоря, не обязан думать о том, как соотносятся эти альтернативы со всеми остальными. При этом велика вероятность нарушения согласованности предпочтений, которые делают бесполезной дальнейшую обработку результатов экспертизы. В данной работе предлагаются: новый универсальный алгоритм оценки транзитивности отношения экспертных предпочтений при упорядочении исходной выборки альтернатив на порядковой шкале; модифицированный алгоритм оценки непротиворечивости экспертных суждений и построения структурных матриц всевозможных экспертных предпочтений между всеми парами альтернатив выборки, ранжирование которой осуществляется на разностно-классификационной шкале. Базовая идея алгоритма состоит в том, чтобы на основе вспомогательных матриц парных индивидуальных сравнений альтернатив выборки обеспечить не только проверку профиля экспертных упорядочений на транзитивность, но и, по окончании опроса экспертов, сформировать структурные матрицы всевозможных предпочтений между всеми парами альтернатив выборки. Данные алгоритмы используют исходную информацию в виде матрицы парных индивидуальных сравнений альтернатив выборки. В статье приведены иллюстрирующие примеры работы вышеупомянутых алгоритмов.

Summary. Result of expert information processing is to construct a binary preference relation on the basis of which will be the choice. One of the most important properties of this relationship is transitive. However, due to the incompleteness of the human information processing system, when evaluating the sampling results are random errors, due to which may occur intransitive and inconsistency in preferences. Largely a problem of violations of transitivity individual expert ranking stems from the fact that the expert, comparing alternatives in pairs, generally speaking, is not obliged to think about how to relate these alternatives with all other. In this case it is likely a violation of consistency preferences that make useless the further processing of examination results. In this paper we propose: new universal algorithm for estimating transitive relations expert preferences when ordering of the original sample of alternatives on ordinal scale; modified algorithm for estimating the consistency of expert judgment and construction of structural matrices of various expert preferences between all pairs of alternatives sample which the ranking on difference- classification scale. The basic idea of the algorithm is to on the basis of the support matrices of paired comparisons of individual alternatives to sample to provide not only a review of profile expert orderings on the transitivity, but at the end of the survey of experts to form the structural matrix of all possible preferences between all pairs of sampling alternatives. These algorithms make use of the original information in the form of a matrix of paired comparisons of alternatives to individual sample. The article gives examples illustrating the operation of the above algorithms.

Ключевые слова: альтернатива, коллективный выбор, транзитивность экспертных предпочтений

Keywords: alternative, a collective choice, transitivity of expert preferences

В теории выбора при построении отношения предпочтения, на основе которого будет осуществляться выбор, предъявляется ряд требований к свойствам, которыми должно обладать это отношение. Одним из важнейших свойств является транзитивность: когда одно

решение предпочтительнее второго, а оно, в свою очередь, предпочтительнее некоторого третьего решения, то при сравнении первого и третьего решения, здравомыслящий человек выберет первое решение.

© Бугаев Ю.В., Медведкова И.Е., Бабаян М.К., 2014

Следует отметить, что при формировании коллективного выбора требование транзитивности профиля предпочтений может нарушаться. Это считается нормальным, т.к. является следствием несовпадения индивидуальных мнений экспертов. Однако в индивидуальном предпочтении оно недопустимо. Поэтому, если мы хотим иметь теорию, в рамках которой осуществляется «наилучший» выбор, то индивидуальные предпочтения должны удовлетворять аксиоме транзитивности, в противном случае вполне может существовать множество решений, выбрать наилучшее из которых невозможно.

В работе [1] вопросу проверки нетранзитивности индивидуальных предпочтений уделено достаточно внимания. В частности, показана связь между нетранзитивностью и пустотой относительной внутренности области допустимых коэффициентов постулируемой функции обобщённого критерия. В настоящей же работе предлагаются более универсальные подходы (далее I и II), не связанные с допущением о существовании какого-либо обобщённого критерия, а использующие исходную информацию в виде матрицы парных индивидуальных сравнений альтернатив выборки.

I). Из теории бинарных отношений известно следующее: если бинарное отношение антирефлексивно и транзитивно, то оно ациклично. Обозначим свойства антирефлексивности, транзитивности и ацикличности буквами A, B, C , соответственно. Тогда данное свойство можно символически представить в виде следующей формулы алгебры высказываний:

$$A \wedge B \rightarrow C,$$

или в приведённой форме[^]

$$\neg A \vee \neg B \vee C.$$

К последней формуле приводится также выражение:

$$\neg C \wedge A \rightarrow \neg B,$$

которое означает нетранзитивность циклического и антирефлексивного отношения.

Если в индивидуальных предпочтениях исключить повторения альтернатив выборки, то антирефлексивность отношения предпочтения достигается автоматически. Следовательно, при наличии антирефлексивности транзитивность эквивалентна ацикличности.

Очевидно, если $C[r]$ – структурная матрица предпочтений r -го эксперта, то $-C[r]^T$ представляет собой матрицу инцидентий графа G , соответствующего отношению индивидуального предпочтения. Если ранжирование проводилось

на порядковой шкале, то этот граф является турниром (турнир – полный ориентированный граф). Если этот граф содержит контур, то, очевидно, индивидуальное предпочтение циклично, т.е. не удовлетворяет выдвинутым требованиям.

Существует несколько методов проверки наличия контура в графе. Изложим один, основанный на следующих очевидных свойствах графа:

- в бесконтурном графе существует хотя бы одна вершина, в которую не заходит ни одна дуга;

- такая вершина не может принадлежать контуру;

- если из графа исключить такую вершину и инцидентные ей дуги, то имеющийся в графе контур останется без изменения.

Таким образом, алгоритм состоит в последовательном исключении из графа вершин, в которые не заходит ни одна дуга. Если на очередном шаге таких вершин не окажется, то граф содержит контур. Если из графа будут удалены все вершины, то граф не содержит контуров.

Предлагается текст программы на входном языке системы Matlab, использующей матрицу инцидентий.

```
function P=Kontur(C1)
% Поиск контуров в орграфе. C1 – матрица смежности
C=-C1;
Y=true;
while (~isempty(C))& Y
    [nn,mm]=size(C);
    Y=false;
    foru=1:nn
        ifall(C(u,:)>=0) % Вершина u не имеет входящей дуги
            Y=true;
            h=find(C(u,:)==1);
            C(:,h)=[];
            C(u,:)=[];
            break;
        end
    end
end
if Y
    display('КОНТУРОВНЕТ');
    P=false;
else
    display('КОНТУРЕСТЬ');
    P=true;
end
```

Вычислительная сложность алгоритма оценивается величиной $O(n \cdot m)$, где n, m – число вершин и дуг графа, соответственно, т.к.

необходимо однократно просмотреть все элементы матрицы инцидентий.

Рассмотрим пример графа, содержащего замкнутый контур (рисунок 1):

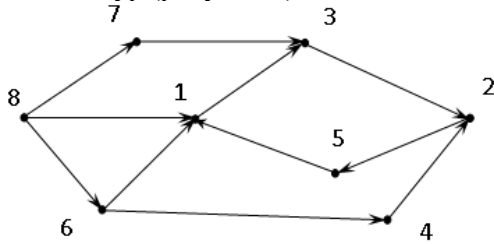


Рисунок 1. Граф, содержащий замкнутый контур

Матрица инцидентий этого графа имеет вид:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Вызываем программу:

P=Kontur(D);

ans = КОНТУР ЕСТЬ

Теперь рассмотрим пример графа без контуров (рисунок 2):

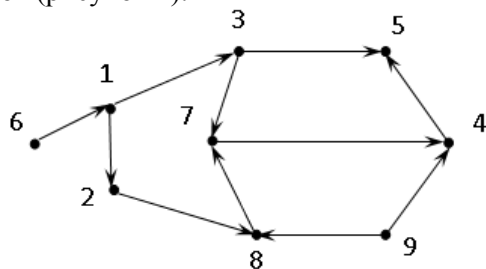


Рисунок 2. Граф без замкнутых контуров

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

P1=Kontur(F);

ans = КОНТУРОВ НЕТ.

II). Во многом проблема нарушения транзитивности индивидуального экспертного ранжирования связана с тем, что эксперт, сравнивая альтернативы попарно, вообще говоря, не обязан думать о том, как соотносятся эти альтернативы со всеми остальными. При этом велика вероятность нарушения согласованности предпочтений, которые делают бесполезной дальнейшую обработку результатов экспертизы.

Для решения указанной проблемы в [2] используется следующий алгоритм (назовём его «Алгоритм 1»):

1). На основе указанных r -ым экспертом пар предпочтений и эквивалентности строится вспомогательная матрица $Y[r]$ (размерности $n \times n$, где n - количество альтернатив выборки), по которой осуществляется предварительная оценка результатов его опроса. Значения Y_{ij} , устанавливающие отношения между парой альтернатив (A_i, A_j) , причём $i \neq j$ определяются следующим образом:

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } A_i \succ A_j; \\ -1, & \text{если } A_j \succ A_i; \\ 0, & \text{если } A_i \approx A_j. \end{cases} \quad (1)$$

Далее в ходе проведения экспертного опроса, с учётом требований достижения транзитивности упорядочения альтернатив, в матрицу Y добавляются новые соотношения между объектами согласно (1) и правилам, приведённым в таблице 1, где:

$$i = \overline{1, n}, j_1 = \overline{1, n}, j_2 = \overline{1, n}.$$

Т а б л и ц а 1

Правила, устанавливающие отношения между альтернативами согласно требованию достижения транзитивности экспертных предпочтений при ранжировании выборки на порядковой шкале

Y_{ij_1}	Y_{ij_2}	$Y_{j_1 j_2}$
0	-1	-1
1	-1	-1
0	1	1
-1	1	1
1	0	-1
-1	0	1
0	0	0
-1	-1	0
1	1	0

2). В том случае, если добавляемое в матрицу Y соотношение уже имеет значение, полученное на предыдущих этапах построения вспомогательной матрицы, производится генерация уведомления о нарушении условия транзитивности экспертного ранжирования;

3). Экспертное упорядочение будет считаться полным, если все Y_{ij} ($i \neq j$) будут заполнены согласно правилам (таблица 1).

В результате проведения экспертного опроса должны быть сформированы матрицы $C[r]$, отражающие структуру предпочтений каждого r -го эксперта. Причём, в идеале такие матрицы должны содержать всевозможные предпочтения между всеми парами альтернатив выборки (далее такие структурные матрицы будем называть – «полными»).

Таким образом, помимо выполнения условия транзитивности, необходимо чтобы построенные матрицы $C[r]$ отражали всевозможные отношения между всеми парами альтернатив из исходной выборки.

Применение Алгоритма 1 корректно решает обе вышеприведённые проблемы, если упорядочение альтернатив проводится экспертами с использованием порядковой шкалы. Однако, если количество альтернатив достаточно велико и их ранжирование производится экспертами на лингвистической шкале [3, 4], более сильной по сравнению с порядковой, то построение полных $C[r]$ существенно усложняется. (Поскольку название «лингвистическая шкала» может привести к неверной мысли об использовании лингвистической переменной Л. А. Заде, то в дальнейшем будем называть её *разностно-классификационной* или *РК-шкалой*).

Вследствие чего, нами предложена модификация Алгоритма 1 (назовём её «Алгоритм 2»), которая позволяет осуществлять проверку условия транзитивности экспертных предпочтений и формировать полные структурные матрицы всевозможных предпочтений $C[r]$ при упорядочении альтернатив на РК-шкале. Применение РК-шкалы позволяет значительно повысить точность статистических оценок полезностей альтернатив и состоит в следующем.

Пусть для пары альтернатив (A_i, A_j) эксперт способен оценить величину разности в их полезности. На основании такой оценки пара должна быть отнесена к одному из классов $Q_0, Q_1, \dots, Q_s$ каждый из которых характеризуется определенной степенью различия в полезности A_i и A_j . Например, принадлежность $(A_i, A_j) \in Q_0$ будем соотносить с ситуацией неразличимости по полезности A_i и A_j . Следующий класс Q_1 соответствует уровню «малое» превосходство A_i над A_j и т. д. по порядку возрастания силы превосходства.

Алгоритм 2 при упорядочении выборки на РК-шкале состоит в следующем:

1). На основе указанных r -ым экспертом пар предпочтений строится вспомогательная

матрица $Y[r]$. Значения матрицы Y_{ij} , устанавливающие отношения между парой альтернатив $((A_i, A_j))$, причём $i \neq j$ определяются следующим образом:

$$Y_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{если } (A_i, A_j) \in Q_2; \\ 1, & \text{если } (A_i, A_j) \in Q_1; \\ 0, & \text{если } (A_i, A_j) \in Q_0; \\ -1, & \text{если } (A_j, A_i) \in Q_1; \\ -2, & \text{если } (A_j, A_i) \in Q_2. \end{cases} \quad (2)$$

Далее с учётом требований достижения транзитивности предпочтений в Y добавляются новые соотношения между объектами согласно (2) и правилам, приведённым в таблице 2,

где $i = \overline{1, n}$, $j_1 = \overline{1, n}$, $j_2 = \overline{1, n}$.

Т а б л и ц а 2

Правила, устанавливающие отношения между альтернативами согласно требованию достижения транзитивности экспертных предпочтений при ранжировании выборки на РК-шкале

$Y_{i j_1}$	$Y_{i j_2}$	$Y_{j_1 j_2}$
2	2	0
2	1	-1
2	0	-2
2	-1	-2
2	-2	-2
1	1	0
1	2	1
1	0	-1
1	-1	-2
1	-2	-2
0	0	0
0	2	2
0	1	1
0	-1	-1
0	-2	-2
-1	-1	0
-1	2	2
-1	1	2
-1	0	1
-1	-2	-1
-2	-2	0
-2	2	2
-2	1	2
-2	0	2
-2	-1	1

2). В том случае, если добавляемое в матрицу Y соотношение уже имеет значение, полученное на предыдущих этапах построения вспомогательной матрицы, производится генерация уведомления о нарушении условия транзитивности экспертного ранжирования;

3). Экспертное упорядочение будет считаться полным, если все Y_{ij} ($i \neq j$) будут заполнены согласно правилам (таблица 2).

4). После окончания опроса эксперта на основе матрицы Y формируется полная структурная матрица его всевозможных предпочтений $C[r]$.

Таким образом, идея Алгоритма 2 состоит в том, чтобы на основе вспомогательных матриц $Y[r]$ обеспечить не только проверку индивидуальных экспертных предпочтений на транзитивность, но и по окончании опроса экспертов сформировать полные матрицы $C[r]$ всевозможных предпочтений между всеми парами альтернатив выборки.

Предлагается текс функции на входном языке системы Matlab, осуществляющей построение полной матрицы $C[r]$ на основе вспомогательной матрицы $Y[r]$.

Предположим, что изначально все элементы матрицы $Y[r]$ имеют значение k , отличное от значений, которые может принимать величина Y_{ij} в выражении (2).

```
function C=Struct_matr(Y);
% C—полная структурная матрица экспертного упорядочения
M_sum=[];
C=[];
M_sum=sum(Y')-k;
[elem,index]=sort(M_sum,'descend');
C=nchoosek(index,2); % сочетания без
повторений
C(:,3)=0;
for j=1:length(C),
    C(j,3)=Y(C(j,1),C(j,2));
end
```

Приведём иллюстрирующий пример работы Алгоритма 2.

Пример 1. Пусть r -ый эксперт предложил следующее упорядочение пяти альтернатив на РК-шкале:

$$\begin{bmatrix} (A_1, A_2) \in Q_1 \\ (A_2, A_3) \in Q_2 \\ (A_3, A_4) \in Q_1 \\ (A_4, A_5) \in Q_0 \end{bmatrix} \quad (3).$$

Предположим, что вспомогательная матрица $Y[r]$ инициализируется следующим образом:

$$Y^{(r)} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Далее покажем, как будет изменяться вид матрицы $Y[r]$ с учётом требований достижения транзитивности упорядочения альтернатив, при последовательном добавлении экспертом предпочтений из ранжирования (3).

1) $(A_1, A_2) \in Q_1$:

$$Y^{(r)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

2) $(A_2, A_3) \in Q_2$:

$$Y^{(r)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

3) $(A_3, A_4) \in Q_1$:

$$Y^{(r)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

4) $(A_4, A_5) \in Q_0$:

$$Y^{(r)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Согласно шагу 3 Алгоритма 2 экспертное упорядочение будет считаться полным.

Затем вызывается вышеприведённая функция «Struct_matr», которая на основе полученной вспомогательной матрицы $Y[r]$ формирует полную структурную матрицу всевозможных предпочтений эксперта $C[r]$:

$$C^{(r)T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, в данной статье приведены алгоритмы, обеспечивающие проверку индивидуальных экспертных предпочтений на непротиворечивость при упорядочении исходной выборки альтернатив на порядковой и разностно-классификационной шкале.

Работа поддержана грантом РФФИ №14-01-00653-А «Разработка и исследование процедур коллективного выбора на необозримом для ЛПР множестве альтернатив».

ЛИТЕРАТУРА

1 Черняева С.Н. Синтез моделей индивидуального выбора на основе избыточности экспертной информации: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Воронеж: ВГТА, 2010. 142 с.

2 Белоусов К.Н. Алгоритмическое обеспечение проверки непротиворечивости экспертных оценок // Фундаментальные исследования. 2007. № 12. С. 274–276.

3 Никитин Б. Е., Бугаев Ю. В. К вопросу о выявлении предпочтений ЛПР на лингвистической шкале // Теория конфликта и ее приложения. I Всероссийская научно-техническая конференция. Воронеж: ВГТА, 2000. С. 23–24.

4 Бугаев, Ю. В. , Миронова М. С., Никитин Б. Е., Чайковский А. С. Система поддержки принятия решений на основе экстраполяции экспертных оценок методом максимального правдоподобия // Вестник БГТУ. 2010. №1. С.84–90.

REFERENCES

1 Cherniaeva S. N. Sintez modeleji individual'nogo vybora na osnove izbytochnosti ekspertnoi informatsii. Diss. kand. fiz.-mat. nauk [Synthesis of models of individual choice based on expert information redundancy. Cand. phys. and math. sci. diss.]. Voronezh, 2010, 142 p. (In Russ.).

2 Belousov K. N. Algorithmic support consistency checks expert assessments. *Fundamental'nye issledovaniia*. [Fundamental research], 2007, no. 12, pp. 274–276. (In Russ.).

3 Nikitin B. E., Bugaev Iu. V. On the question of identifying the decision maker preferences on a linguistic scale. *Teoriia konflikta i ee prilozheniia*. I Vserossiiskaia nauchno-tekhnicheskaia konferentsiia [Conflict theory and its applications. I All Russian scientific and engineering conference] Voronezh, 2000, pp. 23–24. (In Russ.).

4 Bugaev Iu.V., Mironova M.S., Nikitin B.E., Chaikovskii A. S. Decision support system based on an extrapolation of expert estimates the maximum likelihood method. *Vestnik BGTU*. [Bulletin of BSTU], 2010, no. 1, pp. 84–90. (In Russ.).