УДК 663.938.8

Доцент С.А. Быков
(Елецкий гос. ун-т им. И.А. Бунина) кафедра автоматизированных систем управления и математического обеспечения, тел. (47467) 2-28-37

К анализу теории математической модели гидродинамики насыпного слоя смеси растительных материалов

Выявлена зависимость между динамической порозностью работающего аппарата, статической порозностью и степенью заполнения аппарата. Представлена законченная математическая модель расчета порозности – важного гидродинамического параметра слоя материала при фильтрации через него экстрагента. Разработана универсальная методика определения гидродинамических характеристик слоя измельчённого растительного материала, применимая для любых соответственным образом обработанных растительных материалов и их смесей.

The article presents the results of research work on finding out the interdependence between the dynamic separation of the working apparatus (machine), statistic separation and the degree of filling the apparatus (machine). The final mathematic model of calculating separation - an important hydrodynamic parameter of a layer of vegetable material while extragent is being filtrated through it. The authors worked out a universal method of defining hydrodynamic characteristics of a layer of material which can be applied to any vegetable materials and their mixtures worked up as required.

Ключевые слова: динамическая, статическая порозность, степень заполнения аппарата, гидродинамические характеристики слоя измельчённого растительного материала.

Гидродинамическая обстановка в массообменных аппаратах во многом определяется удельным заполнением аппарата экстрагируемым материалом и его свойствами, которые влияют на гидродинамическое сопротивление слоя в аппарате.

При определении эффективного гидравлического диаметра каналов во взвешенных слоях измельченного растительного сырья необходимо учитывать гидравлическое сопротивление слоя материала, расход экстрагента в зависимости от времени, а также порозность измельченного растительного материала.

Применим теорию размерностей к анализу уравнений движения через насыпной слой. Подробный анализ опубликованных работ по исследованию гидродинамичности насыпного слоя приводит к выводу, что взаимосвязь потери напора с физическими свойствами системы выражается общим уравнением:

$$\frac{q\Delta pd}{LW^2\rho}=F_1\left(\frac{dW\rho}{\mu}\right)F_2(\varepsilon)F_3(\varphi)F_4\left(\frac{d}{D}\right)F_5\left(\frac{l}{d}\right)F_6(\beta),$$

где d – величина или группа величин, характеризующая линейные размеры слоя; W – некоторая величина или группа характеризующая скорость; $F_1\left(\frac{dW\rho}{\mu}\right)$– безразмерная группа, известная как критерий Re; $F_2(\varepsilon)$ – функция, характеризующая влияние пористости слоя; $F_3(\varphi)$– влияние формы кусков; $F_4\left(\frac{d}{D}\right)$– влияние стенок аппарата; $F_5\left(\frac{l}{d}\right)$– влияние шероховатости частиц; $F_6(\beta)$– влияние ориентации частиц. Исключение этих переменных приводит к упрощённому выражению:

$$\frac{q\Delta pd}{L\omega^2\rho}=\phi\left(\frac{dW\rho}{\mu}\right), \quad (1)$$

$$f=\varphi(\mathrm{Re}),$$

где f – некоторый безразмерный параметр, названный фактором (коэффициентом) трения.

Влияние формы частиц $F_3(\varphi)$. Предлагаются следующие формулы, учитывающие влияние формы частиц:

– для частиц сферической формы

$$S_0 = \frac{6}{d},$$

– для частиц любой формы

$$S_0 = \frac{6}{d\varphi}.$$

М. Лева предлагает коэффициент формы $\lambda = 0{,}205\frac{A}{V^{2/3}}$, где A – средняя поверхность частиц, V – её средний объем [4].

Д.К. Коллеров применил величину фактора $\varphi_з = \frac{d_в^2}{d_с d_n^2}$ [0].

В уравнении, которое получил Роуз [6], на основе анализа размерностей член учитывает влияние формы

$$F_3\left(\frac{l_{\max}}{l_{\min}} + \frac{A_h}{A_s}\right),$$

где $l_{\max}$ – максимальный размер частиц; $l_{\min}$ – минимальный размер; A_h – площадь поперечного сечения отверстий в частице (седла Берна); A_s – средняя площадь проекции частицы на плоскость, перпендикулярная оси отверстий.

Рассмотренный фактор формы показывает, что необходимость введения в расчетное уравнение факторов формы с целью унификации опытных данных появляется только в случае замены удельной поверхности на диаметр частиц. Одни авторы определяли диаметр как среднюю величину между размерами отверстий сит, на которых задерживались частицы $d_с$. По другому, за диаметр частицы принимается диаметр шара объемом, равным фактическому объему частицы $d_в$, и, наконец, по третьему способу диаметр принимался как диаметр шара, поверхностью, равной фактической поверхности частицы $d_{пр}$.

Влияние шероховатости частиц $F_5\left(\frac{l}{d}\right)$**.** Специальные исследования влияния шероховатости частиц на сопротивление слоя проводил М. Лева [4]. Он также воспользовался данными Омана и Ватсона [5]. Исследованию подверглись слои частиц с различной степенью шероховатости. С относительно гладкой поверхностью принято стекло и цемент, более шероховатые – глина, алунд и еще более шероховатые – алоксит (минерал) и гранулы из окиси магния. Данные исследования М. Лева представил в виде общего уравнения потери напора:

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{KW^{1,9}\mu^{0,1}\lambda^{1,1}(1-\varepsilon)}{g_С d_С^{1,1}\rho\varepsilon^3}$$

Величина коэффициента K изменялась: для гладких частиц K=3,5, для шероховатых K=5,25 и для очень шероховатых $K\approx 8$.

Броунель и Кац [3] воспользовались методом учета влияния шероховатости поверхности частиц посредством отношения $\frac{l}{d}$ и дали расчетную формулу в зависимости $f = \phi(\mathrm{Re})$. Величина $\frac{l}{d}$ является относительной высотой выступов на поверхности частиц, причем учет высоты выступов производится с весьма относительной точностью.

Ориентация частиц – $F_6(\beta)$**.** Если уравнение Козени-Кармана применить для двух различных типов упаковки с одинаковой величиной пористости, то:

$$\frac{\Delta p_1}{p} = \frac{L_{g1}/L}{L_g/L} = \frac{L_{g1}}{L_g} \qquad (2)$$

или

$$\frac{\Delta p}{L_g} = \frac{\Delta p_1}{L_{g1}} = \frac{\Delta p_2}{L_{g2}} \qquad (3)$$

Соотношение (3) показывает, что изменение сопротивления слоя с одинаковой пористостью при изменении ориентации частиц будет обратно пропорционально изменению фактической длины каналов, если не будет дополнительного влияния изменения поверхности частиц вследствие образования плоскостных контактов:

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta p_2} = \left(\frac{L_{g1}}{L_{g2}}\right)^n, \qquad (4)$$

где при n=1 – вязкий поток; n=2 – чисто турбулентный; 1<n<2 – промежуточная область.

Попытку более полно характеризовать гидравлическое сопротивление насыпного слоя на основании принципа анализа размерностей сделал Роуз [6].

Кроме пористости слоя ε и размера частиц d, Роуз дополнительно ввел параметры, характеризующие шероховатость поверхности частиц E, форму частиц, образующих слой Z, равномерность распределения частиц (ориентация) по сечению аппарата U. В этом случае общая зависимость приобретает вид:

$$H = \phi\left(W^{\alpha}, L^{\beta}, d^{\gamma}, \rho^{\delta}, D^{l}, \mu^{\theta}, g^{r}, \varepsilon^{\lambda}, E^{\mu}, Z^{\sigma}, U^{w}\right). \qquad (5)$$

Преобразуя уравнение (5) в соответствии с принципами анализа размерностей (применяя систему МКС), получим общее уравнение для несжимаемых жидкостей в следующем виде:

$$\frac{H}{d}=\phi\left(\frac{W\rho d}{\mu}\right)^{\theta}\left(\frac{dg}{W^2}\right)^{r}\left(\frac{L}{d}\right)^{\beta}\left(\frac{D}{d}\right)^{l}\left(\frac{E}{d}\right)^{\mu}\varepsilon^{\lambda}Z^{\sigma}U^{w},$$

где $\frac{H}{d}$ – потеря напора, отнесенная к линейному размеру частицы.

Роуз экспериментально исследовал это уравнение. Первые его опыты были проведены со стальной калиброванной дробью одного размера. Применение частиц одинаковых размеров сферической формы с гладкой поверхностью исключало параметры *E/d*, *Z* и *U*. При этом исследуемая зависимость приобретала вид:

$$\frac{H}{d}=\phi\left(\frac{dW\rho}{\mu}\right)^{\theta}\left(\frac{dg}{W^2}\right)^{r}\left(\frac{L}{d}\right)^{\beta}F_1(\varepsilon)F_2\left(\frac{D}{d}\right). \qquad (6)$$

После такого обращения Роуз исследовал взаимосвязь $\frac{H}{d}$ с каждой группой в отдельности, сохраняя, по возможности, постоянство остальных групп. Опыты проводились при скоростях, при которых группа переменных $\frac{dg}{W^2}$ имела значение 1 при /*r*=0/. Для сферических частиц можно принять β=1. Это дало возможность установить соотношение $\frac{H}{d}=\phi\left(\frac{Wd\mu}{\mu}\right)$. Здесь выражение для диаметра частиц находилось из соотношения $\frac{S}{V}=\frac{\text{Ï ëî ù ø àðà}}{\text{Î áúåì ø àðà}}$ или $\frac{6\pi d^2}{\pi d^3}=6/d \Rightarrow d=\frac{6V}{S}$. В уравнении (6) член $F_2(\frac{D}{d})$ определяется графически в виде $\frac{H}{d}=f(\frac{D}{d})$; $\frac{\Delta p_1}{\Delta p_2}=f\left(\frac{D}{d}\right)$; $\frac{H}{d}=\Delta p$.

В результате графической обработки большого количества экспериментов [6] Роуз показал, что для ламинарного потока $f=\frac{c}{\mathrm{Re}}$ при c=100.

В [6] Роуз уточнил уравнение и представил его в виде:

$$\frac{H}{d}=\phi\left(\frac{W^2}{dg}\right)\left(\frac{L}{d}\right)F_1(\varepsilon)F_2\left(\frac{D}{d}\right)F_3\left(\frac{l_{\max}+A_h}{l_{\min}+A_s}\right), \qquad (7)$$

где $F_3\left(\frac{l_{\max}+A_h}{l_{\min}+A_s}\right)$ – учитывает влияние формы частиц.

Путем обработки данных большого числа экспериментов Роуз показал, что с учетом всех переменных групп уравнения (7) фактор сопротивления слоя при движении несжимаемой жидкости является функцией числа Re. При 0<Re<100 эта функция выражается:

$$\varphi=\left[\frac{1000}{\mathrm{Re}}+\frac{125}{\sqrt{\mathrm{Re}}}+14\right] \qquad (8)$$

При Re>100:

$$\varphi=\left[\frac{1000}{\mathrm{Re}}+\frac{230}{\sqrt{\mathrm{Re}}}+16\right]. \qquad (9)$$

Эмпирические уравнения (8) и (9) выражают зависимость $\frac{H}{d}=\phi(\mathrm{Re})$. Члены $\frac{125}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$ и $\frac{230}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$ являются просто эмпирической поправкой.

Таким образом, работы Роуза показали, что несмотря на учет многих гидродинамических параметров метод анализа размерностей не дает уравнения, полностью характеризующего закономерности движения через насыпной слой, а приводит к эмпирическим уравнениям. Уравнения (8) и (9) не имеют преимуществ перед уравнениями других исследований.

Была приведена математическая модель расчёта геометрических характеристик слоя смеси измельчённых растительных материалов. В предыдущих работах [1] автором была получена формула для определения эквивалентного диаметра межпорового пространства слоя (10):

$$d_{\text{ÝÊ}}=\hat{O}_1\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\hat{E}}}, \qquad (10)$$

где Φ_1 – безразмерная величина, зависящая от геометрических параметров экспериментальной установки и модельных тел; ε – порозность слоя; K – коэффициент отношения модели к реальному процессу. В том виде, в каком (10) записана, применять ее не представляется возможным, так как не определена порозность слоя измельчённого растительного материала. Итак, порозность слоя растительного материала равна:

$$\varepsilon=1-\frac{\rho_H}{\rho}, \qquad (11)$$

где ρ_H – насыпная плотность материала, кг/м^3; ρ – плотность материала, кг/м ^{3}.

Насыпная плотность для измельченного растительного материала находится экспериментально по стандартной методике путем определения массы 1 дм^3 материала. Плотность также определяется экспериментально с использованием микроскопа.

Предполагая, что в двухкомпонентной смеси измельчённые растительные материалы распространены равномерно, для определения порозности такой смеси предлагается следующая формула:

$$\varepsilon_{\text{ÑÌ}} = (1-\acute{o})\varepsilon_1 + \acute{o}\varepsilon_2, \tag{12}$$

где ε_1 – порозность слоя 1-го компонента; ε_2 – порозность слоя 2-го компонента; $\varepsilon_{\text{СМ}}$ – общая порозность смеси; y – концентрация 2-го компонента в смеси, кг/кг.

Уравнение (12) позволяет нам определить порозность двухкомпонентной смеси, например, измельчённых растительных материалов таких, как какао и какао-велла, кофе и кофейная оболочка, зверобой и лакричный корень в абсолютно сухом виде, но в процессе фильтрации экстрагента через слой смеси материалов они таковыми не являются, поэтому необходимо внести поправку на поглощенную влагу. Для этой цели проводили опыты по определению насыпной плотности влажного измельченного растительного материала по стандартной методике определением веса 1 дм^3 влажного материала.

Для определения по формуле (1) влажной порозности растительного материала необходимо вычислить плотность влажных частиц каждого материала по следующей формуле:

$$\rho_{\text{ÂË}} = \frac{(m_{\text{ñóõ}} q)}{(V_{\text{ñóõ}} \hat{E}_{\text{í}})}\ , \tag{13}$$

где q и $K_{\text{Н}}$ – коэффициенты влагопоглощения и набухания есть функции $q=f(\tau,t)$ и $K_{\text{Н}}=f(\tau,t)$. Данные функциональные зависимости раскрываются экспериментально. Следовательно, порозность влажного растительного материала будет определена из

$$\varepsilon_{\text{ÂË}} = 1 - \frac{(\rho_{\text{íàë}} \hat{E}_{\text{Н}})}{(\rho_{\text{ñóõ}} q)}\ . \tag{14}$$

Суммарная порозность влажной смеси растительных материалов будет определяться по формуле (2).

Следует также отметить, что, проходя через слой растительного материала, экстрагент вымывает из него растворимые вещества. Место растворимых веществ в материале занимает жидкость. Плотность жидкости и растительного материала различна, следовательно, необходимо внести поправку на растворимые вещества. Это предлагается сделать следующим образом. Из [2] имеем уравнение для определения плотности экстракта в частице:

$$\rho = 1007{,}26 - 0{,}47t + 432{,}7C\ , \tag{15}$$

где t – температура, ºС; C – концентрация экстрагента, % рефрактометр. Следовательно, поправка на растворимые вещества в растительном материале B будет иметь вид:

$$\hat{A} = \frac{\rho}{\rho_{\text{ÂË}}}, \tag{16}$$

а

$$\rho_{\text{ÂËÈÑÒ}} = \hat{A}\rho_{\text{ÂË}}\ , \tag{17}$$

где ρ – плотность экстрагента в частице, кг/м^3; $\rho_{\text{ВЛ}}$ – плотность воды при t, равной температуре процесса, кг/м^3; $\rho_{\text{влист}}$ – плотность влажного материала с учетом поправки на растворимые вещества, кг/м^3.

С учетом (6), (7) формула (4) приобретает вид:

$$\varepsilon_{\text{ÂË}} = 1 - \frac{(\rho_{\text{íàë}} \hat{E}_{\text{Н}})}{(\rho_{\text{ñóõ}} q \hat{A})} \tag{18}$$

или, обозначив за $\hat{A} = \frac{\hat{E}_{\text{í}}}{(q\hat{A})}$, (19)

имеем $\varepsilon_{\text{ÊÂË}} = 1 - \frac{\hat{A}\rho_{\text{íÂË}}}{\rho_{\text{ÑÓÕ}}},$ (20)

где E – поправочные коэффициенты, учитывающие влагопоглощение, набухание, а также выход растворимых веществ из частицы растительного материала.

В процессе снятия гидродинамических зависимостей мы приводим слой растительного материала в аппарате во взвешенное состояние, чтобы рассматривать фильтрацию как частный случай движения жидкости через зернистый слой. Полученные же выше зависимости (18), (19), (20) характеризуют неподвижный слой в аппарате. Для устранения этого противоречия следует ввести такую величину, как динамическая порозность $\varepsilon_{\text{дин}}$ материала, характеризующую долю свободного пространства взвешенного слоя в аппарате, а величинам порозности, полученным выше, присвоить наименование статических.

Исходя из вышесказанного, необходимо определить зависимость между статической и динамической порозностями слоя материала $\varepsilon_{\text{ДИН}}$

$$\varepsilon_{\text{ÄÈÍ}} = 1 - \frac{V}{V_{Í\,\text{ÄÈÍ}}}\ ,$$

где V – объем, занимаемый самими частицами, образующими слой во влажном набухшем виде, м^3; $V_{H\text{ДИН}}$ – общий объем, занимаемый зернистым слоем при прохождении экстрагента, м^3.

Для работающего аппарата:

$$V_{\text{í ÄÈÍ}} = SH\ ,$$

где S – площадь поперечного сечения аппарата, м^2; H – высота аппарата, м. Определим влажный объем V из выражения:

$$\varepsilon_{\text{ÂË}} = 1 - \frac{V}{V_{\text{í ÑÒ}}}\ , \qquad (21)$$

где V_{HCT} – общий объем, занимаемый влажным зернистым слоем в статическом состоянии, м^3. Из (21):

$$V = V_{\text{í ÑÒ}} - \varepsilon_{\text{ÂË}} V_{\text{í ÑÒ}}.$$

Учитывая, что V_{HCT} зависит от φ – степени заполнения аппарата материалом, получаем:

$$V_{\text{í ÑÒ}} = hS\ ,$$

где h – высота слоя для данного φ, м.

Подставляя (12), (14), (15) в (11), получаем:

$$\varepsilon_{\text{ÄÈÍ}} = 1 - \frac{hS - \varepsilon_{\text{ÂË}} hS}{HS}$$

или

$$\varepsilon_{\text{ÄÈÍ}} = 1 - \frac{h - \varepsilon_{\text{ÂË}} h}{H}\ . \qquad (22)$$

Записывая, что степень заполнения аппарата равна

$$\varphi = \frac{h}{H}\ , \qquad (23)$$

получаем (22), учитывая (23), в виде

$$\varepsilon_{\text{ÄÈÍ}} = 1 - \varphi - \varepsilon_{\text{ÂË}} \varphi. \qquad (24)$$

Формула (24) выражает зависимость между динамической порозностью работающего аппарата и статической, а также степенью заполнения аппарата. Статическая порозность влажного материала, в зависимости от состава смеси, определяется по формулам (12) и (18).

Таким образом, системный анализ работ некоторых учёных показал, что не получено теоретическое уравнение, полностью характеризующее закономерности движения через насыпной слой. Результатом же исследований являются в большей степени эмпирические уравнения.

Одна из эмпирических моделей, являющаяся в некотором роде универсальной для различных соответственно обработанных смесей растительных материалов, представлена в работе уравнениями (12), (18), (24). Это законченная математическая модель расчета порозности – важного гидродинамического параметра слоя измельчённого растительного материала при фильтрации через него экстрагента.

Данная методика определения гидродинамических характеристик слоя растительного материала универсальна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быков, С.А. Исследование диффузионных и массообменных свойств смесей измельчённых растительных материалов [Текст]: монография / С.А. Быков. – Елец: ЕГУ, 2010. -196 с.
2. Быков, С.А. Исследование гидродинамических характеристик процесса экстрагирования смесей измельчённых растительных материалов [Текст]: монография / С.А. Быков. – Елец: ЕГУ им. И. А. Бунина, 2008. -134 с.
3. BROWNELL and KATZ D.L. Chem. Eng. Progress, 1947, v. 43, p. 537.
4. LEWA M. Chem. Eng. Progress, 1947, v. 43, №10, p. 549.
5. OMAN A.A. and WATSON K.M. Nat. Petr. Neuws., 1944, v. 36, №44, p. 795.
6. ROSE H.E. Inst. Mech. Eng./London/, 1949, v. 16, №4, p. 141.
7. Колеров, Д.К. Гидродинамика паровой среды [Текст] / Д.К. Колеров // Журнал хим. пр-ть. -1959, -№ 2. - С. 163.