

УДК 532

Старший преподаватель А.С. Сидоренко,

(Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военная воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина») кафедра общепрофессиональных дисциплин.
тел. 8(904)210-17-90

E-mail: sas1.vrn@mail.ru

доцент А.И. Потапов

(Воронеж. гос. ун-т. инж. технол.) кафедра машин и аппаратов пищевых производств
тел. 8(906)586-75-97

E-mail: a.i.potapov@rambler.ru

Senior lecturer A.S. Sidorenko,

(Russian Air Force Military Educational and Scientific Center "Air Force Academy named after Professor N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin") Department of All-Professional Disciplines. phone 8(904)210-17-90
E-mail: sas1.vrn@mail.ru

associate professor A.I. Potapov

(Voronezh state university of engineering technologies) Department of food production machines.
phone 8(906)586-75-97

E-mail: a.i.potapov@rambler.ru

Математическая модель неизотермического течения высоковязких сред в каналах матрицы экструдера

Mathematical model non-isothermal flow highly viscous media channels matrix extruder

Реферат. Рассматривается одномерное установившееся течение высоковязкой среды в цилиндрическом канале с учетом диссипации и зависимости коэффициента вязкости от температуры. Предположено, что на сравнительно малых интервалах температуры изменение коэффициента динамической вязкости с достаточной степенью точности можно принять линейным. В основу модели были положены уравнения гидродинамики жидкости и теплопереноса. В поставленной задаче температура стенки канала принимается постоянной. Получено приближенное решение рассматриваемой задачи, в соответствии с которым распределение скорости, давления и температуры ищется в виде разложения по степеням безразмерной поперечной координаты. Рассмотрен частный случай, когда в соотношениях распределение скорости, давления и температуры допустимо ограничиться следующим числом членов разложения: для скорости – первые 3, для давления – первые 2, для температуры – первые 5. Получены выражения для определения профиля температуры среды в канале и определения характеристик диссипативного разогрева. Для моделирования процесса теплопереноса высоковязких сред разработана программа для персональных электронно-вычислительных машин. Расчет проведен по экспериментальным данным исследования течения расплава зерновой смеси гречихи и сои для скорости нагрузки 0,08 мм/с. Методом машинного эксперимента осуществлена проверка полученных решений на адекватность реальному процессу теплопереноса. Анализ результатов указывает, что при малых значениях длины канала влияние диссипативной функции проявляется главным образом у стенки. При увеличении приведенной длины это явление распространяется на все сечение канала. При большой длине канала профиль температур целиком определяется диссипацией. В случае теплообмена, обусловленного только теплотой трения, форма кривых распределения температур является следствием взаимодействия эффектов нагрева за счет вязкого сдвига с эффектами охлаждения за счет теплопроводности. Отклонение расчетных данных от экспериментальных по абсолютному значению не превышало 12 %.

Summary. We consider a one-dimensional steady flow of highly viscous medium in a cylindrical channel with Dissipation and dependence of the viscosity on the temperature. It is assumed that a relatively small intervals of temperature variation of the dynamic viscosity with a sufficient degree of accuracy can be assumed to be linear. The model was based on the equations of hydrodynamics and the heat transfer fluid. In the task channel wall temperature is assumed constant. An approximate solution of the problem, according to which the distribution of velocity, pressure and temperature is sought in the form of an expansion in powers of the dimensionless transverse coordinates. A special case, when the ratio of the velocity distribution, pressure and temperature is allowed to restrict the number of terms in the expansion as follows: for speed - the first 3 to the pressure - the first two for the temperature - the first 5. The expressions to determine the temperature profile of the medium in the channel and characterization dissipative heating. To simulate the process of heat transfer highly viscous media developed a program for personal electronic computers. The calculation was performed using experimental research data melt flow grain mixture of buckwheat and soybeans for the load speed of 0.08 mm / s. The method of computer simulation carried out checks on the adequacy of the solutions to the real process of heat transfer. Analysis of the results indicates that for small values of the length of the channel influence dissipation function appears mainly at the wall. By increasing the reduced length of this phenomenon applies to all section of the channel. At high temperature profile along the channel length is determined entirely by dissipation. In the case of heat transfer due to frictional heat only, the form of curves of temperature distribution is a consequence of the interaction effects of heating due to viscous shear effects cooling by conduction. The deviation from the experimental data calculated by the absolute value does not exceed 12%.

Ключевые слова: математическое моделирование, неизотермическое течение, конвективный теплоперенос

Keywords: mathematical modeling, isothermal flow, convective heat transfer

© Сидоренко А.С., Потапов А.И., 2015

Несмотря на то, что теоретическому исследованию неизоэтермического течения высоковязких сред с учетом диссипации энергии посвящен ряд работ, однако до настоящего времени эти вопросы изучены явно недостаточно. Осложняющими факторами моделирования подобных процессов является зависимость физико-механических свойств расплавов экструдата от температуры. В обычных условиях наиболее сильно изменяется с температурой коэффициент динамической вязкости. Поэтому ограничиваемся учетом изменения одной лишь вязкости, полагая остальные физические свойства постоянными [1-4].

Рассмотрим одномерное плоское установившееся течение высоковязкой жидкости в цилиндрическом канале. Канал имеет длину L и радиус R .

Введем цилиндрическую систему координат. Начало отсчета продольной оси z системы совместим с входным сечением канала.

Рассмотрим движение жидкости за счет разности давлений на входе P_0 и на выходе из канала P_L .

В поставленной задаче температура стенки канала принимается постоянной и равной T_w .

Одномерное течение и теплоперенос высоковязких сред с учетом общепринятых допущений описывается системой уравнений неразрывности, гидродинамики и конвективного теплопереноса с учетом диссипации механической энергии, которые могут быть записаны в цилиндрической системе координат следующим образом:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \mu(T)}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial r} = 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu(T) r \frac{\partial U}{\partial r} \right) - \frac{\partial P}{\partial z} = 0; \quad (1)$$

$$\rho c U \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \mu(T) \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2$$

Запишем граничные условия:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0; \\ U|_{r=R} = 0; \quad T|_{r=R} = T_w; \\ T(r)|_{z=0} = \sum_{j=0}^J T_{\text{вх},j} \Gamma^j; \\ P|_{z=L} = P_L, \quad (2)$$

где ρ – плотность среды; r, z – цилиндрические координаты; P – давление среды в канале; U – скорости частиц среды; c – удельная теплоемкость среды в канале; λ – коэффициент теплопроводности среды; $\mu(T)$ – коэффициент динамической вязкости, зависящий от температуры; $T_{\text{вх},j}$ – заданные коэффициенты в представлении профиля температуры во входном сечении канала, определяемые из дополнительных условий (принятый здесь вид граничного условия для температуры при z равно нулю, как это будет следовать из дальнейшего рассмотрения обуславливается видом предполагаемого приближенного решения для температуры в канале); J – степень полинома, используемого для аппроксимации начального профиля температуры на входе в канал.

В настоящее время известно много форм представления коэффициента динамической вязкости в зависимости от температуры. Для простоты дальнейшего рассмотрения будем предполагать, что на сравнительно малых интервалах температуры изменение коэффициента динамической вязкости с достаточной степенью точности можно принять линейным. Это позволяет зависимость $\mu(T)$ аппроксимировать соотношением вида:

$$\mu(T) = \mu_0 + \mu_1 (T_{\text{хар}} - T), \quad (3)$$

где μ_0, μ_1 – эмпирические коэффициенты, определяемые экспериментально для каждой жидкости в отдельности; $T_{\text{хар}}$ – некоторая характерная температура процесса.

Для перехода к безразмерному виду введем следующие переменные, параметры, функции и критерии:

$$r' = \frac{r}{R}; \quad D = \frac{2R}{L}; \quad z' = \frac{z}{L}; \quad Eu = \frac{P_0 - P_L}{\rho V_m^2}; \\ T'_{\text{вх},j} = \frac{T_{\text{вх},j} - T_{\text{вх},0}}{T_{\text{крит}} - T_{\text{вх},0}}; \quad T' = \frac{T - T_{\text{вх},0}}{T_{\text{крит}} - T_{\text{вх},0}}; \\ T'_{\text{хар}} = \frac{T_{\text{хар}} - T_{\text{вх},0}}{T_{\text{крит}} - T_{\text{вх},0}}; \quad T'_w = \frac{T_w - T_{\text{вх},0}}{T_{\text{крит}} - T_{\text{вх},0}}; \quad (4) \\ p' = \frac{P - P_L}{P_0 - P_L}; \quad U' = \frac{U}{V_m}; \quad Q' = \frac{Q}{\pi R^2 V_m}; \\ Vis = \frac{\mu_1 (T_{\text{крит}} - T_{\text{вх},0})}{\mu_0}; \quad Pr = \frac{\mu c}{\lambda};$$

$$Re = \frac{2\rho V_m R}{\mu}; Ec = \frac{V_m^2}{c(T_{крит} - T_{вх,0})};$$

где r' – текущий радиус канала; D – вспомогательный геометрический параметр, характеризующий отношение гидравлического диаметра канала к его длине; z' – безразмерная продольная координата; $T', T'_{хар}, T'_w$ – значения температуры; $T'_{крит}$ – безразмерное значение критической температуры; P' – давление среды в канале; U' – скорость среды; Q – расход среды через канал; Vis – параметр характеризующий отношение характерной вязкости к величине масштабной вязкости; Pr, Re, Ec, Eu – критерии Прандтля, Рейнольдса, Эккерта, Эйлера, соответственно.

Здесь и далее верхние штрихи указывают на безразмерную форму записи соответствующих величин.

Заметим, что в качестве $T'_{крит}$ принимается такая температура, при достижении которой в рассматриваемом процессе возникают факторы, которые ставят вопрос о правомерности использования этой математической модели. Например, при экструзии теста его разогрев до некоторой определенной температуры приводит к денатурации белка. В других процессах в качестве $T'_{крит}$ может быть принята, например, температура фазового перехода.

С учетом (4) основные уравнения (1) могут быть записаны в следующей форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial U'}{\partial z'} &= 0; \\ -\frac{\partial P'}{\partial r'} + \frac{D}{Eu Re} \frac{\partial U'}{\partial r'} \frac{\partial}{\partial z'} \left(1 + Vis(T'_{хар} - T') \right) &= 0; \\ \frac{Eu Re D}{4} \frac{\partial P'}{\partial z'} &= \\ &= \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left[\left(1 + Vis(T'_{хар} - T') \right) r' \frac{\partial U'}{\partial r'} \right]; \\ \frac{Pr Re}{D} U' \frac{\partial T'}{\partial z'} &= \frac{4}{D^2} \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial T'}{\partial r'} \right) + \\ &+ \frac{4Ec Pr}{D^2} \left[1 + Vis(T'_{хар} - T') \right] \left(\frac{\partial U'}{\partial r'} \right)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

С учетом (4) граничные условия (2) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U'}{\partial r'} \Big|_{r'=0} &= 0; & \frac{\partial T'}{\partial r'} \Big|_{r'=0} &= 0; \\ U' \Big|_{r'=0} &= 0; & T' \Big|_{r'=0} &= T'_w; \\ T' \Big|_{z=0} &= \sum_{j=0}^J T'_{вх,j} r'^j; \\ P' \Big|_{z=1} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В общем случае точное решение системы уравнений (5) с граничными условиями (6) представляется затруднительным. В этой связи рассмотрим подход к построению приближенного решения рассматриваемой задачи, в соответствии с которым распределение скорости, давления и температуры будем искать в виде разложения по степеням безразмерной поперечной координаты r' :

$$U'(r') = \sum_{j=0}^{\infty} U'_j(r')^j; \quad (7)$$

$$P'(r', z') = \sum_{j=0}^{\infty} P'_j(z') (r')^j; \quad (8)$$

$$T'(r', z') = \sum_{j=0}^{\infty} T'_j(z') (r')^j. \quad (9)$$

Подставляя (7) – (9) в (5), приходим после соответствующих преобразований к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложения $P'_j(z')$, $T'_j(z')$, как, функций продольной координаты z' , и постоянных коэффициентов U'_j , $j = 0, 1, \dots$.

Рассмотрим наиболее простой частный случай, когда в соотношениях (7) – (9) допустимо ограничиться следующим числом членов разложения:

- для скорости – первыми тремя;
- для давления – первыми двумя;
- для температуры – первыми пятью.

В рамках рассматриваемого приближения с учетом допущения о параболическом профиле скорости коэффициенты разложения в (7) определяются из выражений:

$$U'_0 = \frac{Q'}{2}; \quad U'_1 = 0; \quad U'_2 = -U'_0. \quad (10)$$

В итоге после соответствующих преобразований приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $T'_0, T'_1, T'_2, T'_3, T'_4, P'_0$ и P'_1 как функций продольной координаты:

$$\left(1 + \text{Vis}(T'_{\text{хар}} - T'_0)\right)U'_2 = \frac{\text{Eu Re D}}{16} \frac{\partial P'_0}{\partial z'}; \quad \text{Pr Re D} U'_0 \frac{\partial T'_0}{\partial z'} = 16 T'_2; \quad (11)$$

$$\text{Pr Re D} \left(U'_0 \frac{\partial T'_2}{\partial z'} + U'_2 \frac{\partial T'_0}{\partial z'} \right) = 64 \left[T'_4 + \text{Ec Pr} (1 + \text{Vis} T'_{\text{хар}}) (U'_2)^2 \right];$$

$$P'_1 = 0; T'_1 = 0; T'_0 + T'_2 + T'_4 = T'_w.$$

При формировании (11) с целью получения замкнутой системы уравнений были приняты во внимание уравнения, вытекающими из граничных условий для температуры по поперечной координате.

После некоторых преобразований система уравнений (11) сводится к одному дифференциальному уравнению относительно распределения давления в канале:

$$B_0 \frac{d^3 P'_0}{d(z')^3} + B_1 \frac{d^2 P'_0}{d(z')^2} + B_2 \frac{dP'_0}{dz'} = B_3, \quad (12)$$

здесь для краткости записи приняты обозначения:

$$B_0 = \frac{\text{Pr}^2 \text{Re}^3 D^3 \text{Eu}}{16^2 \text{Vis}} U'_0; B_1 = \frac{3 \text{Pr Eu Re}^2 D^2}{16 \text{Vis}};$$

$$B_2 = 64 \text{Eu Re D} \left(\frac{4}{\text{Vis} U'_0} + \text{Ec Pr} U'_0 \right);$$

$$B_3 = 64 \left(T'_w - T'_{\text{хар}} - \frac{1}{\text{Vis}} \right).$$

Принимая во внимание функциональные связи между коэффициентами разложения для давления и температуры, вытекающие из (11), граничные условия для уравнения (12) с учетом (6) записываются в виде уравнения (13).

После нахождения распределения давления вдоль оси продольного канала, температурное поле определяли из (9) с учетом уравнений (11).

$$\left. \frac{\partial P'_0}{\partial z'} \right|_{z'=0} = \frac{16 U'_2}{\text{Eu Re D}} (1 + \text{Vis}(T'_{\text{хар}} - T'_{\text{вх},0})); \quad \left. \frac{d^2 P'_0}{d(z')^2} \right|_{z'=0} = 0; P'_0|_{z'=1} = 0 \quad (13)$$

Получено аналитическое решение уравнения (12):

$$P'_0 = \left[C_1 \cos\left(\frac{Az'}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{Az'}{2}\right) \right] \times e^{-\frac{B_2}{2B_3} z'} + C_3 + \frac{B_0}{B_1} z', \quad (14)$$

где для краткости записи приняты обозначения:

$$C_1 = -\frac{4 \left(\left. \frac{\partial P'_0}{\partial z'} \right|_{z'=0} - \frac{B_0}{B_1} \right) \frac{B_2}{B_3}}{A^2 + (B_2/B_3)^2};$$

$$C_2 = \frac{2}{A} \left(\left. \frac{\partial P'_0}{\partial z'} \right|_{z'=0} - \frac{B_0}{B_1} + \frac{B_2}{2B_3} C_1 \right);$$

$$C_3 = -e^{-\frac{B_2}{2B_3}} \left[C_1 \cos\left(\frac{A}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{A}{2}\right) \right] - \frac{B_0}{B_1};$$

$$A = \sqrt{4B_1/B_3 - (B_2/B_3)^2}.$$

Средняя температура в канале описана уравнением:

$$T'_{\text{sr}}(z') = \frac{\int_0^1 r' T'(z', r') U'(r') dr'}{\int_0^1 r' U'(r') dr'}. \quad (15)$$

Для моделирования процесса теплопередачи высоковязких сред разработана программа на ПЭВМ. Расчет проведен по экспериментальным данным исследования течения расплава зерновой смеси гречихи и сои для скорости нагрузки 0,08 мм/с [5].

Исходные данные и результаты расчета приведены в таблице. На рисунке 1 приведено распределение температурного поля расплава смеси в зависимости от длины канала.

Из рисунка 1 видно, что при малых значениях z влияние диссипативной функции проявляется главным образом у стенки. При увеличении приведенной длины это явление распространяется на все сечение канала. При большом z профиль температур целиком определяется диссипацией. В случае теплообмена, обусловленного только теплотой трения, форма кривых распределения температур является следствием взаимодействия эффектов нагрева за счет вязкого сдвига с эффектами охлаждения за счет теплопроводности.

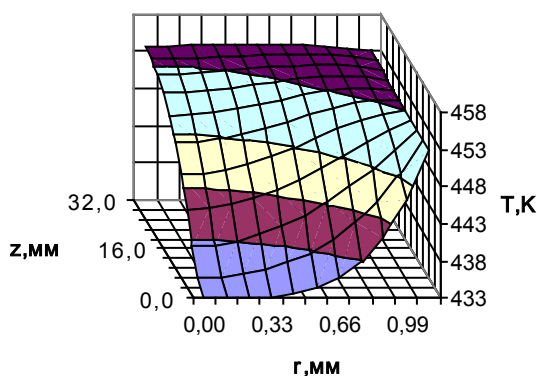


Рисунок 1. Распределение температурного поля расплава смеси зерна гречихи и сои

Методом машинного эксперимента осуществлена проверка полученных решений на адекватность реальному процессу теплопереноса. Отклонение расчетных данных от экспериментальных по абсолютному значению не превышало 12 % (таблица 1).

Т а б л и ц а 1

Исходные данные и результаты расчета

Параметр	Значение
Радиус канала, м	0,0011
Длина канала, м	0,0320
Температура на входе в канал, К	433
Температура стенки канала, К	453
Характерная температура, К	443
Критическая температура, К	459
Скорость потока в канале, м/с	$0,8 \cdot 10^{-4}$
Избыточное давление на выходе, кПа	31,00
Эмпирический коэффициент μ_0 , кПа·с	11,1
Эмпирический коэффициент μ_1 , кПа·с	0,240
Теплопроводность расплава, Вт/(м·К)	0,220
Удельная теплоемкость расплава, Дж/(кг·К)	1600
Плотность расплава, кг/м ³	1200
Расход среды через канал, кг/м ³	$1,157 \cdot 10^{-8}$
Число Vis	0,562
Число Прандтля	$8,073 \cdot 10^7$
Число Рейнольдса	$1,189 \cdot 10^{-5}$
Число Эккерта	$6,01 \cdot 10^{-8}$
Число Эйлера	$1,167 \cdot 10^4$

Выводы:

1. Выявлен характер изменения поля температур высоковязких сред в различных сечениях цилиндрического канала.

2. Полученная модель позволяет с достаточной точностью ($\pm 12\%$) рассчитать не только значения температур высоковязких сред в цилиндрическом канале, но и провести анализ влияния основных параметров системы на характеристики диссипативного разогрева материала.

ЛИТЕРАТУРА

1 Василенко В.Н., Остриков А.Н., Рязских В.И. Математическая модель течения двух вязкопластичных сред в формующем канале экструдера при коэкструзии // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. 2012. № 2. С. 64-67.

2 Остриков А.Н., Татаренков Е.А., Попов А.С., Василенко В.Н. Моделирование течения расплава биополимера в динамической матрице экструдера // Хранение и переработка сельхозсырья. 2011. № 8. С. 66-69.

3 Остриков А.Н. Математическое моделирование течения аномально-вязких сред в каналах экструдеров. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2010. 237 с.

4 Комов А.А., Потапов А.И., Тарарыкова И.В., Шахов С.В. Математическое описание процесса микрофльтрации суспензии в трубчатом канале // Современные наукоемкие технологии. 2014. № 5-1. С. 164-165

5 Кретов И.Т., Попов Е.С., Потапов А.И., Попов Д.С. Математическое моделирование процесса микрофльтрации // В книге: Материалы LI отчетной научной конференции преподавателей и научных сотрудников ВГУИТ за 2012 г. 2012. С. 42.

REFERENCES

1 Vasilenko V.N., Ostrikov A.N., Ryzhskikh V.I. A mathematical model of the flow of two viscoplastic media in the form of a channel-le extruder at coextrusion. *Vestnik VGUIT*. [Proceedings of VSUET], 2012, no. 2, pp 64-67. (In Russ.).

2 Ostrikov A.N., Tatarikov E.A., Popov A.S., Vasilenko V.N. Modeling of biopolymer melt extruder in the dynamic matrix. *Khranenie i pererabotka sel'khozsyrya*. [Storage and processing of agricultural-hozsyrya], 2011, no. 8, pp. 66-69 (In Russ.).

3 Ostrikov A.N. Matematicheskoe modelirovanie techeniya anomal'no-vyazkikh sred [Mathematical modeling of abnormally viscous media channels extruders]. Voronezh, VGU, 2010. 237 p. (In Russ.).

4 Komov A.A., Potapov A.I., Tararykova I.V., Shakhov S.V. The mathematical description of the process of suspension in a tubular micro channel. *Sovremennye naukoemkie tekhnologii*. [Modern high technologies], 2014, no. 5-1, pp 164-165 (In Russ.).

5 Kretov I.T., Popov E.S., Potapov A.I., Popov D.S. Mathematical modeling of microfiltration. Materialy LI otchetnoi nauchnoi konferentsii prepodavatelei VGUIT. [In the book: Materials LI reporting conference of teachers and researchers VSUET for 2012]. 2012, pp. 42 (In Russ.).