УДК 664.723

Профессор Д.Б. Десятов, доцент Т.В. Гладких,
(Воронеж. гос. ун-т инж. технол.) кафедра информационных технологий моделирования и управления. тел. (473) 255-25-50
E-mail: gtv1311@maii.ru
доцент Е.В. Воронова
(Воронеж. гос. ун-т) кафедра функционального анализа и операторных уравнений, тел. (473) 220-87-55
E-mail: e-lena_B@inbox.ru

Professor D.B. Desyatov, associate professor T.V. Glagkikh,
(Voronezh state university of engineering technologies) Department of information technology modeling and management.
phone (473) 255-37-51
E-mail: gtv1311@maii.ru
associate professor E.V. Voronova
(Voronezh state university) Department of functional analysis and operator equations.
phone (473) 220-87-55
E-mail: e-lena_B@inbox.ru

Моделирование вероятностного конфликта технологических систем

Modeling probabilistic conflict of technological systems

Реферат. В последнее время для исследования конфликтов все чаще применяется метод математического моделирования. Его значимость связана с тем, что экспериментальные исследования таких конфликтов достаточно трудоемки и сложны. Однако существующие подходы к исследованию конфликта не учитывают стохастический характер систем, страдают концептуальной неполнотой. Возникает потребность в разработке моделей, алгоритмов и принципов, позволяющих оценивать конфликтные взаимодействия, выбирать конфликтные решения для обеспечения не худших условий функционирования. Для стохастических технологических систем в качестве функции полезности будем рассматривать вероятность достижения заданной цели. Будем считать, что некоторая система S_1 конфликтует с системой S_2, (S_2 ***K*** S_1), если $q(S_1,S_2)<q(S_1,\overline{S_2})$, где q - функция полезности надсистемы $S = \{S_1,S_2\}$. При этом можно говорить о конфликте случайных событий, заключающихся в достижении некоторых целевых состояний. Тогда, если A и B - совместные зависимые случайные события, то вероятностный конфликт между событиями (A ***K*** B) можно определить двумя способами: <u>Определение 1.</u> Между A и B наблюдается вероятностный конфликт первого рода (A $\boldsymbol{K_1}$ B), если $P(A/B)<P(A/\overline{B})$,где $P(A/B)$, $P(A/\overline{B})$ - условные вероятности. <u>Определение 2.</u> Между A и B наблюдается вероятностный конфликт второго рода (A $\boldsymbol{K_2}$ B), если $P(A/B)<P(A)$. Далее приводятся 9 теорем с доказательствами для данных определений, позволяющие решать задачи оптимизации и выбора на множестве Парето, которые возникают при исследовании функционирования стохастических технологических систем.

Summary. Recently for the study of conflict increasingly used method of mathematical optical modeling. Its importance stems from the fact that experimental research such conflicts rather time-consuming and complex. However, existing approaches to the study of conflict do not take into account the stochastic nature of the systems, suffers from conceptual incompleteness. There is a need to develop models, algorithms and principles, in order to assess the conflict, to choose conflict resolution to ensure that not the worst of conditions. For stochastic technological systems as a utility function, we consider the probability of achieving a given objective. We assume that some system S1 is in conflict with the system S2, (S_2 ***K*** S_1), if $q(S_1,S_2)<q(S_1,\overline{S_2})$, where q is the utility function of meta S = {S1,S2}. In this case we can speak about the conflict of random events, achieving some target States. Then-when, if and joint dependent random events, then the probability the conflict between events (And In) can be defined in two ways: <u>Definition 1.</u> Between A and b is observed probabilistic conflict of the first kind (A $\boldsymbol{K_1}$ B), if $P(A/B)<P(A/\overline{B})$,where $P(A/B)$, $P(A/\overline{B})$ is a conditional probability. <u>Definition 2</u>. Between A and b is observed probabilistic conflict of the second kind (A $\boldsymbol{K_2}$ B), if $P(A/B)<P(A)$. Here are 9 of theorems with proofs for data definitions, allowing to solve problems of optimization and selection of the Pareto set, which arise in the study of the functioning of stochastic manufacturing systems.

Ключевые слова: вероятностный конфликт, случайные события, теорема, доказательство, стохастические системы.

Key words: probabilistic conflict, random events, theorem, proof, stochastic system.

На сегодняшний день не достаточно строго решены задачи формализации конфликта параметров. Существующие подходы к исследованию конфликта не учитывают стохастический характер систем, страдают концептуальной неполнотой. Возникает потребность в разработке моделей, алгоритмов и принципов, позволяющих оценивать конфликтные взаимодействия, выбирать конфликтные решения для обеспечения не худших условий функционирования. Отсюда возникает необходимость проведения анализа функционирования на основе исследования конфликта параметров с применением методов многомерной статистики. Такой анализ позволяет выявить истинные причины развития системы в том или ином направлении, перехода из стационарного состояния в нестационарное.

Математическое моделирование с привлечением современных средств вычислительной техники позволяет перейти от простого накопления и анализа фактов к прогнозированию и оценке событий в реальном масштабе времени их развития. Если методы наблюдения и анализа межгруппового конфликта позволяют получать единичное решение конфликтного события, то математическое моделирование конфликтных явлений с использованием ЭВМ позволяет просчитывать различные варианты их развития с прогнозированием вероятного исхода и влияния на результат.

Многие современные технологические системы являются сложными стохастическими системами. Задачи оптимизации, возникающие при их исследовании, как правило, носят векторный характер. Поэтому целесообразно строить модели, учитывающие вероятностную природу конфликта основных параметров оптимизации.

В соответствии с [1] будем считать, что некоторая система S_1 конфликтует с системой S_2, $(S_2 K\, S_1)$, если:

$$q(S_1, S_2) < q(S_1, \overline{S_2}) , \tag{1}$$

где q - функция полезности надсистемы $S = \{S_1, S_2\}$. Для стохастических технологических систем в качестве функции полезности будем рассматривать вероятность достижения заданной цели. При этом можно говорить о конфликте случайных событий, заключающихся в достижении некоторых целевых состояний. Тогда, если A и B - совместные зависимые случайные события (например, заключающиеся в достижении целевых состояний стохастическими системами S_1 и S_2 соответственно), то вероятностный конфликт между событиями (A ***K*** B) можно определить двумя способами [2, 3]:

<u>Определение 1.</u> Между A и B наблюдается вероятностный конфликт первого рода (A ***K₁*** B), если:

$$P(A/B) < P(A/\overline{B}) , \tag{2}$$

где $P(A/B), P(A/\overline{B})$ - условные вероятности.

<u>Определение 2.</u> Между A и B наблюдается вероятностный конфликт второго рода (A ***K₂*** B), если:

$$P(A/B) < P(A) . \tag{3}$$

<u>Теорема 1.</u> Из неравенства (2) следует неравенство (3).

Доказательство. По известной теореме о полной вероятности:

$$P(A) = P(A/B)P(B) + P(A/\overline{B})P(\overline{B}) \tag{4}$$

Тогда из (2) следует:

$$\begin{aligned} P(A) > P(A/B)P(B) + P(A/B)P(\overline{B}) = \\ = P(A/B)\left[P(B) + P(\overline{B})\right]. \end{aligned} \tag{5}$$

Согласно одной из аксиом теории вероятностей:

$$P(B) = P(\overline{B}) = 1 . \tag{6}$$

Из (4) и (5) следует $P(A) > P(A/B)$, что и требовалось доказать.

<u>Теорема 2</u>. Вероятностный конфликт второго рода является симметричным, то есть из A ***K₂*** B следует, что B ***K₂*** A.

Доказательство. Имеем неравенство (3). Из формулы умножения для зависимых событий следует:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B) \tag{7}$$

Отсюда с учетом (3) получаем:

$$\begin{aligned} P(B/A) = \left[P(B)P(A/B)\right]/P(A) < \left[P(B)P(A)\right]/ \\ /P(A) = P(B) \end{aligned} \tag{8}$$

<u>Теорема 3</u>. Вероятностный конфликт первого рода является симметричным, то есть из A ***K₁*** B следует, что B ***K₁*** A.

Доказательство. Имеем неравенство (2). По теореме о полной вероятности можно записать:

$$P(B) = P(B/A)P(A) + P(B/\overline{A})P(\overline{A}) . \tag{9}$$

Тогда:

$$P(B/\overline{A}) = [P(B) - P(B/A)P(A)]P(\overline{A}) =$$
$$= [P(B/) - P(B/A) + P(B/A)P(A)]/P(\overline{A}) =$$
$$= \{P(B) - P(B/A) + P(B/A)[1 - P(A)]\}/P(\overline{A}) \quad (10)$$

Согласно (6):

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует:

$$P(B/\overline{A}) = [P(B) - P(B/A)]/P(\overline{A}) + P(B/A) \quad .(12)$$

Из Теоремы 1, неравенства (8) и неравенства $P(\overline{A}) > 0$ (если $P(\overline{A}) = 0$, то события А и В являются независимыми, что противоречит принятым предположениям) следует, что:

$$[P(B)P(B/A)]/P(\overline{A}) > 0. \quad (13)$$

Из (12) и (13) имеем:

$$P(B/\overline{A}) > P(B/A), \quad (14)$$

что и требовалось доказать.

Теоремы 1, 2 и 3 свидетельствуют о симметричности вероятностного конфликта.

Теорема 4. А $\boldsymbol{K_1}$ В тогда и только тогда, когда А $\boldsymbol{K_2}$ В.

Доказательство. Необходимость утверждения теоремы следует из Теоремы 1, то есть из (2) следует (3). Докажем достаточность. Имеем неравенство (3). Из (6) можно записать

$$P(A/\overline{B}) = [P(A) - P(A/B)P(B)]/P(\overline{B}). \quad (15)$$

Из (15), (3) и (11) следует:

$$P(A/\overline{B}) > [P(A/B) - P(A/B)P(B)]/P(\overline{B}) =$$
$$= \{P(A/B)[1 - P(B)]\}/P(\overline{B}) =$$
$$= [P(A/B)P(\overline{B})]/P(\overline{B}) = P(A/B),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5. Если А и В конфликтуют, то выполняется следующее соотношение:

$$P(A/B) < P(A) < P(A/\overline{B}). \quad (16)$$

Доказательство. По условию теоремы выполняются неравенства (2) и (3), откуда следует левое неравенство в (16). Докажем, что при этом $P(A) < P(A/\overline{B})$.

Из (5), (2) и (6) следует:

$$P(A) = P(A/B)P(B) + P(A/\overline{B})P(\overline{B}) <$$
$$P(A/\overline{B})P(B) + P(A/\overline{B})P(\overline{B}) =$$
$$= P(A/\overline{B})[P(B) + P(\overline{B})] = P(A/\overline{B}),$$

что и требовалось доказать.

Кроме конфликта между случайными событиями А и В может наблюдается отношение вероятностного сотрудничества $(A\ B)$, если выполняется условие:

$$P(A/B) > P(A) \quad (17)$$

Следует отметить, что между вероятностями P(A) и $P(A/B)$ кроме (3) и (17) может также наблюдаться соотношение:

$$P(A/B) = P(A). \quad (18)$$

В этом случае события А и В являются независимыми.

Элементарные свойства отношений вероятностного конфликта и сотрудничества изложим в следующих теоремах [4, 5].

Теорема 6. Отношение вероятностного конфликта является антирефлексивным, то есть неверно, что А $\boldsymbol{K}$ А.

Доказательство. Так как, то условие (3) не выполняется.

Теорема 7. Отношения вероятностного конфликта и сотрудничества являются симметричными, то есть:

а). из А $\boldsymbol{K}$ В следует, что В $\boldsymbol{K}$ А;

б). из А В следует, что В А.

Доказательство.

а). Следует из теоремы 2.

б). Имеем неравенство (10). Из формулы умножения для зависимых событий (6) следует:

$$P(B/A) = [P(B)P(A/B)]/P(A)$$
$$[P(B)P(A)]/P(A) = P(B),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 6. Из А $\boldsymbol{K}$ В следует, что $\boldsymbol{K}$.

Доказательство. По условию теоремы имеем неравенство (3). По теореме о полной вероятности можно записать формулу (6), откуда, учитывая (3) имеем:

$$P(A) < P(A)P(B) + P(A/\overline{B})P(\overline{B}),$$

или

$$P(A)[1 - P(B)] < P(A/\overline{B})P(\overline{B}). \quad (19)$$

Согласно одной из аксиом теории вероятности выполняется равенство (6). Из (6) и (19) следует:

$$P(A)P(\overline{B}) < P(A/\overline{B})P(\overline{B}).$$

Так как $P(\overline{B}) > 0$, то:

$$P(A) < P(A/\overline{B}). \quad (20)$$

Учитывая (6), неравенство (20) можно преобразовать:

$$1 - P(\overline{A}) < 1 - P(A/\overline{B}),$$

откуда $P(\overline{A}/\overline{B}) < P(\overline{A})$ или $\overline{A}\ \boldsymbol{K}\ \overline{B}$, что и требовалось доказать.

Теорема 8. Из A $\boldsymbol{K}$ B следует, что а) $\overline{A}\ \overline{K}\ B$, б) $A\ \overline{K}\ \overline{B}$.

Доказательство. а) Из (3) и (6) имеем

$$1 - P(\overline{A}/B) < 1 - P(\overline{A}),$$ откуда

$P(\overline{A}/B) > P(\overline{A})$ или В. Утверждение в) является прямым следствием неравенства (13).

Следствие. Из A $\boldsymbol{K}$ B следует, что а) $\overline{B}\,\boldsymbol{K}\,\overline{A}$, б) $\overline{B}\ \overline{K}\ A$, в). $B\ \overline{K}\ \overline{A}$.

Доказательство следует из теорем 6, 7 и 8.

Теорема 9. Отношение вероятностного конфликта нетранзитивно.

Доказательство. Достаточно найти такие события A,B и C, что A $\boldsymbol{K}$ B, B $\boldsymbol{K}$ C, а $A\ \overline{K}\ C$.

Пусть $P(A) = 0.4; P(B) = 0.5; P(C) = 0.08;$

$P(A/B) = 0.2; P(C/B) = 0.02; P(C/A) = 0.2.$

Тогда:

$$P(A/B) < P(A),$$

$$P(C/B) \ge P(C),$$

$$P(C/A) \ge P(C).$$

Следовательно A K B, B K C, но $A\ \overline{K}\ C$.

Выведены определения вероятностного и статистического конфликта для анализа функционирования технологической системы и множества статистических конфликтных решений. Предложены модели и численные схемы оценки конфликта, которые позволяют решать задачи оптимизации и выбора на множестве Парето, возникающие при исследовании функционирования стохастических технологических систем.

Данные модели могут также использоваться для анализа технологических процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1 Новосельцев В.И., Мельников В.М. Конфликтология: учеб. пособие. Воронеж: Российская государственная академия правосудия (Центральный филиал), 2010. 320 с.

2 Десятов Д.Б., Новосельцев В.И. Теория конфликта: учеб. пособие для студентов вузов. Воронеж: Научная книга, 2010. 346 с.

3 Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем: учебник для вузов. М.: Высшая школа, 2010. 343 с.

4 Баркалов С.А. и др. Системный анализ и его приложения: учебное пособие. Воронеж: Научная книга, 2010. 439 с.

5 Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учеб. для вузов. М.: Высшая школа, 2010. 576 с.

REFERENCES

1 Novoseltsev V.I. Melnikov, V.M. Konfliktologiya [Conflict]. Voronezh, RAP, 2010. 320 p. (In Russ.).

2 Desyatov D.B., Novoseltsev V.I. Teoriya konflikta [Theory of the conflict]. Voronezh, Nauchnaya kniga, 2010. 346 p. (In Russ.)

3 Sovetov B.Ya., Yakovlev S.A. Modelirovanie system [Modeling of systems]. Moscow, Vysshaya shkola, 2010. 343 p. (In Russ.)

4 Barkalov S. A. et al. Sistemnyi analiz i ego prilozhenie [System analysis and its applications] Voronezh, Nauchnaya kniga, 2010. 439 p. (In Russ.)

5 Wentzel E. S. Teoriya veroyatnostei [Probability theory]. Moscow, Vysshaya shkola, 2010. 576 p. (In Russ.)