

УДК 532

Профессор В.Н. Колодежнов
(Воронеж. гос. ун-т инж. технол.) кафедра теоретической механики,
тел. (473) 255-55-57

Математическое моделирование реологического поведения нелинейно-вязких жидкостей, которые демонстрируют проявление эффекта “отвердевания”

Рассматривается реологическая модель жидкости, которая учитывает эффект “отвердевания”.

The rheological models of a liquid, which takes into account the effect of “solidification” is considered.

Ключевые слова: реологическая модель, эффект “отвердевания”.

Известно достаточно много реологических моделей вязких жидкостей [1-4]. Как правило, все эти модели для случаев одномерного течения различаются лишь степенью нелинейности связи между касательным напряжением τ и скоростью сдвига $\dot{\gamma}$.

Однако целый ряд результатов, полученных разными авторами в последнее время и приведенных, например, в [5 - 10], а также ряде других работ, указывают на то, что некоторые суспензии на основе мелкодисперсных частиц обладают аномальными реологическими свойствами.

Суть таких особенностей реологического поведения заключается в следующем. При определенной концентрации и размерах мелкодисперсных частиц кривая течения, построенная в координатах “скорость сдвига – касательное напряжение”, демонстрирует резкое возрастание своей кривизны при приближении модуля скорости сдвига к некоторому критическому (но конечному) значению $\dot{\gamma}_{crit}$. При этом дилатантное поведение жидкости усиливается настолько, что наиболее деформируемые области течения (где скорость сдвига непосредственно приближается к своему критическому значению) начинают вести себя практически подобно твердому телу. Здесь же заметим, что замеряемые значения касательного напряжения в окрестности предполагаемого

критического значения $\dot{\gamma}_{crit}$ принимают конечные значения, которые, как правило, меньше значений τ , получаемых при существенно более низких уровнях скорости сдвига.

Крутизна кривой течения, определяемая в одномерном случае соотношением

$$\mu_{loc} = \frac{d|\tau(\dot{\gamma})|}{d|\dot{\gamma}|},$$

характеризует фактически динамическую вязкость жидкости. В частном случае классической ньютоновской жидкости крутизна кривой течения является постоянной величиной, в точности совпадающей с динамической вязкостью. В этом смысле условие

$$\lim_{|\dot{\gamma}| \rightarrow \dot{\gamma}_{crit}} \left\{ \frac{d|\tau|}{d|\dot{\gamma}|} \right\} = \infty \quad (1)$$

может быть принято в качестве критерия проявления эффекта “отвердевания”.

Характеризуя проявление эффекта “отвердевания”, заметим, что речь здесь не идет об “отвердевании” в смысле фазового перехода типа кристаллизации. При удалении модуля скорости сдвига от своего критического значения вязкость снижается и сплошная среда вновь приобретает свойство “текучести”.

Реологическая модель, демонстрирующая проявление эффекта “отвердевания” в случае монотонного возрастания вязкости. Наиболее простой моделью в рамках обсуждаемого эффекта может быть принята следующая модель с монотонно возрастающей для одномерных случаев крутизной кривой течения

$$\tau_{ij} = -P \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \mu(I_2) \cdot \varepsilon_{ij}; \quad i, j = 1, 2, 3;$$

$$I_2 = \varepsilon_{11} \cdot \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22} \cdot \varepsilon_{33} + \varepsilon_{33} \cdot \varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{31}^2;$$

$$\mu(I_2) = \frac{\tau_{crit}}{2 \cdot \sqrt{I_{2,crit}}} \cdot \left(1 - \left(\frac{\sqrt{I_{2,crit}} - \sqrt{I_2}}{\sqrt{I_{2,crit}}} \right)^n \right); \quad (2)$$

$$0 < n < 1; \quad |I_2| \leq I_{2,crit},$$

где $\tau_{ij}, \varepsilon_{ij}$ - компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций; P - давление; δ_{ij} - символ Кронекера; $\mu(I_2)$ - функция второго инварианта I_2 тензора скоростей деформаций; τ_{crit} - эмпирическая константа, которая для одномерного течения представляет собой касательное напряжение, достигаемое при $|\dot{\gamma}| = \dot{\gamma}_{crit}$; n - эмпирическая константа; $I_{2,crit}$ - критическое значение модуля второго инварианта тензора скоростей деформаций, которое для одномерного сдвигового течения удовлетворяет условию

$$\dot{\gamma}_{crit} = 2 \cdot \sqrt{I_{2,crit}}.$$

Естественно, что параметр $I_{2,crit}$ должен рассматриваться как самостоятельная реологическая константа, определяемая для каждой конкретной жидкости на основе обработки соответствующих экспериментальных данных.

Для предложенной модели на интервале изменения модуля скорости сдвига от 0 до $\dot{\gamma}_{crit}$ крутизна кривой течения монотонно возрастает. При этом на левом конце интервала для $|\dot{\gamma}| \rightarrow 0$ крутизна кривой течения принимает некоторое конечное значение

$$\lim_{|\dot{\gamma}| \rightarrow 0} \{\mu_{loc}(|\dot{\gamma}|)\} = \frac{n \cdot \tau_{crit}}{\dot{\gamma}_{crit}}.$$

На правом же конце при $|\dot{\gamma}| \rightarrow \dot{\gamma}_{crit}$ крутизна кривой течения, удовлетворяя условию (1), асимптотически стремится к бесконечности.

Отметим, что без изменения сути могут быть предложены и другие формы соотношения (2). Один из таких модифицированных вариантов реологической модели рассматривается в [11, 12].

Реологическая модель, демонстрирующая проявление эффекта “отвердевания” в случае немонотонного изменения вязкости. Целый ряд экспериментальных данных указывает на то, что для одномерных течений таких жидкостей зависимость вязкости от скорости сдвига $\dot{\gamma}$ не является монотонной и на этой зависимости можно выделить два участка [13, 14].

На первом участке вязкость снижается до некоторого минимального значения, а на втором – возрастает. При этом, как уже отмечалось выше, приближение скорости сдвига к некоторому максимальному по модулю значению приводит к резкому увеличению крутизны кривой течения, что может быть интерпретировано как проявление эффекта “отвердевания”.

Наличие двух участков для области изменения скорости сдвига s , вообще говоря, принципиально различным характером зависимости вязкости жидкости от скорости сдвига предполагает возможность описывать эту зависимость двумя различными функциями. При этом необходимо обеспечить в некоторой точке $|I_2| = I_{2,crit1}$ “сшивание” не только для этих функций, но и их производных.

С учетом сказанного описание реологического поведения жидкостей такого рода предлагается проводить в соответствии со следующей реологической моделью

$$\tau_{ij} = -P \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \mu(I_2) \cdot \varepsilon_{ij}; \quad i, j = 1, 2, 3;$$

$$\mu(I_2) = \begin{cases} \mu_1(I_2); & |I_2| \leq I_{2,crit1}; \\ \mu_2(I_2); & I_{2,crit1} \leq |I_2| \leq I_{2,crit2}; \end{cases} \quad (3)$$

$$\mu_1(I_2) = K_1 \cdot (2 \cdot \sqrt{|I_2|})^{n_1-1}; \quad (4)$$

$$\mu_2(I_2) = \frac{K_1 \cdot 2^{n_1-1} \cdot (\sqrt{I_{2,crit1}})^{n_1}}{\sqrt{I_2}} \times \left\{ 1 + K_2 \cdot \left(1 - \left(\frac{\sqrt{I_{2,crit2}} - \sqrt{I_2}}{\sqrt{I_{2,crit2}} - \sqrt{I_{2,crit1}}} \right)^{n_2} \right) \right\}; \quad (5)$$

$$K_2 = \frac{\tau_{crit2}}{K_1 \cdot (2 \cdot \sqrt{I_{2,crit1}})^{n_1}} - 1;$$

$$n_2 = \frac{n_1 \cdot K_1 \cdot 2^{n_1} \cdot (\sqrt{I_{2,crit2}} - \sqrt{I_{2,crit1}})}{(\tau_{crit2} - K_1 \cdot (2 \cdot \sqrt{I_{2,crit1}})^{n_1}) \cdot (\sqrt{I_{2,crit1}})^{1-n_1}};$$

$$0 < n_1 < 1; \quad 0 < n_2 < 1;$$

$$I_{2,crit2} > I_{2,crit1},$$

где K_1 , τ_{crit2} , $I_{2,crit1}$, $I_{2,crit2}$, n_1 - эмпирические константы модели.

Естественно, что параметры $I_{2,crit1}$ и $I_{2,crit2}$ следует рассматривать как самостоятельные реологические константы, характеризующие поведение конкретной жидкости. Эти константы, как и три другие K_1 , τ_{crit2} , n_1 , должны определяться на основе обработки соответствующих экспериментальных данных.

Заметим, что для одномерных сдвиговых течений можно полагать

$$\dot{\gamma} = 2 \cdot \sqrt{I_2}. \quad (6)$$

Если не учитывать представление показателя степени n_2 через пять основных параметров реологической модели и принимать этот показатель степени n_2 в качестве еще одной независимой реологической константы, то функция $\mu(I_2)$, оставаясь непрерывной, будет иметь “излом” в точке сопряжения $|I_2| = I_{2,crit1}$ отдельных ветвей.

Главной особенностью этой модели является то, что для одномерных течений крутизна графика зависимости касательного напряжения τ от модуля скорости сдвига $|\dot{\gamma}|$ неограниченно возрастает по мере приближения с учетом (6) модуля второго инварианта $|I_2|$ тензора скоростей деформаций к некото-

рому критическому, но конечному значению $I_{2,crit2}$. Иначе говоря,

$$\lim_{|I_2| \rightarrow I_{2,crit2}} \left\{ \frac{d|\tau|}{d|\dot{\gamma}|} \right\} = \infty.$$

Последний результат и позволяет интерпретировать поведение рассматриваемой жидкости с точки зрения проявления эффекта “отвердевания”. Несмотря на неограниченное возрастание крутизны кривой течения при $|I_2| \rightarrow I_{2,crit2}$, касательное напряжение τ принимает в этом случае по модулю некоторое предельное и конечное значение τ_{crit2} .

Здесь же заметим, что согласно приведенной выше модели (3) с учетом (4), (5) минимум вязкости достигается на втором участке в некоторой промежуточной точке, принадлежащей отрезку $[I_{2,crit1}; I_{2,crit2}]$.

Предложенные выше математические модели носят обобщенный характер и могут быть использованы при описании механического поведения жидкостей, демонстрирующих проявление эффекта “отвердевания” в самых различных системах.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект № 12-08-00629а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградов, Г.В. Реология полимеров [Текст] / Г.В. Виноградов, А.Я. Малкин. – М.: Химия, 1977. – 440 с.
2. Астарита, Дж. Основы гидродинамики неньютоновских жидкостей [Текст] / Дж. Астарита, Дж. Марруччи. – М.: Мир, 1978. – 311 с.
3. Артюшков, Л.С. Динамика неньютоновских жидкостей [Текст] / Л.С. Артюшков – Л., 1979. – 228 с.
4. Литвинов, В.Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости [Текст] / В.Г. Литвинов. – М.: Наука, 1982. – 376 с.
5. Hoffman R. L. Discontinuous and dilatant viscosity behavior in concentrated suspensions. I. observation of a flow instability. // Transactions of the Society of Rheology. 1972. Vol. 16(1). P. 155–173.

6. Bender J., Wagner N. J. Reversible shear thickening in monodisperse and bidisperse colloidal dispersions. // *Journal of Rheology*. 1996. Vol. 40(5). P. 899–916.

7. Raghavan S. R., Khan S. A. Shear-thickening response of fumed silica suspensions under steady and oscillatory shear, *Journal of Colloid and Interface Science*. 1997. Vol. 185. P. 57–67.

8. Galindo-Rosales F. J., Rubio-Hernández F. J., Velázquez-Navarro J. F. Shear-thickening behavior of Aerosil R816 nanoparticles suspensions in polar organic liquids. // *Rheologica Acta*. 2009. Vol. 48. P. 699–708.

9. Wagner N., Brady J. F. Shear thickening in colloidal dispersions. // *Physics Today*. 2009. Vol. 62(10). P. 27–32.

10. Galindo-Rosales F. J., Rubio-Hernández F. J., Sevilla A., An apparent viscosity function for shear thickening fluids, *Journal of Non-Newtonian*. // *Fluid Mechanics*, 2011. Vol. 166 (5-6), P. 321–325.

11. Колодежнов, В.Н. Течение в плоском канале дилатантной жидкости с эффектом “отвердевания” [Текст] / В.Н. Колодежнов // *Обозрение прикладной и промышленной математики*. 2010. Т.17. Вып. 3. -С. 422.

12. Колодежнов, В.Н. Особенности течения в цилиндрическом канале жидкости, реологическая модель которой учитывает эффект “отвердевания” [Текст] / В.Н. Колодежнов // *Обозрение прикладной и промышленной математики*. 2011. Т. 18. Вып. 2. -С. 283 - 284.

13. Lee Y.S., Wagner N.J. Rheological Properties and Small – Angle Neutron Scattering of Shear Thickening, Nanoparticle Dispersion at High Shear Rates. // *Ind. Eng. Chem. Res.*, 2006, Vol. 45, № 21, P. 7015 – 7024.

14. Wisniewski A. Nanotechnology for increase of body protection capability. – URL :<http://www.witu.mil.pl/www/biuletyn/zeszyty/20080107p/7.pdf> . Дата обращения: 31.08.2012.