

УДК 664:542.69:621.867.4

DOI: <http://dx.doi.org/10.20914/2310-1202-2016-1-11-15>

Соискатель А.А. Киселев, соискатель А.А. Аникин,
доцент Ю.В. Чернухин

(Воронеж. гос. ун-т инж. технол.) кафедра технологии хлебопекарного, кондитерского,
макаронного и зерноперерабатывающего производств. тел. (473) 255–65–11

E-mail: vnii_kp@mail.ru

Applicant A.A. Kiselev, applicant A.A. Anikin,
associate professor Yu.V. Chernukhin

(Voronezh state university of engineering technologies) Department of technology of bread,
confectionery, macaroni and grain processing industries. phone (473) 255–65–11

E-mail: vnii_kp@mail.ru

Математическая модель течения расплава в канале гранулятора

Mathematical model of melt flow channel granulator

Реферат. Гранулирование углеводно-витаминно-минеральных добавок на основе мелассы проводится при высокой влажности (до 26 %), поэтому для стабильной работы гранулятора необходимо выявить характер течения расплава в нем. Для описания неизотермического течения расплава в грануляторе была разработана математическая модель, в которой в качестве исходных уравнений были использованы: уравнение неразрывности, уравнение движения и реологическое уравнение. Были приняты следующие допущения: течение расплава в грануляторе представляет собой установившийся ламинарный поток; силами инерции и гравитации можно пренебречь; расплавы представляют собой несжимаемые жидкости; градиент скорости в направлении течения значительно меньше, чем в поперечном направлении; градиент давления по поперечному сечению канала постоянен; течение является полностью гидродинамически развитым; влиянием эффектов на входе в канал и выходе из него можно пренебречь. В связи с принятыми допущениями можно считать, что в рассматриваемом грануляторе значимыми являются только компоненты скорости в направлении оси x , а всеми членами уравнения с компонентами v_y, v_z и их производными по координатам y и z можно пренебречь. В результате решения были получены: выражение для средней скорости, уравнение для определения объемного расхода, формула для расчета среднего времени пребывания расплава в грануляторе, уравнение для определения напряжения сдвига, уравнение для определения скорости сдвига и уравнение для определения потери давления. Результаты расчетов по полученным уравнениям хорошо согласуются с экспериментальными данными, отклонения изменялись в диапазоне 16–19 %. Полученные сведения о характере перемещения расплава в грануляторе позволили разработать методику расчета для проектирования рациональной конструкции формирующего узла гранулятора.

Summary. Granulation of carbohydrate-vitamin-mineral supplements based on molasses is performed at a high humidity (26 %), so for a stable operation of granulator it is necessary to reveal its melt flow pattern. To describe melt non-isothermal flow in the granulator a mathematical model with following initial equations: continuity equation, motion equation and rheological equation – was developed. The following assumptions were adopted: the melt flow in the granulator is a steady laminar flow; inertial and gravity forces can be ignored; melt is an incompressible fluid; velocity gradient in the flow direction is much smaller than in the transverse direction; the pressure gradient over the cross section of the channel is constant; the flow is hydrodynamically fully developed; effects impact on the channel inlet and outlet may be neglected. Due to the assumptions adopted, it can be considered that in this granulator only velocity components in the x -direction are significant and all the members of the equation with the components and their derivatives with respect to the coordinates y and z can be neglected. The resulting solutions were obtained: the equation for the mean velocity, the equation for determining the volume flow, the formula for calculating of mean time of the melt being in the granulator, the equation for determining the shear stress, the equation for determining the shear rate and the equation for determining the pressure loss. The results of calculations of the equations obtained are in complete agreement with the experimental data; deviation range is 16–19 %. The findings about the melt movement pattern in granulator allowed developing a methodology for calculating a rational design of the granulator molding unit.

Ключевые слова: гранулирование, математическая модель, углеводно-витаминно-минеральные добавки, меласса, течение, расплав.

Keywords: granulation, mathematical model, carbohydrate-vitamin-mineral supplements, molasses, flow, melt.

© Киселев А.А., Аникин А.А., Чернухин Ю.В., 2016

Для цитирования

Киселев А.А., Аникин А.А., Чернухин Ю.В. Математическая модель течения расплава в канале гранулятора // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. 2016. №1. С. 11–15. doi:10.20914/2310-1202-2016-1-11-15.

For cite

Kiselev A.A., Anikin A.A., Chernukhin Yu.V. Mathematical model of melt flow channel granulator *Vestnik voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta inzhenernykh tekhnologii* [Proceedings of the Voronezh state university of engineering technologies]. 2016, no. 1, pp. 11–15. (In Russ.). doi: 10.20914/2310-1202-2016-1-11-15.

Введение. В процессе гранулирования углеводно-витаминно-минеральных добавок (УВМД) на основе мелассы качество гранул определяется давлением и температурой расплава, которые зависят от соотношения площади и размеров кольцевого канала [1]. В связи с тем, что обработка углеводно-витаминно-минеральных добавок (УВМД) на основе мелассы в грануляторе проводится при более высокой влажности (до 26 %), а разогрев продукта осуществляется за счет эффекта диссипации, то для стабильной работы гранулятора необходимо обеспечить создание достаточного давления в матричной зоне.

Материалы и методы исследований. Для описания неизоэнтальпического течения расплава в грануляторе используем следующие уравнения [3]:

- уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right), \quad (1)$$

где v_x , v_y и v_z – компоненты вектора скорости;

- уравнение движения:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\vec{v}_x}{d\tau} &= \frac{\partial \rho}{\partial x} - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x \\ \rho \frac{d\vec{v}_y}{d\tau} &= \frac{\partial \rho}{\partial y} - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \rho g_y \\ \rho \frac{d\vec{v}_z}{d\tau} &= \frac{\partial \rho}{\partial z} - \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \end{aligned}, \quad (2)$$

здесь g – вектор ускорения свободного падения;

- реологическое уравнение:

$$\tau_{yx} = \left(\frac{1}{\varphi} \right)^{\frac{1}{m}} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^{\frac{1}{m}}, \quad (3)$$

Если в процессе неизоэнтальпического течения наблюдается теплопередача, то для описания такого процесса необходимо включить следующие уравнения:

- уравнение энергии:

$$\rho \frac{d}{d\tau} \left(U + \frac{1}{2} v^2 \right) = -\nabla \vec{q} + \rho (\vec{v} \vec{g}) - \nabla p \vec{v} - \nabla (\tau \vec{v}), \quad (4)$$

здесь \vec{q} – вектор потока теплоты (с компонентами q_x , q_y , q_z), а $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$; а диссипационный член равен:

$$\begin{aligned} \tau : \nabla \vec{v} &= \tau_{xx} \frac{dv_x}{dx} + \tau_{yy} \frac{dv_y}{dy} + \tau_{zz} \frac{dv_z}{dz} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \\ &+ \tau_{yz} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) + \tau_{zx} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \end{aligned}, \quad (5)$$

Система уравнений (1–5) не может быть решена в общем виде [1, 3, 5]. Поэтому для расчета полей скоростей и температур в грануляторе были приняты следующие допущения: течение расплава в грануляторе представляет собой установившийся (профиль скоростей потока не изменяется с течением времени) ламинарный (числа Рейнольдса $Re = 2rv_z \rho / \eta \leq 2100$) поток; по сравнению с силами трения и давления силами инерции и гравитации можно пренебречь; расплавы представляют собой несжимаемые жидкости; градиент скорости в направлении течения значительно меньше, чем в поперечном направлении; градиент давления по поперечному сечению канала постоянен; в каждом поперечном сечении канала течение является полностью гидродинамически развитым; влиянием эффектов на входе в канал и выходе из него можно пренебречь [4].

В связи с принятыми допущениями [5] уравнение неразрывности (1) принимает вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0, \quad (8)$$

а после всех упрощений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) &= 0 \triangleq \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + \underbrace{v_x \frac{\partial \rho}{\partial x}}_{=0 \text{ м.к. } \rho = \text{const}}, \\ \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

Из уравнения (9) следует, что, поэтому:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

Комбинируя упрощенное уравнение неразрывности (10) с упрощенным уравнением движения, получаем:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0, \quad (11)$$

Уравнение энергии (4):

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= \\ &= - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) - \\ &- T \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \\ &- \left(\tau_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \\ &- \left[\tau_{xy} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) + \tau_{zx} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] \end{aligned}, \quad (12)$$

После упрощения уравнения (12) принимает вид:

$$-\frac{\partial q_y}{\partial y} - \partial \tau_{xy} \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0, \quad (13)$$

Уравнения (11)-(13) образуют замкнутую систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

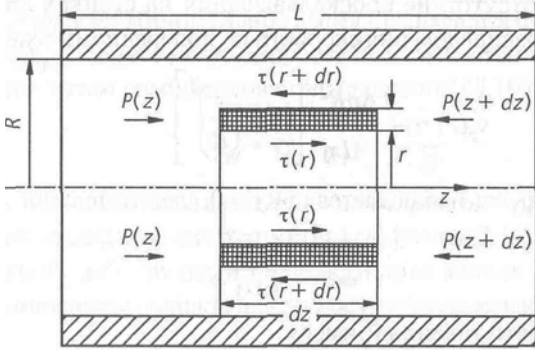


Рисунок 1. Равновесие сил, действующих на массовый элемент потока в канале круглого поперечного сечения

Далее рассмотрим течение расплава в канале круглого поперечного сечения (с радиусом R и длиной l), в котором влиянием эффектов на входе и выходе пренебрегаем. При этом считаем, что в выделенном элементе (рисунок 1) с толщиной слоя dr , движущегося со скоростью v_z , устанавливается равновесие сил [3]:

$$2\pi r dr \cdot [p(z) - p(z + dz)] + \tau \cdot 2\pi r dz - \tau(r + dr) \cdot 2\pi \cdot (r + dr) \cdot dz = 0 \quad (14)$$

Разложив выражение (14) в ряд Тейлора и отбросив все члены, кроме первого, вследствие их малости, получаем [3]:

$$p(z + dz) = p(z) + \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad (15)$$

$$\tau(r + dr) = \tau(r) + \frac{\partial \tau}{\partial r} dr$$

Поскольку течение является полностью развившимся, градиент давления можно считать постоянным:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\Delta p}{L} \quad (16)$$

Отбросив все члены высшего порядка, получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{\tau}{r} + \frac{d\tau}{dr} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\tau \cdot r) \quad (17)$$

В результате интегрирования уравнения (17) получаем уравнение движения для течения расплава в канале круглого сечения:

$$\tau(r) = \frac{\Delta p}{2L} r + \frac{C_1}{r} \quad (18)$$

Чтобы решить уравнение (14) для данного случая, необходимо сделать предположение, что

напряжение сдвига τ_x принимает нулевое значение при $r = \xi R$ (рисунок 1), где скорость v_z принимает максимальное значение $(v_z)_{\max}$.

Внешний радиус кольцевого зазора равен R . Таким образом:

$$C_1 = \frac{\xi^2 \Delta p R^2}{2L} \quad (19)$$

Подставляя (19) в уравнение (18), получаем:

$$\tau(r) = \frac{\Delta p R}{2L} \left[\frac{r}{R} - \xi^2 \frac{R}{r} \right] \quad (20)$$

Скорость сдвига для течения расплава в грануляторе рассчитывается по формуле:

$$\tau(r) = -\frac{dv_z}{dr} = -\frac{\Delta p R}{2\eta L} \left[\frac{r}{R} - \xi^2 \frac{R}{r} \right] \quad (21)$$

Интегрируя уравнение (21), получаем:

$$v_z(r) = -\frac{\Delta p R}{2\eta L} \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2 - 2\xi^2 \ln \left(\frac{R}{r} \right) + C_2 \right] \quad (22)$$

Значения двух неизвестных величин ξ и C_2 можно определить, используя следующие граничные условия:

- при $r = kR$, $v_z = 0$,
- при $r = R$, $v_z = 0$,

здесь $k = R_i / R$ – соотношение внутреннего и внешнего радиусов кольцевого зазора.

Тогда постоянная интегрирования:

$$C_2 = -1 \quad (23)$$

Подставив граничные условия и (23) в уравнение (22), получаем:

$$\xi = \sqrt{\frac{k^2 - 1}{2 \ln k}} \quad (24)$$

Результаты исследований. Таким образом, распределение скоростей можно выразить следующей формулой:

$$v_z(r) = \frac{R^2 \Delta p}{4\eta L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 + 2 \sqrt{\frac{k^2 - 1}{2 \ln k}} \ln \left(\frac{r}{R} \right) \right] \quad (25)$$

Когда $r = \xi R$, получаем выражение для максимальной скорости потока $(v_z)_{\max}$:

$$(v_z)_{\max} = \frac{R^2 \Delta p}{4\eta L} \left\{ 1 - \frac{k^2 - 1}{2 \ln k} \left[1 - \ln \left(\frac{k^2 - 1}{2 \ln k} \right) \right] \right\} \quad (26)$$

Средняя скорость рассчитывается по уравнению:

$$\bar{v}_z = \frac{R^2 \Delta p}{4\eta L} \left[\frac{1 - k^4}{1 - k^2} - \frac{k^2 - 1}{2 \ln k} \right] \quad (27)$$

Умножая выражение для средней скорости на площадь поперечного сечения кольцевого зазора, получаем уравнение для определения объемного расхода Q :

$$Q = \pi R^2 (1 - k^2) \cdot \bar{v}_z = \frac{\pi R^4}{4L} \left[(1 - k^4) - 0,7(k^2 - 1)^{3/2} \ln k \right] \frac{\Delta p}{\eta} \quad (28)$$

Среднее время пребывания расплава в канале обратно пропорционально средней скорости:

$$\bar{t} \approx L / \bar{v}_z = \frac{8\eta L^2}{R^2 \Delta p} \left[\frac{1 - k^4}{1 - k^2} - \sqrt{\frac{k^2 - 1}{2 \ln k}} \right]^{-1} \quad (29)$$

Были также получены:

– уравнение для определения напряжения сдвига τ :

$$\tau = \frac{\Delta p}{L} \cdot x; \quad (30)$$

– уравнение для определения скорости сдвига $\dot{\gamma}$:

$$\dot{\gamma} = \frac{2(m+2) \cdot \dot{Q}}{\pi D H^2}; \quad (31)$$

– уравнение для определения потери давления $(\Delta p / L)$:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{12\eta Q}{\pi D H^3} \quad (32)$$

Уравнения (30), (31) и (32) были получены на основе вышеприведенных допущений и упрощений.

Обсуждение результатов. Исходные данные для выполнения расчетов приведены в таблице 1.

Т а б л и ц а 1

Исходные данные для расчета скорости течения расплава

Наименование параметра	Обозначение	Значение
Плотность расплава, кг/м ³	ρ	1190
Динамическая вязкость, Па·с	η	12800
Индекс течения	n	1, 2, 3
Объемный расход, м ³ /с	Q_0	$0,543 \cdot 10^{-5}$
Угловая скорость, с ⁻¹	ω	8,5
Радиус матрицы на входе, м	R_{n2}	$6,0 \cdot 10^{-3}$
Радиус матрицы на выходе, м	R_{k2}	$12,5 \cdot 10^{-3}$
Длина матрицы, м	L	$20,0 \cdot 10^{-3}$
Число узлов сетки	K	11

Расчет осевой скорости так же проводился для N участков, результаты расчетов приведены на рисунке 2.

Проведен сравнительный анализ характера течения реологического раствора при различных значениях индекса течения $n = 1, 3, 5$ (рисунок 3).

Установлено, что средняя скорость течения расплава вдоль оси убывает на участке до 2/3 длины канала, а затем возрастает.

Результаты расчетов по полученным уравнениям хорошо согласуются с экспериментальными данными, отклонения изменялись в диапазоне 16–19 %.

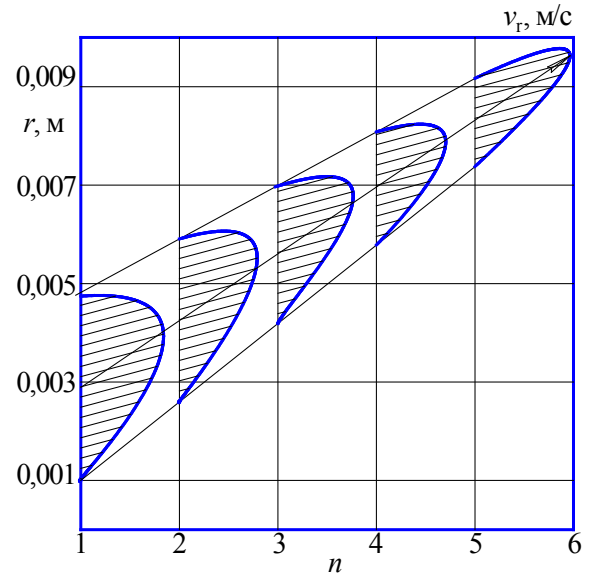


Рисунок 2. Распределение осевых скоростей течения расплава в цилиндрическом зазоре гранулятора на его разных участках аппроксимации

Полученные сведения о характере перемещения расплава в грануляторе позволили разработать методику расчета для проектирования рациональной конструкции формирующего узла гранулятора.

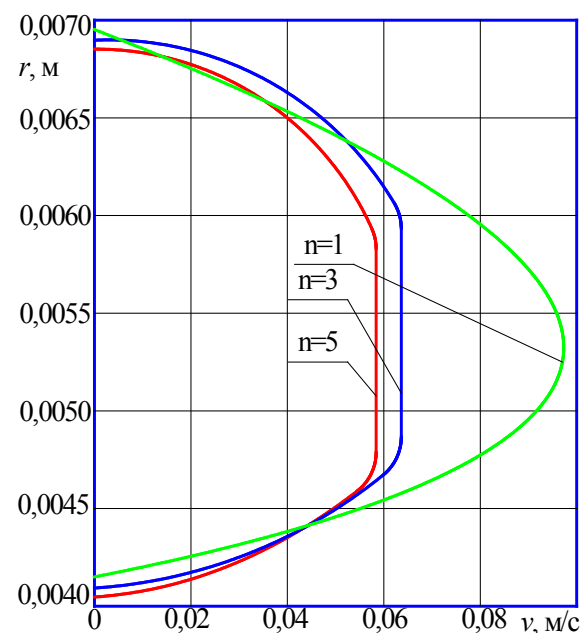


Рисунок 3. Распределение осевых скоростей течения расплава в цилиндрическом зазоре гранулятора при различных индексах течения на одном из участков

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Василенко В.Н., Остриков А.Н. Техника и технологии экструдированных комбикормов. Воронеж: ВГТА, 2011. 456 с.
- 2 Остриков А. Н., Абрамов О. В., Василенко В. Н., Попов А. С. Математическое моделирование течения аномально-вязких сред в каналах экструдера: монография. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2010. 237 с.
- 3 Микаэли В. Экструзионные головки для пластмасс и резины. Конструкция и технические расчеты: Пер. с англ. под ред. В.П. Володина. СПб.: Профессия, 2007. 472 с.
- 4 Rauwendaal C. Polymer extrusion: 2, repr. ed. Munich : Hanser, Cop. 1990. 568 p.
- 5 Schenkel G. Zur Extrusion von Kunststoffen aus Rechteck-Kanalen // Kunststoffe. 1981. № 74 (8). P. 479–484.

REFERENCES

- 1 Vasilenko V.N., Ostrikov A.N. Tekhnika i tekhnologii ekstrudirovannykh kombikormov [Technique and technologies of extruded mixed fodders]. Voronezh, VGTA, 2011. 456 p. (In Russ.).
- 2 Ostrikov A.N., Abramov O.V., Vasilenko V.N., Popov A.S. Matematicheskoe modelirovanie techeniya anomal'no-vyazkikh sred v kanalah ekstrudera [Mathematical modeling of abnormally viscous media channels extruders]. Voronezh, Izdatel'stvo VGU, 2010. 237 p. (In Russ.).
- 3 Michaeli W. Extrusion heads for plastics and rubber. The design and technical calculations. Saint-Petersburg, Profession, 2007. 472 p.
- 4 Rauwendaal C. Polymer extrusion: 2, repr. ed. Munich, Hanser, Cop. 1990. 568 p.
- 5 Schenkel G. Zur Extrusion von Kunststoffen aus Rechteck-Kanalen. *Kunststoffe*, 1981, no. 74 (8), pp. 479–484.