УДК 517.518.454

Профессор А. Д. Чернышов, аспирант Н. А. Хозяинова,
(Воронеж, гос. ун-т инж. технол.) кафедра высшей математики, тел. (473) 255-35-54

Решение задачи о растяжении упругой прямоугольной пластины методом быстрых разложений

Рассмотрена постановка и решение задачи о растяжении упругой прямоугольной пластины методом быстрых разложений. Система уравнений в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и решается методом Эйлера. Получены выражения для перемещений и напряжений.

The article considers the formulation of an elastic rectangular plate stretching problem and it's solution by the rapid expansion method. The system of partial differential equations is reduced to a system of ordinary differential equations and solved by Euler's method. The expressions for displacements and stresses are obtained.

Ключевые слова: упругость, дифференциальные уравнения, быстрые разложения.

В работе [1] получено решение для пластины конечных размеров методом малого параметра для упругопластической деформации, в исследовании [2] – методом граничных состояний. В [3] рассмотрено решение методом малых возмущений.

Рассмотрим прямоугольную пластину конечных размеров $a \times b$ (рисунок).

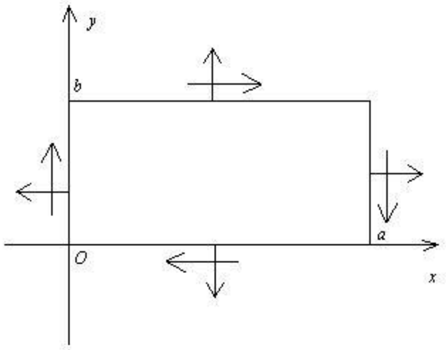

Рисунок. Прямоугольная пластина

Напряженно деформированное состояние пластины описывается уравнениями равновесия Ламе:

$$\begin{aligned}&(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x\partial y}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\\&(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\mu\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}=0.\end{aligned}\qquad(1)$$

Граничные условия (ГУ) для нормальных и касательных напряжений запишем равенствами:

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{y=0,b}=\sigma_{y0},\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)\bigg|_{y=0,b}=\frac{\tau_{y0}}{\mu},\qquad(2)$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\bigg|_{x=0,a}=\sigma_{x0},\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)\bigg|_{x=0,a}=\frac{\tau_{x0}}{\mu}.\qquad(3)$$

Решение задачи (1)-(3) в перемещениях (u,υ) представим быстрыми синус-разложениями по переменной y с граничными функциями второго порядка [4]:

$$\begin{aligned}&u(x,y)=\varphi_1(x)\left(1-\frac{y}{b}\right)+\varphi_2(x)\frac{y}{b}+\varphi_4(x)\left(\frac{y^3}{6b}-\frac{y\cdot b}{6}\right)+\\&+\varphi_3(x)\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6b}-\frac{y\cdot b}{3}\right)+\sum_{m=1}^{M}u_m(x)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right),\\&\upsilon(x,y)=\psi_1(x)\left(1-\frac{y}{b}\right)+\psi_2(x)\frac{y}{b}+\psi_4(x)\left(\frac{y^3}{6b}-\frac{y\cdot b}{6}\right)+\\&+\psi_3(x)\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6b}-\frac{y\cdot b}{3}\right)+\sum_{m=1}^{M}\upsilon_m(x)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right).\end{aligned}\qquad(4)$$

Подставим выражения (4) в систему уравнений (1)-(3), в результате чего получим замкнутую систему, содержащую две переменные (x,y). Чтобы избавиться от переменной y в этой системе, преобразуем уравнения в соответствии с методом быстрых разложений. Для этого левую и правую части каждого из уравнений Ламе (1) умножим на $\sin\frac{j\pi y}{b},\ j=1..M$ и проинтегрируем по $y\in[0,b]$. В результате получим $2M$ обыкновенных ДУ по переменной x относительно $2M+8$ неизвестных функций, указанных в (4). Дополним эту систему, рассмотрев равенства Ламе на границах при $y=0,\ y=b$. Таким образом, мы получим еще 4 уравнения. Оставшиеся 4 уравнения найдем из ГУ (2), подставляя в них выражения для пере-

© Чернышов А.Д., Хозяинова Н.А., 2012

мещений (4) и затем полагая $y=0,\ y=b$. Подобный метод использовался также в [5].

Граничные условия для напряжений зададим в виде:

$$\sigma_x\big|_{x=0}=\mu F_1(y),\ \sigma_x\big|_{x=a}=\mu F_2(y),\ \tau_{xy}\big|_{x=0}=\mu F_3(y),$$

$$\tau_{xy}\big|_{x=a}=\mu F_4(y),\ \sigma_y\big|_{y=0}=\mu G_1(x),\ \sigma_y\big|_{y=b}=\mu G_2(x),$$

$$\tau_{xy}\big|_{y=0}=\mu G_3(x),\ \tau_{xy}\big|_{y=b}=\mu G_4(x),$$

где $F_i(x),\ G_i(x),\ i=1..4$ - некоторые функции:

$$F_i(y)=b_{i1}y^2+b_{i2}y+b_{i3},\ G_i(x)=a_{i1}x+a_{i2},\ i=1..4.$$

Константы, определяющие напряжения на границах, зависимы между собой согласно условиям равновесия сил и моментов.

Полученную в итоге систему $2M+8$ уравнений приведем к безразмерному виду, разделив левую и правую часть на μ. В рядах Фурье (1) ограничимся двумя слагаемыми, $M=2$, и выпишем 12 дифференциальных уравнений первого и второго порядков для 12 неизвестных функций: $\varphi_i,\psi_i,\ u_j,\upsilon_j,\ j=1,2.$:

$$(\eta+2)\begin{pmatrix}\left(\varphi_1''(x)+\varphi_2''(x)\right)\dfrac{b}{\pi}-\\ -\left(\varphi_3''(x)+\varphi_4''(x)\right)\dfrac{b^3}{\pi^3}+u_1''(x)\dfrac{b}{2}\end{pmatrix}+$$
$$+(\eta+1)\begin{pmatrix}\left(\psi_2'(x)-\psi_1'(x)\right)\dfrac{2}{\pi}-\psi_4'(x)\left(\dfrac{2}{\pi^3}-\dfrac{1}{6\pi}\right)b^2+\\ +\psi_3'(x)\left(\dfrac{2}{\pi^3}-\dfrac{1}{6\pi}\right)b^2-\upsilon_2'(x)\dfrac{4}{3}\end{pmatrix}+$$
$$+\left(\varphi_3(x)\frac{b}{\pi}+\varphi_4(x)\frac{b}{\pi}-u_1(x)\frac{\pi^2}{2b}\right)=0, \qquad (5)$$

$$(\eta+2)\begin{pmatrix}\varphi_1''(x)\dfrac{b}{2\pi}-\varphi_2''(x)\dfrac{b}{2\pi}-\\ -\varphi_3''(x)\dfrac{b^3}{8\pi^3}+\varphi_4''(x)\dfrac{b^3}{8\pi^3}+u_2''(x)\dfrac{b}{2}\end{pmatrix}+$$
$$+(\eta+1)\left(-\psi_3'(x)\frac{b^2}{4\pi}-\psi_4'(x)\frac{b^2}{4\pi}+\frac{4}{3}\upsilon_1'(x)\right)+$$
$$+\left(\varphi_3(x)\frac{b}{2\pi}-\varphi_4(x)\frac{b}{2\pi}-u_2(x)\frac{2\pi^2}{b}\right)=0, \qquad (6)$$

$$(\eta+2)\left(\psi_3(x)\frac{b}{\pi}+\psi_4(x)\frac{b}{\pi}-\upsilon_1(x)\frac{\pi^2}{2b}\right)+$$
$$+(\eta+1)\begin{pmatrix}-\varphi_1'(x)\dfrac{2}{\pi}+\varphi_2'(x)\dfrac{2}{\pi}+\varphi_3'(x)\left(\dfrac{2}{\pi^3}-\dfrac{1}{6\pi}\right)b^2-\\ -\varphi_4'(x)\left(\dfrac{2}{\pi^3}-\dfrac{1}{6\pi}\right)b^2-u_2'(x)\dfrac{4}{3}\end{pmatrix}+$$
$$+\begin{pmatrix}\psi_1''(x)\dfrac{b}{\pi}+\psi_2''(x)\dfrac{b}{\pi}-\psi_3''(x)\dfrac{b^3}{\pi^3}-\\ -\psi_4''(x)\dfrac{b^3}{\pi^3}+\upsilon_1''(x)\dfrac{b}{2}\end{pmatrix}=0, \qquad (7)$$

$$(\eta+2)\left(\psi_3(x)\frac{b}{2\pi}-\psi_4(x)\frac{b}{2\pi}-\upsilon_2(x)\frac{2\pi^2}{b}\right)+$$
$$+(\eta+1)\left(-\varphi_3'(x)\frac{b^2}{4\pi}-\varphi_4'(x)\frac{b^2}{4\pi}+\frac{4}{3}u_1'(x)\right)+$$
$$+\begin{pmatrix}\psi_1''(x)\dfrac{b}{2\pi}-\psi_2''(x)\dfrac{b}{2\pi}-\psi_3''(x)\dfrac{b^3}{8\pi^3}+\\ +\psi_4''(x)\dfrac{b^3}{8\pi^3}+\upsilon_2''(x)\dfrac{b}{2}\end{pmatrix}=0, \qquad (8)$$

$$(\eta+1)\begin{pmatrix}-\psi_1'(x)\dfrac{1}{b}+\psi_2'(x)\dfrac{1}{b}-\psi_3'(x)\dfrac{b}{3}-\psi_4'(x)\dfrac{b}{6}+\\ +\upsilon_1'(x)\dfrac{\pi}{b}+\upsilon_2'(x)\dfrac{2\pi}{b}\end{pmatrix}+$$
$$+(\eta+2)\varphi_1''(x)+\varphi_3(x)=0, \qquad (9)$$

$$(\eta+1)\begin{pmatrix}-\varphi_1'(x)\dfrac{1}{b}+\varphi_2'(x)\dfrac{1}{b}-\varphi_3'(x)\dfrac{b}{3}-\varphi_4'(x)\dfrac{b}{6}+\\ +u_1'(x)\dfrac{\pi}{b}+u_2'(x)\dfrac{2\pi}{b}\end{pmatrix}+$$
$$+(\eta+2)\psi_3(x)+\psi_1''(x)=0, \qquad (10)$$

$$(\eta+1)\begin{pmatrix}-\psi_1'(x)\dfrac{1}{b}+\psi_2'(x)\dfrac{1}{b}+\psi_3'(x)\dfrac{b}{6}+\psi_4'(x)\dfrac{b}{3}-\\ -\upsilon_1'(x)\dfrac{\pi}{b}+\upsilon_2'(x)\dfrac{2\pi}{b}\end{pmatrix}+$$
$$+(\eta+2)\varphi_2''(x)+\varphi_4(x)=0, \qquad (11)$$

$$(\eta+1)\begin{pmatrix}-\varphi_1'(x)\dfrac{1}{b}+\varphi_2'(x)\dfrac{1}{b}+\varphi_3'(x)\dfrac{b}{6}+\varphi_4'(x)\dfrac{b}{3}-\\ -u_1'(x)\dfrac{\pi}{b}+u_2'(x)\dfrac{2\pi}{b}\end{pmatrix}+$$
$$+(\eta+2)\psi_4(x)+\psi_2''(x)=0, \qquad (12)$$

$$(\eta+2)\begin{pmatrix}-\psi_1(x)\dfrac{1}{b}+\psi_2(x)\dfrac{1}{b}-\psi_3(x)\dfrac{b}{3}-\\ -\psi_4(x)\dfrac{b}{6}+\upsilon_1(x)\dfrac{\pi}{b}+\upsilon_2(x)\dfrac{2\pi}{b}\end{pmatrix}+$$
$$+\eta\varphi_1'(x)=(a_{11}x+a_{12}), \qquad (13)$$

$$-\varphi_1(x)\frac{1}{b}+\varphi_2(x)\frac{1}{b}-\varphi_3(x)\frac{b}{3}-\varphi_4(x)\frac{b}{6}+$$
$$+u_1(x)\frac{\pi}{b}+u_2(x)\frac{2\pi}{b}+\psi_1'(x)=(a_{31}x+a_{32}), \qquad (14)$$

$$(\eta+2)\begin{pmatrix}-\psi_1(x)\dfrac{1}{b}+\psi_2(x)\dfrac{1}{b}+\psi_3(x)\dfrac{b}{6}+\\ +\psi_4(x)\dfrac{b}{3}-\upsilon_1(x)\dfrac{\pi}{b}+\upsilon_2(x)\dfrac{2\pi}{b}\end{pmatrix}+$$
$$+\eta\varphi_2'(x)=(a_{21}x+a_{22}), \qquad (15)$$

$$-\varphi_1(x)\frac{1}{b}+\varphi_2(x)\frac{1}{b}+\varphi_3(x)\frac{b}{6}+\varphi_4(x)\frac{b}{3}-$$
$$-u_1(x)\frac{\pi}{b}+u_2(x)\frac{2\pi}{b}+\psi_2'(x)=(a_{41}x+a_{42}). \qquad (16)$$

Здесь $\eta = \dfrac{\lambda}{\mu} = 1.(27)$, для стали. Размеры пластины возьмем $a = 1,\ b = 0.4$.

Полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (5)-(16) будем решать методом Эйлера. Для этого представим каждую из искомых функций в виде

$$f(x) = \tilde{f}(x) + f^*(x), \qquad (17)$$

где $\tilde{f}(x)$ - общее решение однородной системы; $f^*(x)$ - частное решение неоднородной системы.

В данном случае частное решение неоднородной системы следует искать в том же виде, в каком заданы правые части – то есть в виде линейной функции:

$$\varphi_i^*(x) = A_i x + B_i,\ \psi_i^*(x) = A_{i+6}x + B_{i+6},\ i = 1..4,$$
$$u_j^*(x) = A_{j+5}x + B_{j+5}, \upsilon_1^*(x) = A_{11}x + B_{11},\ j = 1,2. \qquad (18)$$

Тогда первая производная каждой функции будет константой A_i, а вторая производная равна 0. Подставим выражения (18) в формулы (5)-(16). Уравнения, входящие в систему, должны выполняться при любом $x \in [0, a]$, поэтому приравняем правые и левые части уравнений при x^1 и при x^0. Решив обе системы, найдем $A_i,\ B_i,\ i = 1..12$ и дополнительные условия для напряжений на границах, необходимые для совместности системы:

$$G_1(x) = a_{11}x + a_{12},\ G_2(x) = a_{11}x + a_{12} - ba_{31},$$
$$G_3(x) = a_{31}x + a_{32},\ G_4(x) = a_{31}x + a_{32} - \frac{a_{11}b\eta}{\eta + 2}.$$

Таким образом, частные решения принимают вид:

$$u^*(x,y) = \left(a_{31}x + a_{32} - \frac{ba_{11}(\eta+1)}{2(\eta+2)}\right)y -$$
$$-\frac{a_{11}(\eta+1)}{(\eta+2)}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6b} - \frac{y\cdot b}{3}\right) - \frac{a_{11}(\eta+1)}{(\eta+2)}\left(\frac{y^3}{6b} - \frac{y\cdot b}{6}\right),$$
$$\upsilon^*(x,y) = \left(\frac{2a_{11}x + 2a_{12} - a_{31}b(\eta+1)}{2(\eta+2)}\right)y -$$
$$-\frac{a_{31}(\eta+1)}{(\eta+2)}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6b} - \frac{y\cdot b}{3}\right) - \frac{a_{31}(\eta+1)}{(\eta+2)}\left(\frac{y^3}{6b} - \frac{y\cdot b}{6}\right).$$

Отметим, что полученные в процессе решения условия для перемещений $\sigma_0\big|_{y=0,b},\ \tau_{xy}\big|_{y=0,b}$ не являются ограничением общности рассмотрений, а всего лишь отражают тот факт, что пластина находится в равновесии.

Общее решение однородной системы, соответствующей системе (5)-(16), будем искать в виде:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\varphi}_1(x) = A_1 e^{kx},\ \tilde{\varphi}_2(x) = A_2 e^{kx},\ \tilde{\varphi}_3(x) = A_3 e^{kx},\\
&\tilde{\varphi}_4(x) = A_4 e^{kx},\ \tilde{u}_1(x) = A_5 e^{kx},\ \tilde{u}_2(x) = A_6 e^{kx},\\
&\tilde{\psi}_1(x) = A_7 e^{kx},\ \tilde{\psi}_2(x) = A_8 e^{kx},\ \tilde{\psi}_3(x) = A_9 e^{kx},\\
&\tilde{\psi}_4(x) = A_{10} e^{kx},\ \tilde{\upsilon}_1(x) = A_{11} e^{kx},\ \tilde{\upsilon}_2(x) = A_{12} e^{kx}.
\end{aligned} \qquad (19)$$

После подстановки выражений (18) в однородную систему, соответствующую (5)-(16), получим линейную однородную систему относительно постоянных $A_i,\ i = 1..12$. Приравняем к нулю ее определитель, и, решив уравнение 16-й степени относительно неизвестной k, найдем корни $k_i,\ i = 1..16$. Такое количество корней в уравнении для определителя объясняется тем, что система дифференциальных уравнений состоит из ДУ первого и второго порядков, а общий порядок системы – 16.

Среди полученных решений $k_1,...,k_6$ - нулевые корни, k_7, k_8 - действительные корни, k_9, k_{10} и k_{11}, k_{12} - пары противоположных по знаку мнимых корней, k_{13}, k_{14} и k_{15}, k_{16} - пары комплексно сопряженных корней. Общее решение однородной системы будет складываться из решений для каждого k_i.

Для нулевых корней $k_1,...,k_6$ решения будут представлены в виде многочленов степени $i-1,\ i = 1..6$:

$\varphi_1^{(1)} = A_1^{(1)},...,\upsilon_2^{(1)} = A_{12}^{(1)}$ для $k_1 = 0$,

$\varphi_1^{(2)} = A_1^{(2)}x + B_1^{(2)},...,\upsilon_2^{(2)} = A_{12}^{(2)}x + B_{12}^{(2)}$ для $k_2 = 0$,

$\varphi_1^{(6)} = A_1^{(6)}x^5 + B_1^{(6)}x^4 + C_1^{(6)}x^3 + D_1^{(6)}x^2 + E_1^{(6)}x + F_1^{(6)}$,

...,

$\upsilon_2^{(6)} = A_{12}^{(6)}x^5 + B_{12}^{(6)}x^4 + C_{12}^{(6)}x^3 + D_{12}^{(6)}x^2 + E_{12}^{(6)}x + F_{12}^{(6)}$

для $k_6 = 0$.

В этих выражениях нижний индекс константы соответствует порядковому номеру функции: $\begin{matrix}\varphi_1 \sim A_1,...,\varphi_4 \sim A_4,\ u_1 \sim A_5,\ u_2 \sim A_6,\\ \psi_1 \sim A_7,...,\psi_4 \sim A_{10},\ \upsilon_1 \sim A_{11},\ \upsilon_2 \sim A_{12}.\end{matrix}$

Верхний индекс, заключенный в круглые скобки – номер i кратности $k_i = 0$, $i = 1..6$.

Подставим выражения для $\varphi_1^{(1)},...,\upsilon_2^{(1)}$ в систему однородных уравнений, соответствующих (5)-(16). Поскольку $k_1 = 0$ обращает определитель системы в 0, после подстановки одно из уравнений системы станет линейно зависимым. Исключив это уравнение и положив $A_1^{(1)} = 1$, найдем оставшиеся коэффициенты $A_i^{(1)},\ i = 2..12$ и получим решения для первого корня.

Аналогичным образом найдем решения для нулевых корней $k_2,...,k_6$.

Решения, соответствующие действительным корням, представим в виде:
$\varphi_1^{(7)} = A_1^{(7)} e^{k_7}$, $\varphi_2^{(7)} = A_2^{(7)} e^{k_7}$, $\varphi_3^{(7)} = A_3^{(7)} e^{k_7}$, $\varphi_4^{(7)} = A_4^{(7)} e^{k_7}$,
$u_1^{(7)} = A_5^{(7)} e^{k_7}$, $u_2^{(7)} = A_6^{(7)} e^{k_7}$, $\psi_1^{(7)} = A_7^{(7)} e^{k_7}$, $\psi_2^{(7)} = A_8^{(7)} e^{k_7}$,
$\psi_3^{(7)} = A_9^{(7)} e^{k_7}$, $\psi_4^{(7)} = A_{10}^{(7)} e^{k_7}$, $\upsilon_1^{(7)} = A_{11}^{(7)} e^{k_7}$, $\upsilon_2^{(7)} = A_{12}^{(7)} e^{k_7}$,
для k_7. Здесь также верхний индекс в круглых скобках – порядковый номер корня k, нижний индекс константы соответствует номеру функции. То есть для корня k_8 выражения запишутся аналогично, но с верхним индексом (8). Подставляя представления действительных корней в однородную систему, соответствующую (5)-(16), исключая линейно-зависимое уравнение и принимая одну из искомых констант $A_i^{(7)}$ или $A_i^{(8)}$ равной 1, найдем решения, соответствующие действительным корням.

Аналогичным образом найдем решения, соответствующие мнимым корням $k_9, ..., k_{12}$, представляя искомые функции в виде:

$$\varphi_1^{(j)} = A_1^{(j)} \sin\left(k_j x\right) + B_1^{(j)} \cos\left(k_j x\right),$$
$$...,$$
$$\upsilon_2^{(j)} = A_{12}^{(j)} \sin\left(k_j x\right) + B_{12}^{(j)} \cos\left(k_j x\right).$$

Здесь $j = 9..12$ - порядковый номер корня k_j.

Аналогичным образом найдем решения, соответствующие комплексным корням $k_{13}, ..., k_{14}$, представляя искомые функции в виде

$$\varphi_1^{(j)} = e^{\mathrm{Re}(k_j)} \left(A_1^{(j)} \sin\left(\mathrm{Im}\left(k_j\right) \cdot x\right) + B_1^{(j)} \cos\left(\mathrm{Im}\left(k_j\right) \cdot x\right)\right),$$
$$...,$$
$$\upsilon_2^{(j)} = e^{\mathrm{Re}(k_j)} \left(A_{12}^{(j)} \sin\left(\mathrm{Im}\left(k_j\right) \cdot x\right) + B_{12}^{(j)} \cos\left(\mathrm{Im}\left(k_j\right) \cdot x\right)\right).$$

Здесь $j = 13..16$ - порядковый номер корня k_j, $\mathrm{Re}\left(k_j\right)$ - действительная часть *j*-го корня, $\mathrm{Im}\left(k_j\right)$ - его мнимая часть.

Таким образом, общее решение однородной системы определяется по формулам:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1 &= \sum_{i=1}^{16} C_i \cdot \varphi_1^{(i)}, ..., \tilde{\varphi}_4 = \sum_{i=1}^{16} C_i \cdot \varphi_4^{(i)}, \\ \tilde{u}_1 &= \sum_{i=1}^{16} C_i \cdot u_1^{(i)},\ \tilde{u}_2 = \sum_{i=1}^{16} C_i \cdot u_2^{(i)}, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_1 &= \sum_{i=1}^{16} C_i \cdot \psi_1^{(i)}, ..., \tilde{\psi}_4 = \sum_{i=1}^{16} C_i \cdot \psi_4^{(i)}, \\ \tilde{\upsilon}_1 &= \sum_{i=1}^{16} C_i \cdot \upsilon_1^{(i)},\ \tilde{\upsilon}_2 = \sum_{i=1}^{16} C_i \cdot \upsilon_2^{(i)}. \end{aligned} \tag{21}$$

В (20) – (21) входят 16 неизвестных констант $C_i,\ i = 1..16$. Они определяются методом вариации произвольных постоянных. Для этого решение в виде (17) подставим в ГУ (3), преобразованные согласно методу быстрых разложений, и в дополнительные условия равенства нулю перемещений и их производных в точке $(0,0)$:

$$\begin{aligned} &u(0,0) = 0,\ \upsilon(0,0) = 0, \\ &u_y(x,y)\big|_{x=0,y=0} = 0,\ \upsilon_y(x,y)\big|_{x=0,y=0} = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Решив систему из (22) преобразованных уравнений (3), найдем произвольные постоянные $C_i,\ i = 1..16$ и дополнительные условия для коэффициентов $b_{i1}, b_{i2},\ i = 1..4$, определяющих напряжения $\sigma_y\big|_{x=0,a}$, $\tau_{xy}\big|_{x=0,a}$ на границах $x = 0,\ x = a$. Эти дополнительные условия также не являются ограничением общности рассмотрения, а являются следствием того, что пластина находится в равновесии.

После нахождения произвольных постоянных получим общее решение неоднородной системы уравнений – функции $\varphi_i, \psi_i,\ u_j,\ \upsilon_j,\ j = 1,2.$ После подстановки их в (4) найдем решение поставленной задачи в перемещениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев, Д.Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела [Текст] / Д.Д. Ивлев, Л. В. Ершов. М.: Наука, 1978. - 207 с.

2. Пеньков, В.Б. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики [Текст] / В.Б. Пеньков // Дальневосточный математический журнал. 2001. - Т. 2. – № 2. – С. 115-137.

3. Семыкина, Т.Д., Учет анизотропии при плоском упругопластическом деформировании листовых материалов [Текст] / Т.Д. Семыкина, Л. П. Цуканова. // Вестник ВГУ. Серия: Физика, математика. 2009. – № 1. – С. 159-163.

4. Чернышов, А. Д. Быстрые ряды Фурье. Актуальные проблемы математики, информатики и механики [Текст] / А. Д. Чернышов: сб. трудов Международной конференции. - Воронеж, 2010. - С. 988-394.

5. Чернышов, А. Д. Применение быстрых разложений для решения задачи о растяжении упругой пластины конечных размеров с отверстием [Текст] / А. Д. Чернышов, Н. В. Минаева, Н. А. Хозяинова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета Серия: Механика предельного состояния. 2011. - № 2 (10). – С. 106-112.