

# Информационные технологии, моделирование и управление

УДК: 637.073:534.2

DOI: <http://dx.doi.org/10.20914/2310-1202-2016-1-39-44>

Профессор А.А. Хвостов, доцент Р.С. Сумина,  
(ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)),  
кафедра математики

E-mail: khvtol1974@yandex.ru, rsumina@mail.ru,

профессор Г.И. Котов,

(Воронеж. гос. ун-т. инж. технол.) физики, теплотехники и теплоэнергетики

E-mail: giktv@mail.ru

доцент А.В. Иванов

(Воронеж. гос. ун-т. инж. технол.) кафедра информационных и управляющих систем  
тел. (473) 255-38-75, E-mail: president@vsuet.ru, andrious@rambler.ru,

Professor A.A. Khvostov, associate Professor R.S. Sumina,

(Military Training and Research Center of the Air Force "Air Force Academy named after  
Professor N.E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarin" (Voronezh)), Department of Mathematics,

E-mail: khvtol1974@yandex.ru, rsumina@mail.ru,

Professor G.I. Kotov,

(Voronezh State University of Engineering Technologies) Department of physic, heat engineering and power system

E-mail: giktv@mail.ru

associate Professor A.V. Ivanov

(Voronezh State University of Engineering Technologies) Department of information and control systems. phone (473) 255-38-75,

E-mail: president@vsuet.ru, andrious@rambler.ru

## Стохастическая модель процесса гомогенизации молока с использованием цепи Маркова

## Stochastic model of milk homogenization process using Markov's chain

*Реферат.* В работе рассматривается способ разработки математической модели процесса гомогенизации молочных продуктов. При разработке математической модели использована теория цепей Маркова, причем в основу структуры модели положена цепь Маркова с дискретными состояниями и непрерывным параметром, за который принято давление гомогенизации. Машинная реализация модели осуществлена в среде структурного моделирования MathWorks Simulink™. Идентификация параметров модели осуществлялась путем минимизации среднеквадратичного отклонения расчетных данных от экспериментальных по каждой фракции жировой фазы молочных продуктов. В качестве набора экспериментальных данных были использованы результаты обработки микроскопических изображений распределения жировых шариков образцов цельного молока, которое подвергалось гомогенизации при разных давлениях. В качестве метода оптимизации был использован метод Pattern Search с алгоритмом поиска Latin Hypercube из библиотеки Global Optimization Toolbox. Погрешность расчетов составила в среднем по всем фракциям 0,88 % (относительной доли единицы), максимальная относительная погрешность составила 3,7 % при давлении гомогенизации 30 МПа, что может быть обусловлено очень резким изменением свойств молока от первоначального по фракционному составу в начале процесса гомогенизации и отсутствием экспериментальных данных при давлениях гомогенизации ниже указанного значения. Предложенная математическая модель позволяет рассчитать профиль объемного или массового распределения жировой фазы (жировых шариков) в продукте в зависимости от давления гомогенизации и может быть использована в лабораторных и научных исследованиях состава молочных продуктов, а также при расчетах, проектировании и моделировании технологического оборудования предприятий молочной промышленности.

*Summary.* The process of development of a mathematical model of the process of homogenization of dairy products is considered in the work. The theory of Markov's chains was used in the development of the mathematical model, Markov's chain with discrete states and continuous parameter for which the homogenisation pressure is taken, being the basis for the model structure. Machine realization of the model is implemented in the medium of structural modeling MathWorks Simulink™. Identification of the model parameters was carried out by minimizing the standard deviation calculated from the experimental data for each fraction of dairy products fat phase. As the set of experimental data processing results of the micrographic images of fat globules of whole milk samples distribution which were subjected to homogenization at different pressures were used. Pattern Search method was used as optimization method with the Latin Hypercube search algorithm from Global Optimization Toolbox library. The accuracy of calculations averaged over all fractions of 0.88% (the relative share of units), the maximum relative error was 3.7% with the homogenization pressure of 30 MPa, which may be due to the very abrupt change in properties from the original milk in the particle size distribution at the beginning of the homogenization process and the lack of experimental data at homogenization pressures of below the specified value. The mathematical model proposed allows to calculate the profile of volume and mass distribution of the fat phase (fat globules) in the product, depending on the homogenization pressure and can be used in the laboratory and research of dairy products composition, as well as in the calculation, design and modeling of the process equipment of the dairy industry enterprises.

*Ключевые слова:* молочные продукты, гомогенизация, цепи Маркова, случайные процессы, массовое распределение.

*Keywords:* dairy products, homogenization of dairy products, Markov's chains, stochastic processes, mass distribution.

© Хвостов А.А., Сумина Р.С., Котов Г.И., Иванов А.В., 2016

Для цитирования  
Хвостов А.А., Сумина Р.С., Котов Г.И., Иванов А.В. Стохастическая модель процесса гомогенизации молока с использованием цепи Маркова // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. 2016. № 1. С. 39-44. doi:10.20914/2310-1202-2016-1-39-44.

For cite  
Khvostov A.A., Sumina R.S., Kotov G.I., Ivanov A.V. Stochastic model of milk homogenization process using Markov's chain *Vestnik voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta inzhenernykh tekhnologii*. [Proceedings of the Voronezh state university of engineering technologies]. 2016, no. 1, pp. 39-44. (In Russ.). doi: 10.20914/2310-1202-2016-1-39-44.

Процесс гомогенизации молока и жидких молочных продуктов используется для увеличения дисперсности жировой фазы, что позволяет исключить отстаивание жира во время хранения молока, замедляет окислительные процессы, дестабилизацию и подсыживание при интенсивном перемешивании и транспортировании. Под степенью гомогенизации понимают средний размер жировых шариков, степень устойчивой во времени однородности (гомогенности) в смысле отсутствия микроконцентрационных неоднородностей, образующихся при смешивании взаимно-нерастворимых веществ [1]. Также размер жировых шариков в сливках оказывает существенное влияние на процесс маслообразования и степень использования жира.

Для управления процессами гомогенизации молока необходимы математические модели процессов гомогенизации, которые связывают управляющие параметры с показателями качества процесса гомогенизации. В качестве управляющих параметров используются режимные параметры технологического процесса производства молока (расход, температура молока и т.д.) и конструктивные особенности оборудования (давление в гомогенизаторе, геометрия щелей гомогенизирующих головок и т.д.). Таким образом, используемые сегодня математические модели описывают связь гидродинамических режимов в зоне диспергирования со средней степенью гомогенизации на базе основных теорий диспергирования [2]. Эти модели дают возможность рассчитывать параметры оборудования, обеспечивающего оптимальные скорости потоков гомогенизируемой среды и соответствующих давлений в гомогенизаторах для достижения заданной степени гомогенизации [3, 4].

Не всегда связь между основными управляющими параметрами процесса гомогенизации и качеством осуществления этого процесса поддается корректной формализации. Иногда дополнительно требуется оценка массового или объемного распределения частиц в объеме исследуемой пробы, так как степень гомогенизации оценивает размер всех частиц в среднем и не всегда выявля-

ет содержание малых концентраций крупных частиц в эмульсии, а также другие неоднородности.

В случае моделирования массового или объемного распределения и сложной структуры связи с конструкцией один из возможных вариантов - использование стохастических моделей, основанных на предположении о вероятностях перехода жировых шариков из одной фракции в другую, характеризующихся некоторыми феноменологическими коэффициентами. В рамках таких моделей особый интерес представляют модели процесса на основе цепей Маркова [5]. Процесс гомогенизации в таком случае рассматривается как переход жировых шариков из одного состояния (нахождение в определенной фракции массового или объемного распределения) в другие (фракции, соответствующие меньшей массе или объему).

Исходя из сказанного, предлагается следующая модель процесса гомогенизации. Под действием внешних факторов система может переходить из одного состояния в другое. Система принимает состояния, которые ассоциируются с количеством жировых шариков, соответствующих определенной массовой или объемной фракции. Дискретное конечное множество состояний в соответствии с принятой шкалой описывается множеством состояний в виде следующего множества  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N\}, i = \overline{1, N}$ , где  $x_i$  - числовой диапазон количества жировых шариков в  $i$ -ой фракции.

При синтезе структуры модели приняты следующие допущения: процесс гомогенизации носит последовательный характер; интенсивность перехода из одного состояния в другое отражает интенсивность процесса гомогенизации и характеризуется величиной  $\lambda_{i,j}$ , а скорость изменения вероятности обратного перехода равна нулю; процесс гомогенизации моделируется переходом из состояния  $x_i$  в  $x_j$ , где  $j > i$ , при этом интенсивностью переходов  $\lambda_{j,i}$  пренебрегаем; состояние системы характеризуется вероятностью  $P_i$ , где  $i = \overline{1, N}$ , где  $N$  - количество фракций. При принятых допущениях граф состояний представлен на рисунке 1.

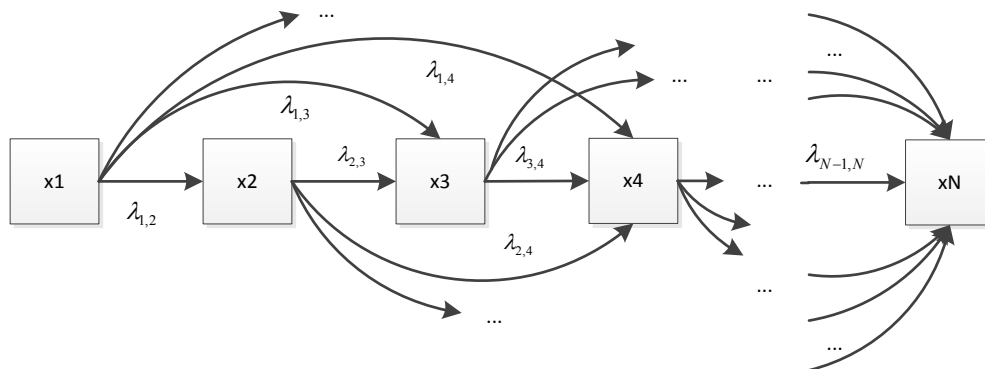


Рисунок 1. Граф состояний

Таким образом, математическая модель процесса гомогенизации примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dP_1(p)}{dp} = -(\lambda_{1,2} + \lambda_{1,3} + \dots + \lambda_{1,n} + \dots + \lambda_{1,N})P_1(p); \\ \frac{dP_2(p)}{dp} = \lambda_{1,2}P_1(p) - \\ -(\lambda_{2,3} + \lambda_{2,4} + \dots + \lambda_{2,n} + \dots + \lambda_{2,N})P_2(p); \\ \dots \\ \frac{dP_n(p)}{dp} = \lambda_{1,n}P_1(p) + \lambda_{2,n}P_2(p) + \dots + \lambda_{n-1,n}P_{n-1}(p) - \\ -(\lambda_{n,n+1} + \lambda_{n,n+2} + \dots + \lambda_{n,N})P_n(p); \\ \dots \\ \frac{dP_N(p)}{dp} = \lambda_{1,N}P_1(p) + \lambda_{2,N}P_2(p) + \dots + \lambda_{n,N}P_n(p) + \dots \\ + \lambda_{N-1,N}P_{N-1}(p); \\ P_1(0) = P_{1,0}, P_2(0) = P_{2,0}, \dots, \\ P_n(0) = P_{n,0}, \dots, P_N(0) = P_{N,0}; \\ \lambda_{i,j} \geq 0, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (1)$$

где  $p$  – давление гомогенизации.

Пусть плотности потоков  $\lambda_{i,j}$  постоянны, тогда, задавая матрицей интенсивностей прямых переходов  $\lambda$  и вероятностей состояний  $P$ :

$$[\lambda_{ij}] = \begin{bmatrix} -\sum_{k=2}^N \lambda_{1,k} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_{1,2} & -\sum_{k=3}^N \lambda_{2,k} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & \\ \lambda_{1,n} & \lambda_{2,n} & \dots & -\sum_{k=n}^N \lambda_{n,k} & \dots & 0 \\ & & \dots & & & \\ \lambda_{1,N} & \lambda_{2,N} & \dots & \lambda_{n,N} & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$[P_i] = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_n \\ \dots \\ P_N \end{bmatrix}, \quad (3)$$

в матричном виде модель примет вид:

$$\frac{dP}{dp} = L \cdot P, P|_{p=0} = P_0, \quad (4)$$

где  $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N)^T$ ,  $\Lambda_i = \sum_{j=i+1}^N \lambda_{i,j}$ ,

$\lambda = (\lambda_{i,j})$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $j = \overline{1, N}$ ,  $L = (\lambda - \text{diag}(\Lambda))$  – генератор цепи Маркова.

Тогда решение получим в виде:

$$P(p) = \exp(pL) = \sum_{k=1}^N \beta_k \cdot \exp(p \cdot \alpha_k) \cdot \tilde{\beta}_k, p \geq 0, \quad (5)$$

где  $\alpha_k, \beta_k$  – собственные числа и вектора матрицы  $L$ , а  $\tilde{\beta}_k$  – строки обратной матрицы  $L^{-1}$ .

Математическая модель реализована в интерактивной графической среде MathWorks Simulink™ [6]. Преобразование системы дифференциальных уравнений в структурную Simulink™ модель осуществлялось по методике, представленной в [7].

Для идентификации параметров модели использовались экспериментальные образцы молока, в которых изменение распределения жировых шариков осуществлялось гомогенизацией исходного образца на лабораторной установке гомогенизации научно-производственной лаборатории группы компаний «ЭФКО». Для исследований использовались давления 30, 60, 90, 120, 150, 180 МПа. Полученные после гомогенизации пробы исследовались с помощью цифрового микроскопа с увеличениями 100, 400, 600 крат. Параллельно делалось по 2 снимка, ввиду чего общее количество снимков составило 42 штуки. Пример микроснимка пробы молока представлен на рисунке 2.

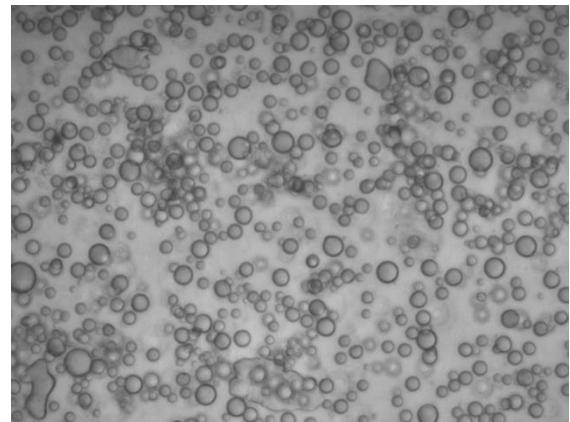


Рисунок 2. Микроснимок пробы молока

Для обработки микроснимков молока использовалось специальное программное обеспечение, которое для каждого снимка осуществляет последовательные преобразования с целью распознавания жировых шариков на снимках и расчет их геометрических параметров (площади), позволяющих рассчитать затем объем или массу, допуская сферическую форму шарика и соответствующую плотность [8, 9]. Распознанные на изображениях объекты классифицировались и распределялись по фракциям. Затем строились гистограммы распределения жировой фазы по площади проекции шарика на плоскость снимка, массе или объему. Результаты классификации по шести фракциям представлены в таблице 1.

Количество жировых шариков во фракциях

Номер фракции	Фракция, площадь, мкм <sup>2</sup>	Негом. молоко	30МПа	60МПа	90МПа	120МПа	150МПа	180МПа
P <sub>6</sub>	3,5÷79,5	306	656	1306	1441	2974	4195	3725
P <sub>5</sub>	41,5÷79,5	67	98	86	74	86	94	63
P <sub>4</sub>	79,5÷117,5	32	36	20	9	8	6	0
P <sub>3</sub>	117,5÷155,5	12	9	5	3	0	0	0
P <sub>2</sub>	155,5÷193,5	5	2	0	0	0	0	0
P <sub>1</sub>	193,5÷ 232	2	0	0	0	0	0	0

Для корректного использования аппарата сетей Маркова были нормированы, исходя из условия:

$$\sum_{i=1}^N P(p_i) = 1, \quad (6)$$

где  $N$  – количество фракций.

Для этого необходимо введение дополнительного коэффициента нормировки  $k_{\text{норм}}$ , на который умножаются значения таблицы 1

для каждого образца, обеспечивающего выполнение равенства (6):

$$k_{\text{норм}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N P(p_i)}. \quad (7)$$

Нормированные значения представлены в таблице 2.

Т а б л и ц а 2

Нормированные доли шариков во фракциях

Номер фракции	Фракция, площадь, мкм <sup>2</sup>	Негом. молоко	30МПа	60МПа	90МПа	120МПа	150МПа	180МПа
P <sub>6</sub>	3,5÷79,5	0,721698	0,818976	0,921665	0,94368	0,969361	0,976717	0,983369
P <sub>5</sub>	41,5÷79,5	0,158019	0,122347	0,060692	0,048461	0,028031	0,021886	0,016631
P <sub>4</sub>	79,5÷117,5	0,075472	0,044944	0,014114	0,005894	0,002608	0,001397	0
P <sub>3</sub>	117,5÷155,5	0,028302	0,011236	0,003529	0,001965	0	0	0
P <sub>2</sub>	155,5÷193,5	0,011792	0,002497	0	0	0	0	0
P <sub>1</sub>	193,5÷ 232	0,004717	0	0	0	0	0	0
коэффициент нормировки		0,002358	0,001248	0,000706	0,000655	0,000326	0,000233	0,000264

Для поиска значений параметров минимизировалось среднеквадратичное отклонение расчетных данных от экспериментальных по каждой фракции:

$$S = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (P_j(p_i)^{\text{экс}} - P_j(p_i)^{\text{расч}})^2 \xrightarrow{\lambda} \min, \quad (8)$$

где  $M$ ,  $N$  – количество фракций и точек контроля при заданном давлении гомогенизации соответственно.

Для минимизации критерия (8) использовался метод оптимизации Pattern Search с методом поиска Latin Hypercube из библиотеки Global Optimization Toolbox MathWorks™. Результаты математического моделирования распределений представлены на рисунках 3, 4 и таблице 3. Погрешность расчетов составила в среднем по всем фракциям 0,88 % (относительной доли единицы), максимальная относительная погрешность составила 3,7% при давлении гомогенизации 30 МПа, что, видимо, обусловлено очень резким изменением свойств

молока от первоначального по фракционному составу в начале процесса гомогенизации и отсутствием экспериментальных данных при давлениях гомогенизации ниже 30 МПа.

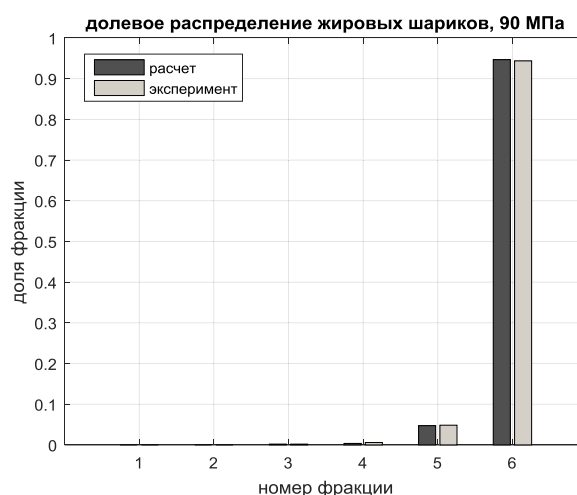


Рисунок 3. Долевое распределение жировых шариков, 90 МПа

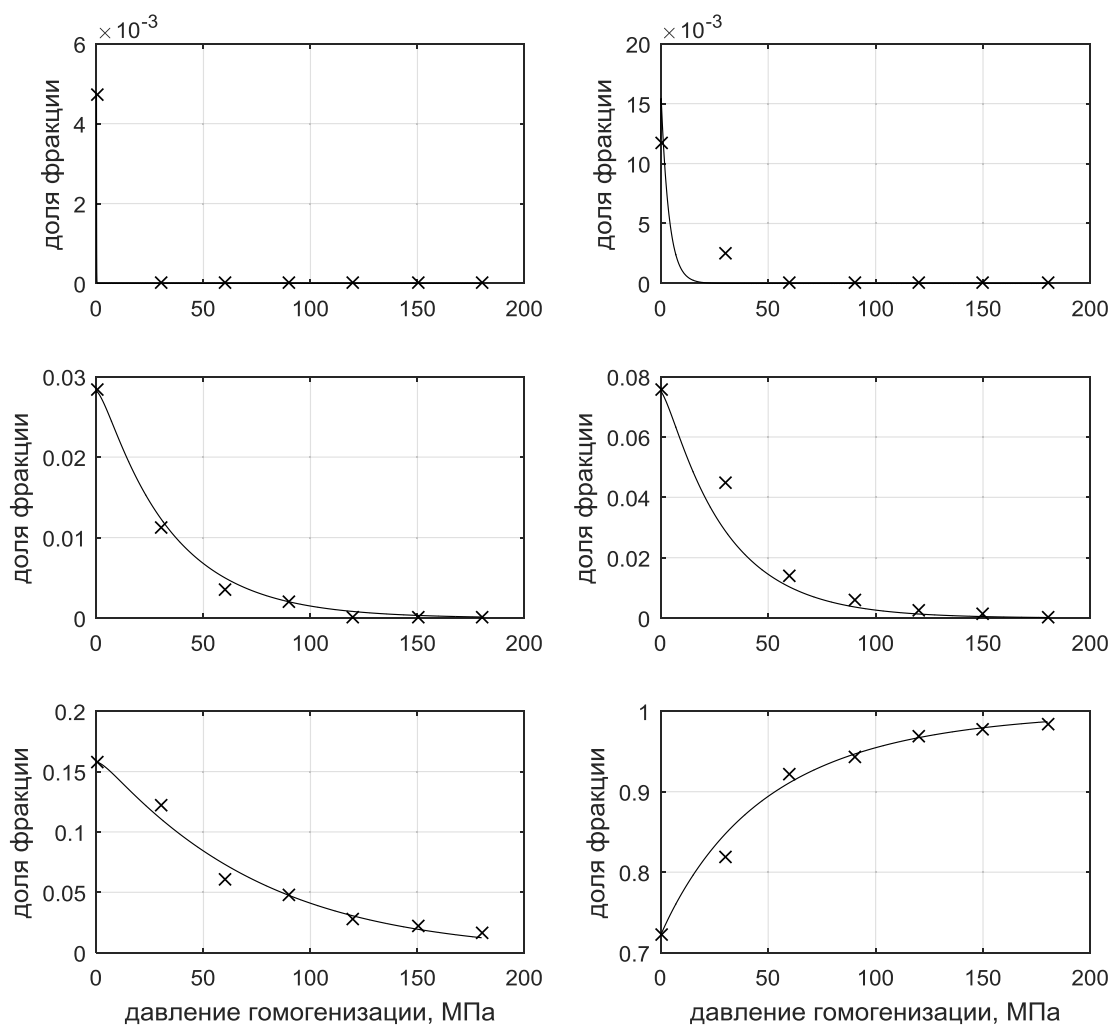


Рисунок 4. Результаты математического моделирования распределений

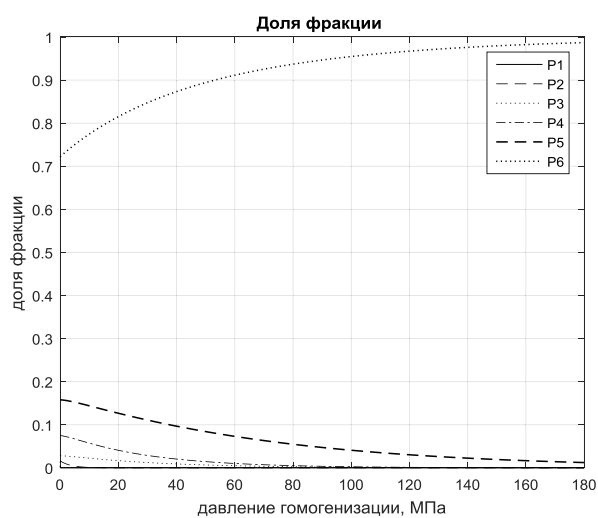


Рисунок 5. Распределение массовых долей фракций жировых шариков как функция давления гомогенизации

Т а б л и ц а 3  
Параметры математической модели

Параметр	Значение	Параметр	Значение
$\lambda_{1,2}$	$1,0486 \cdot 10^7$	$\lambda_{2,4}$	0,027566
$\lambda_{1,3}$	79,575	$\lambda_{3,4}$	0,013467
$\lambda_{1,4}$	$1,9661 \cdot 10^5$	$\lambda_{1,5}$	0,051985
$\lambda_{2,3}$	0,036654	$\lambda_{1,6}$	0,00012538
$\lambda_{2,5}$	0,033678	$\lambda_{4,5}$	0,0026074
$\lambda_{2,6}$	0,042411	$\lambda_{4,6}$	0,039152
$\lambda_{3,5}$	0,012001	$\lambda_{5,6}$	0,013208
$\lambda_{3,6}$	0,0083473		

Разработанная математическая модель позволяет оценить распределение массовых долей фракций жировых шариков как функцию давления гомогенизации (рисунок 5),

что дает более детальное представление о ходе процесса гомогенизации. При репрезентативном наборе экспериментальных данных параметры модели будут характеризовать интенсивность процесса разрушения конкретной фракции жировых шариков, что позволит более глубоко изучить особенность функцио-

нирования технологического оборудования и проводить целенаправленное усовершенствование его конструкции и повышение его эффективности. Например, выяснить, как изменение конструктива влияет на разрушение каждой из фракций.

## ЛИТЕРАТУРА

1 Dairy Processing Handbook. Lausanne, Tetrapak, 2015.

2 Нужин Е.В., Гладушняк А.К. Гомогенизация и гомогенизаторы. Одесса: Печатный дом, 2007.

3 Петрачков Б. В. Разработка вихревого гомогенизатора на основе теоретических и экспериментальных исследований процесса низкотемпературной кавитационной гомогенизации: автореф. дисс. ... канд. техн. наук. М., 2006.

4 Орешина М.Н. Импульсное диспергирование многокомпонентных пищевых систем и его аппаратная реализация: автореф. дисс. ... д-ра техн. наук: 05.18.12. М., 2010.

5 Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. М.: КНОРУС, 2013.

6 Дьяконов В.П. MATLAB и Simulink для радиоинженеров. М.: ДМК Пресс, 2015.

7 Martinez W.L., Martinez A.R. Computational Statistics Handbook with MATLAB®. New York, Chapman & Hall/CRC, 2002.

8 Битюков В.К., Хвостов А.А., Ребриков Д.И., Мерзликин В.Е. Автоматизация обработки микрофотографий молочных продуктов с использованием ImageJ и Statistica // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. 2014. № 4 (62). С. 58-63.

9 Хвостов А.А., Ребриков Д.И., Мерзликин В.Е. Идентификация массовых распределений жировой фазы в молоке с помощью универсальных распределений Пирсона // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. 2015. № 2 (64). С. 66-71.

## REFERENCES

1 Dairy Processing Handbook. Lausanne, Tetrapak, 2015.

2 Nuzhin E.V., Gladushnyak A.K. Gomogenizatsiya i gomogenizatory [Homogenization and blenders]. Odessa, Pechatnyi dom, 2007. (In Russ.).

3 Petrachkov B. V. Razrabotka vikhrevogo gomogenizatora na osnove teoreticheskikh i eksperimental'nykh issledovaniy proctessa nizkotemperaturnoi kavitatsionnoi gomogenizatsii: Avtoreferat kand. tekhn. nauk. [The development of a vortex homogenizer on the basis of theoretical and experimental studies of low-temperature cavitation homogenizing process. Abstr. diss. cand. tech. sci.]. Moscow, 2006. (In Russ.).

4 Oreshina M. N. Impul'snoe dispergирование mnogokomponentnykh pishchevykh system i ego apparaturnaya realizatsiya: avtoref. diss. doc. tekhn. nauk. [Pulse dispersion of multi-component food systems and its hardware implementation]. Moscow, 2010. (In Russ.).

5 Ventsel' E.S. Issledovanie operatsii. Zadachi, printsipy, metodologiya [Operations research. Objectives, principles, methodology]. Moscow, KNORUS, 2013. (In Russ.).

6 D'yakonov V.P. MATLAB I Simulink dlya radioinzhenerov [MATLAB and Simulink for radio]. Moscow, DMK-Press, 2015. (In Russ.).

7 Martinez W.L., Martinez A.R. Computational Statistics Handbook with MATLAB®. New York, Chapman & Hall/CRC, 2002.

8 Bityukov V.K., Khvostov A.A., Rebrikov D.I., Merzlikin V.E. Automation of processing of dairy products micrographs using ImageJ and Statistica. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta inzhenernykh tekhnologij. [Proceedings of the Voronezh state university of engineering technologies], 2014, no. 4(62), pp. 58-63. (In Russ.).

9 Khvostov A.A., Rebrikov D.I., Merzlikin V.E. Identification of the mass distributions of the fat phase in milk using universal distributions Pearson. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta inzhenernykh tekhnologij. [Proceedings of the Voronezh state university of engineering technologies], 2015, no. 2(64), pp. 66-72. (In Russ.).