

УДК 532

DOI: <http://dx.doi.org/10.20914/2310-1202-2016-1-70-78>

Старший преподаватель А.С. Сидоренко

(Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военная воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина») кафедра общепрофессиональных дисциплин.  
тел. 8(904)210-17-90  
E-mail: [sas1.vrn@mail.ru](mailto:sas1.vrn@mail.ru)

доцент А.И. Потапов

(Воронеж. гос. ун-т. инж. технол.) кафедра машин и аппаратов пищевых производств  
тел. 8(906)586-75-97  
E-mail: [a.i.potapov@rambler.ru](mailto:a.i.potapov@rambler.ru)

Senior lecturer A.S. Sidorenko

(Russian air force military educational and scientific center "Air force academy named after professor N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin") Department of all-professional disciplines  
phone 8(904)210-17-90  
E-mail: [sas1.vrn@mail.ru](mailto:sas1.vrn@mail.ru)

associate professor A.I. Potapov

(Voronezh state university of engineering technologies) Department of food production machines  
phone 8(906)586-75-97  
E-mail: [a.i.potapov@rambler.ru](mailto:a.i.potapov@rambler.ru)

## Математическая модель кинетостатического расчета плоских рычажных механизмов

## Mathematical model of kinetostatithic calculation of flat lever mechanisms

*Реферат.* В настоящее время широко распространённые графоаналитические методы анализа во многом утратили свою актуальность, уступив место различным аналитическим методам с использованием компьютерных технологий. Поэтому особый интерес представляет разработка математической модели кинетостатического расчета механизмов в форме библиотеки процедур расчета для всех двухповодковых групп Ассура (ГА) и начального звена. Перед обращением к соответствующей процедуре, вычисляющей все усилия в кинематических парах, необходимо предварительно вычислить силы инерции, моменты от сил инерции, а также знать все внешние силы и моменты, действующие на эту ГА. С этой целью показаны расчетные схемы силового анализа для каждого вида ГА второго класса, а также начального звена. Нахождение реакций во внутренних и внешних кинематических парах основано на записи условий равновесия с учетом сил инерции и моментов от сил инерции (принцип Даламбера). Полученные таким образом уравнения кинетостатики для их универсальности были решены по правилу Крамера. Таким образом, для каждой ГА второго класса были найдены все 6 неизвестных: усилия в кинематических парах, направления этих сил, а также плечи сил. Если исследуется кинетостатика механизма с параллельным закреплением двух ГА на начальном звене, то в этом случае сила является геометрической суммой сил, действующих на начальное звено со стороны отброшенных ГА. Таким образом, получена математическая модель кинетостатического расчета механизмов в форме библиотек математических процедур определения реакций всех ГА второго класса. Разработанная математическая модель кинетостатического расчета позволяет просто осуществить ее программную реализацию.

*Summary.* Currently widely used graphical-analytical methods of analysis largely obsolete, replaced by various analytical methods using computer technology. Therefore, of particular interest is the development of a mathematical model kinetostatical calculation mechanisms in the form of library procedures of calculation for all powered two groups Assyrians (GA) and primary level. Before resorting to the appropriate procedure that computes all the forces in the kinematic pairs, you need to compute inertial forces, moments of forces of inertia and all external forces and moments acting on this GA. To this end shows the design diagram of the power analysis for each species GA of the second class, as well as the initial link. Finding reactions in the internal and external kinematic pairs based on equilibrium conditions with the account of forces of inertia and moments of inertia forces (Dalembert principle). Thus obtained equations of kinetostatical for their versatility have been solved by the Cramer rule. Thus, for each GA of the second class were found all 6 unknowns: the forces in the kinematic pairs, the directions of these forces as well as forces the shoulders. If we study kinetostatic mechanism with parallel consolidation of two GA in the initial link, in this case, power is the geometric sum of the forces acting on the primary link from the discarded GA. Thus, the obtained mathematical model kinetostatical calculation mechanisms in the form of libraries of mathematical procedures for determining reactions of all GA of the second class. The mathematical model kinetostatical calculation makes it relatively simple to implement its software implementation.

*Ключевые слова:* математическая модель, кинетостатический расчет, группы Ассура.

*Keywords:* mathematical model, kinetostatithic calculation, groups of Assur.

© Сидоренко А.С., Потапов А.И., 2016

Для цитирования

Сидоренко А.С., Потапов А.И. Математическая модель кинетостатического расчета плоских рычажных механизмов // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. 2016. №1. С. 70-78. doi:10.20914/2310-1202-2016-1-70-78.

For cite

Sidorenko A.S., Potapov A.I. Mathematical model of kinetostatithic calculation of flat lever mechanisms *Vestnik voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta inzhenernyh tekhnologij* [Proceedings of the Voronezh state university of engineering technologies]. 2016, no. 1, pp. 70-78. (In Russ.). doi: 10.20914/2310-1202-2016-1-70-78.

В настоящее время широко распространённые графоаналитические методы анализа во многом утратили свою актуальность, уступив место различным аналитическим методам с использованием компьютерных технологий [1-5]. Для кинестатического анализа механизмов используются разнообразные компьютерные программы, в основе которых положены математические модели кинестатического расчета. В связи с этим актуальной является разработка математической модели кинестатического расчета плоских рычажных механизмов в форме библиотеки процедур расчета для всех двухповодковых групп Ассура и начального звена [2-4].

#### Группа Ассура первого вида

Перед обращением к процедуре, вычисляющей все усилия в кинематических парах, необходимо предварительно вычислить силы инерции, моменты от сил инерции, а также знать все внешние силы и моменты, действующие на эту группу Ассура. Расчетная схема приведена на рисунке 1 [1, 3].

Определение сил  $F_{21}$  и  $F_{34}$ . Сила  $F_{21}$  приложена в кинематической паре А, а сила  $F_{34}$  - в паре С. Тангенциальные составляющие этих сил  $F_{21}^r$  и  $F_{34}^r$  определяются по уравнениям моментов  $\sum M_B = 0$ , составленных из условий равновесия второго и третьего звеньев. Направления тангенциальных составляющих этих сил примем совпадающими с положительными направлениями осей  $y_2, y_3$ . Тогда сумма моментов на втором звене в развернутом виде может быть представлена в виде

$$(F_{in2} \sin \alpha_{Fin2} - G_2) X_2 - F_{in2} \cos \alpha_{Fin2} Y_2 + M_{in2} + M_2 + F_2 \sin \alpha_{F2} X_{F2} - F_2 \cos \alpha_{F2} Y_{F2} - F_{21}^r l_{ab} = 0, \quad (1)$$

здесь  $F_{in2}$ ,  $M_{in2}$  - сила инерции и момент от сил инерции на втором звене;  $F_2$ ,  $M_2$  - внешние сила и момент, действующие на второе звено;  $\alpha_{Fin2}$  - угол наклона силы инерции второго звена;  $\alpha_{F2}$  - угол наклона внешней силы на втором звене;  $X_2$ ,  $Y_2$ ,  $X_{F2}$ ,  $Y_{F2}$  - координаты центра масс и точки приложения силы  $F_2$  второго звена относительно точки В в абсолютной системе координат;  $l_{AB}$  - длина звена 2.

Координаты  $X_2$ ,  $Y_2$ ,  $X_{F2}$ ,  $Y_{F2}$  определяются по следующим выражениям:

$$X_2 = S_{2x} \cos \varphi_2 - S_{2y} \sin \varphi_2 - l_{AB} \cos \varphi_2; \\ X_{F2} = P_{2x} \cos \varphi_2 - P_{2y} \sin \varphi_2 - l_{AB} \cos \varphi_2;$$

$$Y_2 = S_{2x} \sin \varphi_2 - S_{2y} \cos \varphi_2 - l_{AB} \sin \varphi_2; \quad (2)$$

$$Y_{F2} = P_{2x} \sin \varphi_2 - P_{2y} \cos \varphi_2 - l_{AB} \sin \varphi_2;$$

Формула для определения  $F_{34}^r$  аналогична:

$$F_{34}^r = \frac{(F_{in3} \sin \alpha_{Fin3} - G_3) X_3 - F_{in3} \cos \alpha_{Fin3} Y_3}{l_{CB}} + \frac{M_3 + M_{in3} + F_3 \sin \alpha_{F3} X_{F3} - F_3 \cos \alpha_{F3} Y_{F3}}{l_{CB}}. \quad (3)$$

Определения переменных, входящих в формулу соответствуют определениям переменных звена 2.

Нормальные составляющие  $F_{21}^n$ ,  $F_{34}^n$  определяются по уравнениям типа  $\sum F_x = 0$  и  $\sum F_y = 0$ .

$$F_{21}^r = \frac{(F_{in2} \sin \alpha_{Fin2} - G_2) X_2 - F_{in2} \cos \alpha_{Fin2} Y_2}{l_{AB}} + \frac{M_2 + M_{in2} + F_2 \sin \alpha_{F2} X_{F2} - F_2 \cos \alpha_{F2} Y_{F2}}{l_{AB}}. \quad (4)$$

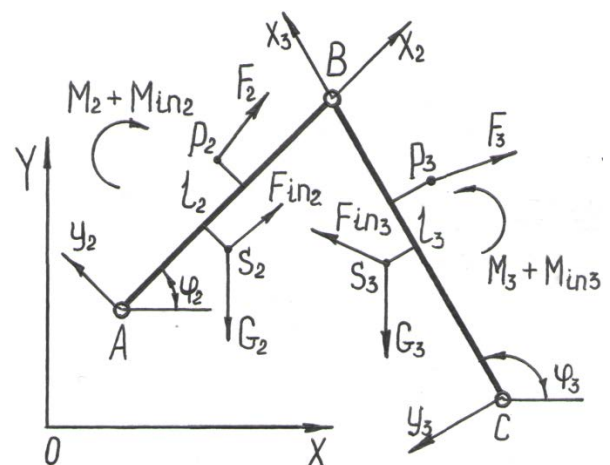


Рисунок 1. Расчетная схема группы Ассура первого вида

Запишем эти уравнения более подробно:

$$F_{21}^n \cos \varphi_2 + F_{21}^r \cos \left( \varphi_2 + \frac{\pi}{2} \right) + F_2 \cos \varphi_2 + F_{34}^r \cos \left( \varphi_2 + \frac{\pi}{2} \right) + F_3 \cos \varphi_3 + F_{34}^n \cos \varphi_3 = 0; \quad (5) \\ F_{21}^n \sin \varphi_2 + (F_{21}^r + F_{34}^r) \sin \left( \varphi_2 + \frac{\pi}{2} \right) + F_2 \sin \varphi_2 + F_3 \sin \varphi_3 + F_{34}^n \sin \varphi_3 - G_2 - G_3 = 0.$$

Как видно, эти уравнения являются линейными относительно неизвестных  $F_{21}^n$  и  $F_{34}^n$ . Решение этих уравнений получим по правилу Крамера:

$$F_{21}^n = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & \cos\varphi_3 \\ b_2 & \sin\varphi_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\varphi_2 & \cos\varphi_3 \\ \sin\varphi_2 & \sin\varphi_3 \end{vmatrix}}; \quad F_{34}^n = \frac{\begin{vmatrix} \cos\varphi_2 & b_1 \\ \sin\varphi_2 & b_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\varphi_2 & \cos\varphi_3 \\ \sin\varphi_2 & \sin\varphi_3 \end{vmatrix}}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} -b_1 &= F_{21}^n \cos\left(\varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right) + F_2 \cos\alpha_{F_2} + \\ &+ F_{34}^\tau \cos\left(\varphi_3 + \frac{\pi}{2}\right) + F_3 \cos\alpha_3; \\ -b_2 &= F_{21}^n \sin\left(\varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right) + F_2 \sin\alpha_{F_2} + \\ &+ F_{34}^\tau \sin\left(\varphi_3 + \frac{\pi}{2}\right) + F_3 \cos\alpha_3 - G_2 - G_3. \\ F_{21}^n \cos\varphi_2 + F_{21}^\tau \cos\left(\varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right) + F_{in2} \cos\alpha_{Fin2} \\ &+ F_{in3} \cos\alpha_{Fin3} + F_{34} \cos\left(\varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right) = 0; \\ F_{21}^n \sin\varphi_2 + F_{21}^\tau \sin\left(\varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right) + F_{in2} \sin\alpha_{Fin2} \\ &+ F_2 \sin\alpha_{F_2} + F_{in3} \sin\alpha_{Fin3} + F_3 \sin\alpha_{F_3} - G_2 - G_3. \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь можно определить  $F_{21}$  и  $F_{34}$ , а также углы наклона этих сил:

$$\begin{aligned} F_{21} &= \sqrt{(F_{21}^\tau)^2 + (F_{21}^n)^2}; \\ F_{34} &= \sqrt{(F_{34}^\tau)^2 + (F_{34}^n)^2}; \\ \alpha_{F_{21}} &= \arctan\left(\frac{F_{21}^\tau}{F_{21}^n}\right) + \varphi_2; \\ \alpha_{F_{34}} &= \arctan\left(\frac{F_{34}^\tau}{F_{34}^n}\right) + \varphi_3. \end{aligned} \quad (8)$$

Определение величины и направления силы  $F_{23}$ . Эту силу определяем из условия равновесия всех сил, действующих на звено 2. Проекция этой силы на координатные оси можно найти из уравнений:

$$F_{23x} = F_{21} \cos\alpha_{F_{21}} - F_{in} \cos\alpha_{Fin2} - F_2 \cos\alpha_{F_2};$$

$$F_{23y} = F_{21} \sin\alpha_{F_{21}} - F_{in} \sin\alpha_{Fin2} - F_2 \sin\alpha_{F_2} + G_2. \quad (9)$$

Следовательно,

$$F_{23} = \sqrt{(F_{23x})^2 + (F_{23y})^2}; \quad \alpha_{F_{23}} = \arctan\left(\frac{F_{23x}}{F_{23y}}\right). \quad (10)$$

Таким образом, найдены все 6 неизвестных для данной группы Ассур: усилия в кинематических парах А, В, С и направления этих сил.

#### Группа Ассур второго вида

Расчетная схема для определения усилий в кинематических парах данной группы Ассур приведена на рисунке 2 [3, 6].

*Определение сил  $F_{21}$ ,  $F_{34}$ .* Расчет сил начнем с определения силы  $F_{21}^\tau$ . Эта сила определяется аналогично определению такой же силы для группы Ассур первого вида, поэтому приводим выражение для силы  $F_{21}^\tau$  без подробного объяснения:

$$F_{21}^\tau = \frac{(F_{in2} \sin\alpha_{Fin2} - 2) X_2 - F_{in2} \cos\alpha_{Fin2} Y_2}{l_{AB}} + \frac{M_2 + M_{in2} + F_2 \sin\alpha_{F_2} X_{F_2} - F_2 \cos\alpha_{F_2} Y_2}{l_{AB}}. \quad (11)$$

Все переменные, входящие в это выражение, определяются так же, как и в группе Ассур первого вида. Силы  $F_{21}^n$  и  $F_{34}$  определяем из условий  $\sum F_x = 0$  и  $\sum F_y = 0$ .

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} -b_1 &= F_{21}^\tau \cos\left(\varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right) + F_{in2} \cos\alpha_{Fin2} + \\ &+ F_2 \cos\alpha_{F_2} + F_{in3} \cos\alpha_{Fin3} + F_3 \cos\alpha_{F_3}; \end{aligned} \quad (12)$$

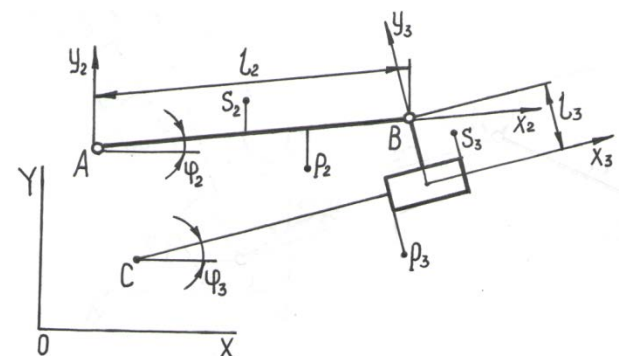


Рисунок 2. Расчетная схема группы Ассур второго вида

$$\begin{aligned} -b_2 &= F_{21}^\tau \sin\left(\varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right) + F_{in2} \sin\alpha_{Fin2} - G_2 + \\ &+ F_2 \sin\alpha_{F_2} + F_{in3} \sin\alpha_{Fin3} + F_3 \sin\alpha_{F_3} - G_3. \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда получим систему линейных уравнений для  $F_{21}^n$  и  $F_{34}$

$$\begin{aligned} F_{21}^n \cos \varphi_2 + F_{34} \cos \left( \varphi_3 + \frac{\pi}{2} \right) &= b_1; \\ F_{21}^n \sin \varphi_2 + F_{34} \sin \left( \varphi_3 + \frac{\pi}{2} \right) &= b_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Решение данной системы уравнений получаем по правилу Крамера:

$$\begin{aligned} F_{21}^n &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & \cos \left( \varphi_3 + \frac{\pi}{2} \right) \\ b_2 & \sin \left( \varphi_3 + \frac{\pi}{2} \right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \varphi_2 & \cos \left( \varphi_3 + \frac{\pi}{2} \right) \\ \sin \varphi_2 & \sin \left( \varphi_3 + \frac{\pi}{2} \right) \end{vmatrix}}; \\ F_{34} &= \frac{\begin{vmatrix} \cos \varphi_2 & b_1 \\ \sin \varphi_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \varphi_2 & \cos \left( \varphi_3 + \frac{\pi}{2} \right) \\ \sin \varphi_2 & \sin \left( \varphi_3 + \frac{\pi}{2} \right) \end{vmatrix}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда

$$\begin{aligned} F_{21} &= \sqrt{(F_{21}^r)^2 + (F_{21}^n)^2}; \\ \alpha_{F_{21}} &= \arctan \left( \frac{F_{21}^r}{F_{21}^n} \right) + \varphi_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Точку приложения силы  $F_{34}$  -  $h_x$  определим из условия равновесия моментов

$$\sum M_c = 0 F_{34} h_x + M_3 + M_{in3} + M_{\Sigma} = 0, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} M_{\Sigma} &= (F_{in3} \sin \alpha_{Fin3} - G_3) X_3 - F_{in3} \cos \alpha_{Fin3} Y_3 \\ &+ F_3 \sin \alpha_{F3} X_{F3} - F_3 \cos \alpha_{F3} Y_{F3}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $X_3$ ,  $Y_3$ ,  $X_{F3}$ ,  $Y_{F3}$  - определяются из следующих выражений:

$$\begin{aligned} X_3 &= S_{3x} \cos \varphi_3 - (S_{3y} - l_3) \sin \varphi_3; \\ Y_3 &= S_{3x} \sin \varphi_3 - (S_{3y} - l_3) \cos \varphi_3; \\ X_{F3} &= P_{3x} \cos \varphi_3 - (P_{3y} - l_3) \sin \varphi_3; \\ Y_{F3} &= P_{3x} \sin \varphi_3 - (P_{3y} - l_3) \cos \varphi_3, \end{aligned} \quad (19)$$

здесь  $S_{3x}$ ,  $S_{3y}$ ,  $P_{3x}$ ,  $P_{3y}$  - координаты центра масс и точки приложения силы звена 3 в локальной системе координат, жестко связанной со звеном.

Теперь определим

$$h_x = \frac{(M_3 + M_{in3} + M_{\Sigma})}{F_{34}}. \quad (20)$$

Определение величины и направления силы  $F_{23}$ . Эту силу определяем из условия равновесия всех сил, действующих на звено 2. Проекция этой силы на координатные оси можно найти из уравнений:

$$\begin{aligned} F_{23x} &= F_{21} \cos \alpha_{F_{21}} - F_{in2} \cos \alpha_{Fin2} - F_2 \cos \alpha_{F_2}; \\ F_{23y} &= F_{21} \sin \alpha_{F_{21}} - F_{in2} \sin \alpha_{Fin2} - F_2 \sin \alpha_{F_2} \\ &+ G_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} F_{23} &= \sqrt{(F_{23x})^2 + (F_{23y})^2}; \\ \alpha_{F_{23}} &= \arctan \left( \frac{F_{23y}}{F_{23x}} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, определены все силы и их направления в кинематических парах группы Ассур второго вида.

### Группа Ассур третьего вида

Расчетная схема данной группы представлена на рисунке 3 [3,7].

Сначала определим вспомогательные величины

$$l = \sqrt{l_2^2 + l_3^2}; \quad \gamma = \arctan \left( \frac{l_2}{l_3} \right). \quad (23)$$

Определение силы  $F_{34}^r$ . Данную силу определим по уравнению моментов относительно точки А, рассматривая равновесие двух звеньев: второго и третьего. Сначала определяем вспомогательные величины:

$$\begin{aligned} X_2 &= S_{2x} \cos \varphi_2 - (S_{2y} - l_2) \sin \varphi_2; \\ Y_2 &= S_{2x} \sin \varphi_2 - (S_{2y} - l_2) \cos \varphi_2; \\ X_{F_2} &= P_{2x} \cos \varphi_2 - (P_{2y} - l_2) \sin \varphi_2; \\ Y_{F_2} &= P_{2x} \sin \varphi_2 - (P_{2y} - l_2) \cos \varphi_2; \\ X_3 &= -(S_{3y} - l_3) \sin \varphi_3 (l_3 \cos \varphi_3 - l_3 \sin \varphi_3) \\ &+ S_{3x} \cos \varphi_3; \\ Y_3 &= -(S_{3y} - l_3) \cos \varphi_3 (l_3 \sin \varphi_3 - l_3 \cos \varphi_3) \\ &+ S_{3x} \sin \varphi_3; \end{aligned} \quad (24)$$

$$X_{F_3} = -(P_{3y} - l_3) \sin \varphi_3 (l_3 \cos \varphi_3 - l_3 \sin \varphi_3) + P_{3x} \cos \varphi_3;$$

$$Y_{F_3} = -(P_{3y} - l_3) \cos \varphi_3 (l_3 \sin \varphi_3 - l_3 \cos \varphi_3) + P_{3x} \sin \varphi_3.$$

Определяем моменты от сил, действующих на второе и третье звено отдельно

$$M_{\Sigma_2} = (F_{u2} \sin \alpha_{Fu2} - G_2) X_2 - F_{u2} \cos \alpha_{Fu2} Y_2 + F_2 \sin \alpha_{F2} X_{F2} - F_2 \cos \alpha_{F2} Y_{F2} + M_{u2} + M_2; (25)$$

$$M_{\Sigma_3} = (F_{u3} \sin \alpha_{Fu3} - G_3) X_3 - F_{u3} \cos \alpha_{Fu3} Y_3 + F_3 \sin \alpha_{F3} X_{F3} - F_3 \cos \alpha_{F3} Y_{F3} + M_{u3} + M_3.$$

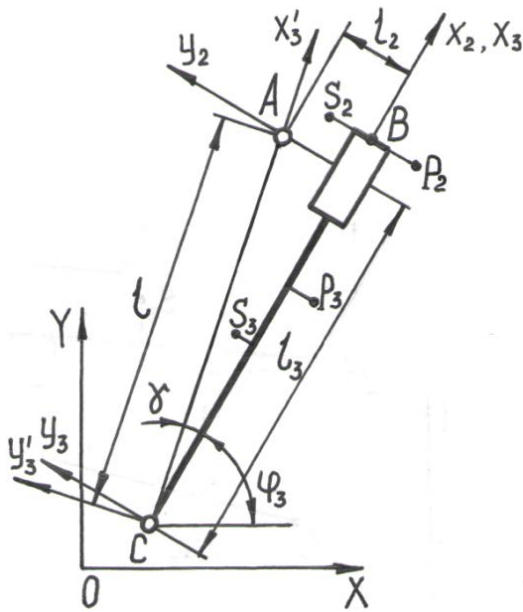


Рисунок 3. Расчетная схема группы Ассуря третьего вида

Теперь можно определить  $F_{34}^r$  и угол наклона этой силы:

$$F_{34}^r = \frac{M_{\Sigma_2} + M_{\Sigma_3}}{l}; \quad \alpha_{34}^r = \varphi_3 + \gamma + \frac{\pi}{2}. (26)$$

Силы  $F_{34}^n$  и  $F_{32}$  определим из условия баланса всех сил, действующих на звено 3: ( $\sum F_x = 0$  и  $\sum F_y = 0$ ). Отсюда имеем:

$$\Omega = \begin{vmatrix} \cos(\varphi_2 + \gamma) & \cos\left(\varphi_3 + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin(\varphi_2 + \gamma) & \sin\left(\varphi_3 + \frac{\pi}{2}\right) \end{vmatrix};$$

$$F_{34}^n = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & \cos\left(\varphi_3 + \frac{\pi}{2}\right) \\ b_2 & \sin\left(\varphi_3 + \frac{\pi}{2}\right) \end{vmatrix}}{\Omega}; (27)$$

$$F_{34}^r = \frac{\begin{vmatrix} \cos(\varphi_2 + \gamma) & b_1 \\ \sin(\varphi_2 + \gamma) & b_2 \end{vmatrix}}{\Omega},$$

где

$$b_1 = -F_{in3} \cos \alpha_{Fin3} - F_{34}^r \cos \alpha_{F_{34}^r} - F_3 \cos \alpha_{F3};$$

$$b_2 = G_3 - F_{in3} \sin \alpha_{Fin3} - F_{34}^r \sin \alpha_{F_{34}^r} - F_3 \sin \alpha_{F3}. (28)$$

Таким образом, получаем:

$$F_{34} = \sqrt{(F_{34}^r)^2 + (F_{34}^n)^2};$$

$$\alpha_{F_{34}} = \arctan\left(\frac{F_{34}^r}{F_{34}^n}\right) + \varphi_2 + \gamma. (29)$$

Так как  $F_{23} = -F_{32}$ , то остается только определить величину и направление силы  $F_{21}$ .

Величина и направление силы  $F_{21}$ . Эти значения силы определяются по условиям:  $\sum F_x = 0$  и  $\sum F_y = 0$  для второго звена.

$$F_{21x} + F_{in2} \cos \alpha_{Fin2} + F_2 \cos \alpha_{F2} + F_{23} \cos \alpha_{F23} = 0;$$

$$F_{21y} + F_{in2} \sin \alpha_{Fin2} + F_2 \sin \alpha_{F2} + F_{23} \sin \alpha_{F23} - G_2 = 0;$$

$$F_{21} = \sqrt{(F_{21x})^2 + (F_{21y})^2};$$

$$\alpha_{F_{21}} = \arctan\left(\frac{F_{21y}}{F_{21x}}\right).$$

Определение  $h_x$ . Точку приложения силы  $F_{23} - h_x$  определим из условия равенства нулю моментов сил, действующих на второе звено. Подробное определение точки приложения силы уже приводилось, поэтому ограничимся лишь окончательной формулой для определения величины  $h_x$

$$h_x = -M : F_{23}, (31)$$

где

$$M = (F_{in2} \sin \alpha_{Fin2} - G_2) X_2 - F_{in2} \cos \alpha_{Fin2} Y_2 + F_2 \sin \alpha_{F2} X_{F2} - F_2 \cos \alpha_{F2} Y_{F2} + M_{u2} + M_2. (32)$$

**Группа Ассур четвертого вида**

Схема расчета усилий в кинематических парах группы Ассур четвертого вида представлена на рисунке 4 [3]. Введены следующие определения:  $s_2, s_3, p_2, p_3$  - центры масс и точки приложения сил соответствующих звеньев данной группы Ассур.

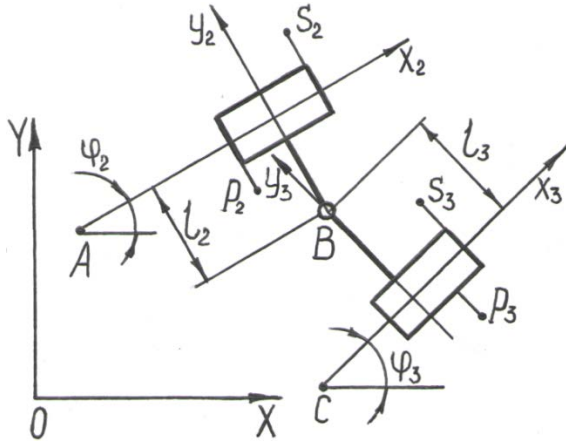


Рисунок 4. Расчетная схема группы Ассур четвертого вида

Определение  $F_{21}$  и  $F_{34}$ . Эти величины определяются по условию баланса всех сил, действующих на группу Ассур:

$$\begin{aligned}
 &F_{21} \cos\left(\varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right) + F_{in2} \cos\alpha_{Fin2} + F_{in3} \cos\alpha_{Fin3} \\
 &+ F_2 \cos\alpha_{F2} + F_3 \cos\alpha_{F3} + F_{34} \cos\left(\varphi_3 + \frac{\pi}{2}\right) = 0; \\
 &F_{21} \sin\left(\varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right) + F_{in2} \sin\alpha_{Fin2} + F_2 \sin\alpha_{F2} \\
 &+ F_{in3} \sin\alpha_{Fin3} + F_3 \sin\alpha_{F3} - G_2 - G_3 \\
 &+ F_{34} \sin\left(\varphi_3 + \frac{\pi}{2}\right) = 0.
 \end{aligned} \quad (33)$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
 b_1 &= -(F_{in2} \cos\alpha_{Fin2} + F_2 \cos\alpha_{F2} + F_{in3} \cos\alpha_{Fin3} + \\
 &-b_2 = F_{in2} \sin\alpha_{Fin2} + F_2 \cos\alpha_{F2} + F_{in3} \sin\alpha_{Fin3} \\
 &+ F_3 \sin\alpha_{F3} - G_2 - G_3;
 \end{aligned}$$

$$\Pi = \begin{vmatrix} \cos\left(\varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\varphi_3 + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right) & \sin\left(\varphi_3 + \frac{\pi}{2}\right) \end{vmatrix}. \quad (34)$$

Получаем решение:

$$\begin{aligned}
 F_{21} &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & \cos\left(\varphi_3 + \frac{\pi}{2}\right) \\ b_2 & \sin\left(\varphi_3 + \frac{\pi}{2}\right) \end{vmatrix}}{\Pi}; \\
 F_{34} &= \frac{\begin{vmatrix} \cos\left(\varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right) & b_1 \\ \sin\left(\varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right) & b_2 \end{vmatrix}}{\Pi}.
 \end{aligned} \quad (35)$$

Определение величины и направления силы  $F_{23}$ . Проекция силы  $F_{23}$  на координатные оси можно получить из условия баланса всех сил на оси координат для звена 2:

$$\begin{aligned}
 F_{23x} &= -F_2 \cos\alpha_{Fin2} - F_2 \cos\alpha_{F2} - F_{21} \cos\alpha_{F21}; \\
 F_{23y} &= G_2 - F_{21} \sin\alpha_{F21} - F_{in2} \sin\alpha_{F2} - F_2 \sin\alpha_{F2}.
 \end{aligned} \quad (36)$$

Следовательно

$$\begin{aligned}
 F_{23} &= \sqrt{(F_{21x})^2 + (F_{23y})^2}; \\
 \alpha_{F23} &= \arctan\left(\frac{F_{21y}}{F_{23x}}\right).
 \end{aligned} \quad (37)$$

Определение точки приложения силы  $F_{23} - h_{x1}$ . Эта величина определяется по балансу моментов, действующих на звено 2. Предварительно определим вспомогательные величины

$$\begin{aligned}
 X_2 &= S_{2x} \cos\varphi_2 - (S_{2y} - l_2) \sin\varphi_2; \\
 Y_2 &= S_{2x} \sin\varphi_2 - (S_{2y} - l_2) \cos\varphi_2; \\
 X_{F2} &= P_{2x} \cos\varphi_2 - (P_{2y} - l_2) \sin\varphi_2; \\
 Y_{F2} &= P_{2x} \sin\varphi_2 - (P_{2y} - l_2) \cos\varphi_2; \\
 M_{2\Sigma} &= M_{in2} + M_2 (F_{in2} \sin\alpha_{Fin2} - G_2) X_2 \\
 &- F_{in2} \cos\alpha_{Fin2} Y_2 + F_2 \sin\alpha_{F2} X_{F2} - F_2 \cos\alpha_{F2} Y_{F2}.
 \end{aligned} \quad (38)$$

Тогда

$$h_{x1} = -M_{2\Sigma} : F_{21} . \quad (39)$$

Определение точки приложения силы  $F_{34}$  –  $h_{x2}$ . Определение аналогично определению  $h_{x1}$ .

$$\begin{aligned} Y_3 &= S_{3x} \sin \varphi_3 - (S_{3y} - l_3) \cos \varphi_3; \\ X_{F3} &= P_{3x} \cos \varphi_3 - (P_{3y} - l_3) \sin \varphi_3; \\ Y_{F3} &= P_{3x} \sin \varphi_3 - (P_{3y} - l_3) \cos \varphi_3; \quad (40) \\ M_{3\Sigma} &= M_{in3} + M_3 (F_{in3} \sin \alpha_{Fin3} - G_3) X_3 \\ &- F_{in3} \cos \alpha_{Fin3} Y_3 + F_3 \sin \alpha_{F3} X_{F3} - F_3 \cos \alpha_{F3} Y_{F3}. \end{aligned}$$

Тогда

$$h_x = -M_{3\Sigma} : F_{34}. \quad (41)$$

#### Группа Ассура пятого вида

Расчетная схема данной группы представлена на рисунке 5 [3]. На рисунке введены обозначения:  $S_2, S_3, p_2, p_3$  - центры масс и точки приложения сил второго и третьего звеньев.

Определение значений сил  $F_{21}$  и  $F_{34}$ . Величины определяются по условию баланса всех сил, действующих на группу Ассура:

$$\begin{aligned} F_{32} \cos \left( \varphi_2 + \frac{\pi}{2} \right) + F_{in3} \cos \alpha_{Fin3} + F_3 \cos \alpha_{F3} \\ + F_{34} \cos \left( \varphi_3 + \frac{\pi}{2} \right) = 0; \quad (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{32} \sin \left( \varphi_2 + \frac{\pi}{2} \right) + F_{in3} \sin \alpha_{Fin3} + F_3 \sin \alpha_{F3} \\ - G_2 - G_3 + F_{34} \sin \left( \varphi_3 + \frac{\pi}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

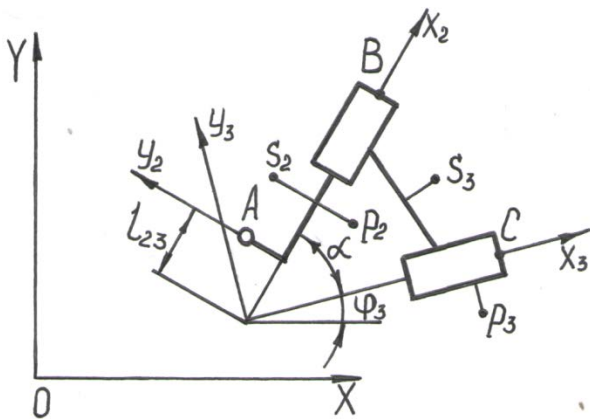


Рисунок 5. Расчетная схема группы Ассура пятого вида  
Введя обозначения:

$$\begin{aligned} b_1 &= -(F_{in3} \cos \alpha_{Fin3} + F_3 \cos \alpha_{F3}); \\ b_2 &= -(F_{in3} \sin \alpha_{Fin3} + F_3 \sin \alpha_{F3} - G_2 - G_3); \quad (43) \end{aligned}$$

$$E = \begin{vmatrix} \cos \left( \varphi_2 + \frac{\pi}{2} \right) & \cos \left( \varphi_3 + \frac{\pi}{2} \right) \\ \sin \left( \varphi_2 + \frac{\pi}{2} \right) & \sin \left( \varphi_3 + \frac{\pi}{2} \right) \end{vmatrix}.$$

Получаем решение:

$$F_{32} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & \cos \left( \varphi_3 + \frac{\pi}{2} \right) \\ b_2 & \sin \left( \varphi_3 + \frac{\pi}{2} \right) \end{vmatrix}}{E}; \quad (44)$$

$$F_{34} = \frac{\begin{vmatrix} \cos \left( \varphi_2 + \frac{\pi}{2} \right) & b_1 \\ \sin \left( \varphi_2 + \frac{\pi}{2} \right) & b_2 \end{vmatrix}}{E}.$$

Определение  $h_{x1}$  и  $h_{x2}$ . Определим в начале вспомогательные величины

$$\begin{aligned} F_{23} &= F_{23}; \quad \alpha_{F23} = \alpha_{F23} + \pi; \\ X_2 &= S_{2x} \cos \varphi_2 - (S_{2y} - l_2) \sin \varphi_2; \\ Y_2 &= S_{2x} \sin \varphi_2 - (S_{2y} - l_2) \cos \varphi_2; \\ X_{F2} &= P_{2x} \cos \varphi_2 - (P_{2y} - l_2) \sin \varphi_2; \quad (45) \\ Y_{F2} &= P_{2x} \sin \varphi_2 - (P_{2y} - l_2) \cos \varphi_2; \\ M_{2\Sigma} &= M_{in2} + M_2 - (F_{in2} \sin \alpha_{Fin2} - G_2) X_2 \\ &- F_{in2} \cos \alpha_{Fin2} Y_2 + F_2 \sin \alpha_{F2} X_{F2} \\ &- F_2 \cos \alpha_{F2} Y_{F2}. \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} h_x &= -M_{2\Sigma} : F_{23}; \\ X_3 &= -S_{3y} \sin \varphi_3 - (l_{23} \cos \varphi_2 - l_2 \sin \varphi_2) + S_{3x} \cos \varphi_3; \\ Y_3 &= S_{3y} \cos \varphi_3 - (l_{23} \sin \varphi_2 + l_2 \cos \varphi_2) + S_{3x} \sin \varphi_3; \\ X_{F3} &= -P_{3y} \sin \varphi_3 - (l_{23} \cos \varphi_2 - l_2 \sin \varphi_2) + P_{3x} \cos \varphi_3; \\ Y_{F3} &= P_{3y} \cos \varphi_3 - (l_{23} \sin \varphi_2 - l_2 \cos \varphi_2) + P_{3x} \sin \varphi_3; \\ M_{3\Sigma} &= M_{in3} + M_3 (F_{in3} \sin \alpha_{Fin3} - G_3) \quad (46) \\ &X_3 - F_{in3} \cos \alpha_{Fin3} Y_3 \\ &+ F_3 \sin \alpha_{F3} X_{F3} - F_3 \cos \alpha_{F3} Y_{F3}. \end{aligned}$$



Тогда:

$$h_x = -\frac{M_2 \Sigma + M_3 \Sigma}{F_{34}}; \quad (47)$$

$$F_{21x} = -F_2 \cos \alpha_{F2} - F_{in2} \cos \alpha_{Fin2} - F_{23} \cos \alpha_{F23};$$

$$F_{21y} = G_2 - F_{in2} \sin \alpha_{Fin2} - F_2 \sin \alpha_{F2} - F_{23} \sin \alpha_{F23}$$

Тогда

$$F_{21} = \sqrt{(F_{21x})^2 + (F_{21y})^2}. \quad (48)$$

#### Начальное звено

Схема распределения сил, действующих на начальное звено, представлена на рисунке 6 [3].

*Определение  $F_{yp}$ .* Определение этой силы производится по уравнению  $\Sigma M_A = 0$ . Сначала определяем вспомогательные величины:

$$X_1 = l_1 \cos \varphi_1; \quad Y_1 = l_1 \sin \varphi_1;$$

$$F_{12x} = F_{12} \cos \alpha_{F12}; \quad F_{12y} = F_{12} \sin \alpha_{F12}. \quad (49)$$

Тогда:

$$F_{yp} = \frac{F_{12x} \cdot Y_1 - F_{12y} \cdot X_1}{l_1} \quad \text{и} \quad \alpha_{Fyp} = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}. \quad (50)$$

*Определение величины и направления силы  $F_{10}$ .* Эти значения определим из условия равенства нулю всех сил, действующих на звено 1.

$$F_{10x} = -(F_{yp} \cos \alpha_{Fyp} + F_{12x});$$

$$F_{10y} = -(F_{yp} \sin \alpha_{Fyp} + F_{12y}). \quad (51)$$

Тогда

$$F_{10} = \sqrt{(F_{10x})^2 + (F_{10y})^2};$$

$$\alpha_{F10} = \arctan \left( \frac{F_{10y}}{F_{10x}} \right). \quad (52)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1 Мацюк И.Н., Шляхов Э.М. Определение кинематических и кинетостатических параметров плоских стержневых механизмов сложной структуры // Современное машиностроение. Наука и образование: Междунар. науч.-практ. конф. СПб., 2013. С. 788 – 796.

2 Мкртычев О.В. Компьютерное моделирование при силовом расчёте плоских механизмов // Теория Механизмов и Машин. 2013. №1. Т. 11. С. 77-83.

3 Сидоренко А.С., Софин А.А., Белоконов А.А. Нахождение усилий в статически определимых кинематических цепях (группы Ассур) // Молодежные чтения памяти Ю.А. Гагарина: мат. Межвузовск. науч.-практ. конф. Воронеж, 2015. Ч. 3. С. 158-161.

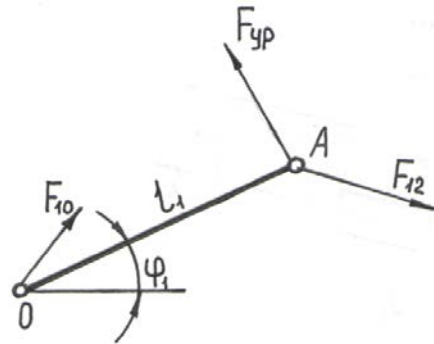


Рисунок 6. Расчетная схема начального звена

*Примечание.* Если определяется кинетостатика механизма с параллельным закреплением двух групп Ассур на начальном звене, то в этом случае сила  $F_{12}$  является геометрической суммой сил, действующих на начальное звено со стороны отброшенных групп Ассур. Ее определение не вызывает трудностей:

$$F_{12x} = F_{12} \cos \alpha_{F12} + F_{14} \cos \alpha_{F14};$$

$$F_{12y} = F_{12} \sin \alpha_{F12} + F_{14} \sin \alpha_{F14}. \quad (53)$$

Тогда

$$F_{12} = \sqrt{(F_{12x})^2 + (F_{12y})^2};$$

$$\alpha_{F12} = \arctan \left( \frac{F_{12y}}{F_{12x}} \right), \quad (54)$$

здесь  $F_{12}$  - сила, действующая на начальное звено от первой группы Ассур;  $F_{14}$  - сила, действующая на начальное звено от второй группы Ассур.

Получена математическая модель кинетостатического расчета механизмов в форме библиотек математических процедур определения реакций всех групп Ассур второго класса. Осуществлена программная реализация математической модели кинетостатического расчета.

4 Доронин Ф.А., Доев В.С. Исследование движения плоского механизма с помощью пакета Mathcad // Теория Механизмов и Машин. 2011. №1. Т. 9. С. 77-87

5 Александров В.В., Александрова О.В., Буднинский М.А., Сидоренко Г.Ю. Об экстремальных кинематического управления движением // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2013. № 3. С. 38-46.

6 Комов А.А., Потапов А.И., Тарарыкова И.В., Шахов С.В. Математическое описание процесса микрофльтрации суспензии в трубчатом канале // Сременные наукоемкие технологии. 2014. № 5-1. С. 164-165



7 Кретов И.Т., Попов Е.С., Потапов А.И., Попов Д.С. Математическое моделирование процесса микрофльтрации // Материалы LI отчетной научной конференции преподавателей и научных сотрудников ВГУИТ за 2012 г. 2012. С. 42.

#### REFERENCES

1 Matsyuk I.N., Shlyakhov E.M. Determination of kinematic parameters and kinetostatic flat core complex structure mechanisms. *Sovremennoye mashinostroyeniye. Nauka i obrazovaniye* [Modern engineering. Science and education]. 2013. pp. 788 – 796 (In Russ.).

2 Mkrtuichev O.V. Computer simulation with force calculation of plane mechanisms. *Teoriya Mechanizmov i Mashin*. [Theory of Mechanisms and Machines], 2013, no. 1, vol. 11, pp. 77-83. (In Russ.).

3 Sidorenko A.S., Sofin A.A., Belokonev A.A. Finding forces in statically determinate kinematic chains (Assur group). *Molodezhnye chtenia pamyati Ye.A. Gagarina: mat. Mezhyuzovsk. nauch.- prakt. konf.* [Youth read in memory of Yu.A. Gagarin], 2015, part 3, pp. 158-161. (In Russ.).

4 Doronin F.A., Doev V.S. Investigation of the mechanism of movement of the flat with the help of Mathcad. *Teoriya Mechanizmov i Mashin*. [Theory of Mechanisms and Machines], 2011, no. 1, vol. 9, pp. 77-87 (In Russ.).

5 Aleksandrov V.V., Aleksandrova O.V., Budninskiy M.A., Sidorenko G.U. About the extremals kinematic motion control. *Vestn. Mosc. un-ta. Ser. 1. Matematika. Mehanika*. [Proceedings of MSU. Mathematics. Mechanics.], 2013. no. 3, pp. 38-46 (In Russ.).

6 Comov A.A., Potapov A.I., Tararykova I.V., Shakhov S.V The mathematical description of the process of suspension in a tubular micro channel. *Sovremennye naukoemkie tekhnologii*. [Modern high technologies], 2014, no. 5-1, pp 164-165. (In Russ.).

7 Kretov I.T., Popov E., Potapov A.I., Popov D.S. Mathematical modeling of microfiltration. *Materialy otchetnoi nauchnoi konferentsii prepodavatelei i nauchnykh sotrudnikov VGUIT za 2012 god* [Proceedings of reporting conference of teachers and researchers VSUET for 2012], 2012, pp. 42 (In Russ.).