УДК 631.517:616.9-022.1

Доцент Н.В. Суханова
(Воронеж. гос. ун-т. инж. технол.) кафедра информационных и управляющих систем.
тел. (473)255-38-75
E-mail: Suhanovanv1971@mail.ru

Associate professor N.V. Sukhanova
(Voronezh state university of engineering technologies) Department of information and control systems. phone (473)255-38-75
E-mail: Suhanovanv1971@mail.ru

Оптимальное управление процессом культивирования в условиях инфицирования

Optimal control of the process of cultivation in the conditions of infection

Реферат. Представлен вариант решения задачи оптимального управления подачей антибиотика в условиях инфицирования, заключающейся в выборе из области допустимых управлений оптимального, с целью достижения компромисса между потерями в производстве за счет наличия посторонней микрофлоры и затратами на ее подавление, обусловленное применением антибиотика. Наличие в готовой продукции, кроме полезной культуры, других микроорганизмов, в частности "диких" существенно ухудшает качественные показатели конечного продукта (в частности, снижает срок хранения). В своеобразных условиях производства повышение качества целевого продукта за счет устранения инфекции возможно, в том числе, при использовании в процессе культивирования антибиотиков, но отсутствие эффективных алгоритмов и систем управления их подачей оставляет данный вопрос открытым. В качестве математической модели, адекватно описывающей ситуацию конкурентного взаимодействия двух популяций микроорганизмов (полезной и "дикой") из-за потребления одного ресурса, используется система Лотки-Волтерра, адаптированная для микробиологического процесса. Ставится задача: найти закон управления U(t), принадлежащий допустимой области управлений. Управление, доставляющее минимум критерию оптимизации в соответствии с принципом максимума, определяется из условия максимума функции Гамильтона и вытекающей из нее канонической системы уравнений. Получена модифицированная сопряженная система уравнений в матричном виде. Решение системы дифференциальных уравнений найдено в аналитическом виде методом преобразования координат. В результате найден оптимальный, в смысле выбранного критерия, закон управления подачей антибиотика, позволяющий регулировать концентрацию посторонней микрофлоры в процессе культивирования микроорганизмов, учитывающий удельную скорость прироста "диких" микроорганизмов.

Summary. The article presents a way of solving of the optimal control problem of antibiotic feeding under condition of infection, consisting in the selection of the optimal control in the field of admissible control, with the aim of achieving a compromise between the losses in production due to the presence of foreign microflora, and the cost of its suppression due to the application of antibiotic. The presence of other microorganisms in the finished product, in particular of the "wild" ones, considerably impairs the quality indicators of the final product (in particular, it reduces the storage time). In peculiar conditions of production it is possible to improve the quality of target product due to elimination of infection, including, when used antibiotics in the process of cultivation, but due to the lack of efficient algorithms and control systems of their supply the question is still open. We use the system of Lotka-Volterra adapted for microbiological process as a mathematical model adequately describing the situation of competitive interaction of two populations of microorganisms (useful and "wild" ones) due to the consumption of one resource. The aim is to find a control law U(t) belonging to the field of admissible control. The control that affords minimum to the optimization criterion in accordance with the principle of maximum is defined by the condition of the maximum of Hamilton function and the resulting canonical system of equations. The modified conjugated system of equations in matrix form is obtained. The solution of system of differential-different equations in the analytical form is found using the method of coordinate transformation. As a result an optimal control law is found (with regard to the selected criterion). This is the control law of application of the antibiotic, allowing to control the concentration of foreign microflora in the process of cultivation of microorganisms and accounting for the specific equation describing the speed of growth of "wild" microorganisms.

Ключевые слова: закон управления, инфицирование, микрофлора, система уравнений Лотки-Вольтерра, антибиотик

Keywords: the control law, the infection, microflora, the system of equations of Lotka-Volterra, antibiotic

Для цитирования
Суханова Н.В. Оптимальное управление процессом культивирования в условиях инфицирования // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. 2016. №1. С. 57-62. doi:10.20914/2310-1202-2016-1-57-62.

For cite
Sukhanova N.V. Optimal control of the process of cultivation in the conditions of infection *Vestnik voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta inzhenernyh tekhnologij* [Proceedings of the Voronezh state university of engineering technologies]. 2016, no. 1, pp. 57–62. (In Russ.). doi: 10.20914/2310-1202-2016-1-57-62.

Задача управления процессом культивирования микроорганизмов в условиях инфицирования является весьма актуальной. Инфицирование - это обсемененность полезных микроорганизмов (например, дрожжей) “дикими”. Наличие в готовой продукции, кроме полезной культуры, других микроорганизмов, в частности “диких” существенно ухудшает качественные показатели конечного продукта. Поэтому борьба с инфекцией путем применения в процессе культивирования антибиотиков требует эффективных алгоритмов управления их подачей. Решению задачи управления процессами культивирования микроорганизмов посвящены фундаментальные труды известных ученых: В. В. Кафарова, В. М. Кантере и других. Использование антибиотиков препятствует развитию вредных бактерий и патогенной микрофлоры и, в частности, не оказывает негативного воздействия на жизнедеятельность дрожжевой клетки и сахара мелассы [5].

В качестве математической модели, описывающей ситуацию конкурентного взаимодействия микроорганизмов из-за потребления одного ресурса, может использоваться система Лотки-Вольтерра [1]. Эта система, адаптированная для процесса культивирования микроорганизмов, с учетом функции управления *U(t)* имеет следующий вид [5]:

$$\begin{cases} \dfrac{dX_1}{dt} = X_1\left(b_1 - a_1X_1 - a_2X_2\right) \\ \dfrac{dX_2}{dt} = -X_2\left(a_3X_1 + a_4X_2\right) + b_2\left(X_2 - U(t)\right) \end{cases} \quad (1)$$

$$X = X_1 + X_2 \text{ и } X_2 << X_1,$$

где X_1 и X_2 - концентрации полезной популяции и “диких” микроорганизмов; $b_1, a_1, a_2, b_2, a_3, a_4$ - коэффициенты, b_1 и b_2 – удельные скорости прироста соответственно полезных и “диких” микроорганизмов, *U(t)* – управляющая переменная, регулирующая рост “диких” микроорганизмов.

Ставится задача найти оптимальный закон управления *U(t)* подачей антимикробных препаратов (неомицина и др.), подавляющих “дикую” микрофлору с целью снижения инфицирования целевого продукта и сокращения расхода сырьевых ресурсов.

Линеаризуем второе уравнение системы (1):

$$\begin{cases} \dfrac{dX_1}{dt} = X_1\left(b_1 - a_1X_1 - a_2X_2\right) \\ \dfrac{dX_2}{dt} = b_2\left(X_2 - U(t)\right) \end{cases}. \quad (2)$$

Критерий оптимизации имеет вид:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T \left[X_2^2 + qU^2\right] dt \to \min, \quad (3)$$

где q – сравнительная весовая доля указанных затрат.

Необходимо найти вектор оптимальных управлений *U(t)* для регулирования концентрации посторонней микрофлоры из условия минимума среднеквадратичного критерия (3).

Управление, доставляющее минимум критерию (3) в соответствии с принципом максимума, определяется из условия максимума функции Гамильтона $H(X_2, \psi, U)$ [2,3,4]:

$$H = \frac{1}{2}(X_2^2 + qU^2(t)) + \psi(b_2X_2 - b_2U(t)) \quad (4)$$

и вытекающей из нее канонической системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dX_2}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \psi} = b_2X_2 - b_2U \\ \dfrac{d\psi}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial X_2} = -X_2 - \psi\, b_2 \\ \dfrac{\partial H}{\partial U} = qU - b_2\psi. \end{cases} \quad (5)$$

Из последнего уравнения системы (5) находим оптимальное управление:

$$U(t) = \frac{b_2}{q} \cdot \psi(t). \quad (6)$$

Подставим (6) в первое уравнение системы (5):

$$\begin{cases} \dfrac{dX_2}{dt} = b_2X_2 - \dfrac{b_2^2}{q}\psi \\ \dfrac{d\psi}{dt} = -X_2 - \psi\, b_2. \end{cases} \quad (7)$$

Введем замену переменных: $X_2 = x$, $\psi = y$, $b_2 = a$, $b_2^2 / q = b$.

Тогда систему уравнений (7) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - by \\ \dfrac{d\psi}{dt} = -x - ay. \end{cases} \qquad (8)$$

Модифицированную сопряженную систему уравнений запишем в матричном виде:

$$\frac{dz}{dt} = A \cdot z\,, \qquad (9)$$

где матрица $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ -1 & -a \end{pmatrix}$,

вектор-столбец $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Решение системы дифференциальных уравнений (9) может быть найдено аналитически следующим образом.

Решение системы (9) имеет вид:

$$z(t) = e^{At} \cdot C\,, \qquad (10)$$

где C – постоянная интегрирования.

Пусть

$$z{=}Tv,$$

где T – неособая матрица перехода к новой системе координат v.

Тогда (9) перепишется в виде:

$$T\frac{dv}{dt} = ATv\,.$$

Последнее выражение умножим на T^{-1} слева:

$$T^{-1}T\frac{dv}{dt} = T^{-1}ATv\,.$$

Обозначим

$$T^{-1}AT = \Lambda\,, \qquad (11)$$

где Λ - диагональная матрица собственных значений матрицы А.

Окончательно переходим к уравнению:

$$\frac{dv}{dt} = \Lambda v\,. \qquad (12)$$

В уравнении (11) две неизвестные матрицы – A и Λ. Элементы матрицы Λ - собственные значения матрицы A- можно найти из уравнения:

$$\det\left|A - \lambda E\right| = 0\,,$$

где E – единичная диагональная матрица.

$$\det\left|\begin{pmatrix} a & -b \\ -1 & -a \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0\,. \qquad (13)$$

Из выражения (13) следует, что $\lambda^2 - a^2 - b = 0$, поэтому

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{a^2 + b}$$

или

$$\lambda_1 = \lambda = \sqrt{a^2 + b}\,,$$

$$\text{а } \lambda_2 = -\lambda = -\sqrt{a^2 + b}\,. \qquad (14)$$

Для нахождения матрицы T условие (11) умножим слева на T:

$$TT^{-1}AT = T\Lambda\,,$$
$$AT = T\Lambda\,. \qquad (15)$$

Для того, чтобы получить T такое, чтобы оно диагонализировало матрицу A, необходимо найти решение уравнения (15).

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ -1 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

$$(a - \lambda_1)t_{11} = bt_{12}.$$

Отсюда следует, что при

$$t_{11}{=}1\!:\ t_{12} = \frac{a - \lambda_1}{b} = \frac{a - \lambda}{b}\,.$$

$$(a - \lambda_2)\ t_{12} = bt_{22}.$$

Из чего следует, что

$$t_{12}{=}1\!:\ t_{22} = \frac{a - \lambda_2}{b} = \frac{a + \lambda}{b}\,.$$

Таким образом, матрица T имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{a - \lambda}{b} & \dfrac{a + \lambda}{b} \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Из выражения (12)

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dv_1}{dt} \\ \dfrac{dv_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

следует, что: $v_1(t) = e^{\lambda_1 t} \cdot C_1$ и $v_2(t) = e^{\lambda_2 t} \cdot C_2$, где C_1 и C_2 – константы.

Так как

$$z{=}Tv,$$

то и вектор-столбец

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Tv = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{a - \lambda}{b} & \dfrac{a + \lambda}{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda t}C_1 \\ e^{-\lambda t}C_2 \end{pmatrix}. \qquad (17)$$

Решения (17) запишем в виде:

$$\begin{cases} x(t) = e^{\lambda t}C_1 + e^{-\lambda t}C_2 \\ y(t) = \dfrac{a - \lambda}{b}e^{\lambda t}C_1 + \dfrac{a + \lambda}{b}e^{-\lambda t}C_2 \end{cases}.$$

Так как $X_2{=}x$, $\psi = y$, $b_2{=}a$, $b_2^2/q = b$,

$$\begin{cases} X_2(t) = e^{\lambda t}C_1 + e^{-\lambda t}C_2 \\ \psi(t) = \dfrac{(b_2 - \lambda)q}{b_2^2}e^{\lambda t}C_1 + \dfrac{(b_2 + \lambda)q}{b_2^2}e^{-\lambda t}C_2 \end{cases}. \qquad (18)$$

При $X_2(0)= X_{20}$, $\psi(T)=0$ (18) примет вид:

$$\begin{cases} X_{20} = C_1 + C_2 \\ \dfrac{(b_2-\lambda)q}{b_2^2} e^{\lambda T} C_1 + \dfrac{(b_2+\lambda)q}{b_2^2} e^{-\lambda T} C_2 = 0 \end{cases}.$$

Зная $U(t)$: $U(t) = \dfrac{b_2}{q} \cdot \psi(t)$ и $\psi(t)$, из (18) получим:

$$U(t) = \frac{b_2}{q}\Big(\frac{(b_2-\lambda)q}{b_2^2} e^{\lambda T} C_1 + \frac{(b_2+\lambda)q}{b_2^2} e^{-\lambda T} C_2\Big) = \frac{(b_2-\lambda)}{b_2} e^{\lambda T} C_1 + \frac{(b_2+\lambda)}{b_2} e^{-\lambda T} C_2 . \quad (19)$$

Целью управления является достижение компромисса между потерями в производстве за счет наличия «диких» микроорганизмов и затратами на их подавление, обусловленное применением антибиотика[5].

Если же использовать допущение [5]:

$$\frac{dX_2}{dt} = b_2 X_2 - r\psi\ (t), \quad (20)$$

при

$$r = \frac{b_2^2 T}{2q}, \quad (21)$$

то согласно (1):

$$b_2 U(t) = C_2 r e^{-\int b_2 dt} - X_2 (a_3 X_1 + a_4 X_2) \quad (22)$$

и

$$X_2(t) = e^{\int b_2 dt} \Big[C_3 - \int \psi r e^{-\int b_2 dt} dt\Big], \quad (23)$$

где C_3 – константа.

Из первого уравнения системы (1) (после деления слагаемых на X_1^2), следует уравнение:

$$-\frac{dX_1}{X_1^2 dt} + \frac{b_1 - a_2 X_2}{X_1} - a_1 = 0,$$

которому соответствует:

$$\frac{1}{X_1} = e^{-\int b_1 dt} * e^{\int a_2 X_2 dt} * \Big[C_4 + \int a_1 e^{\int b_1 dt} * e^{-\int a_2 X_2 dt} dt\Big], \quad (24)$$

где C_4 – константа.

Из (22) с учетом выражений (23) и (24) видно: во-первых, существенное отличие закона управления, соответствующего допущениям (20) и (21) от (19); во-вторых, отсутствие произвольной функции в уравнении (22), варьируя которой можно удовлетворить какому-либо критерию оптимизации. Таким образом, получен оптимальный закон управления подачей антибиотика (19), позволяющий регулировать концентрацию посторонней микрофлоры в процессе культивирования.

ЛИТЕРАТУРА

1 Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Институт компьютерных исследований, 2004. 288 с.

2 Галлеев Э.М., Зеликин М.И., Конягин С.В. Оптимальное управление. М.: МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2008. 320 с.

3 Покорный Ю.В. Оптимальные задачи. М.: Регулярная и хаотичная динамика, 2008. 160 с.

4 Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации: учеб. пособие. М.: Физматлит, 2008. 368 с.

5 Россихина Л.В. Синтез алгоритмов и систем управления процессом культивирования микроорганизмов в условиях инфицирования (на примере производства хлебопекарных дрожжей). Автореф. дисс. … канд. тех. наук. Воронеж: ВГТА, 2001. 16 с.

REFERENCES

1 Volterra V. Matematicheskaya teoria borbyi za suschestvovanie [The Mathematical theory of the struggle for existence].Moscow, Institute of computer science, 2004. 288 p. (In Russ.).

2 Galeev E. M., Zelikin M. I., Konyagin S. V. Optimalnoe upravlenie [Optimal control]. Moscow, MCCME (Moscow center for continuous mathematical education), 2008. 320 p. (In Russ.).

3 Pokorny Yu. V. Optimalnyie zadachi [Optimal task]. Moscow, Regular and chaotic dynamics, 2008. 160 p. (In Russ.).

4 Sukharev A.G., Timokhov A.V., Fedorov V.V. Kurs metodov optimizatsii [Course of optimization methods]. Moscow, Fizmatlit, 2008. 368 p. (In Russ.).

5 Rossikhina L. V. Sintez algoritmov i sistem upravleniya protsessom kultivirovaniya microorganizmov v usloviah infitsirovaniya (na primere proizvodstva hlebopekarnyih drozhzhey) [Synthesis of algorithms and systems manage the process of cultivation of microorganisms in conditions of infection (on the example of production of bakery yeast). Abstract Diss. Cand. Tech. Sci.]. Voronezh, 2001. 16 p. (In Russ.).